*MASTER NEGATIVE*
*NO. 93-81604-1*

MICROFILMED 1993

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES/NEW YORK

as part of the
"Foundations of Western Civilization Preservation Project"

Funded by the
NATIONAL ENDOWMENT FOR THE HUMANITIES

Reproductions may not be made without permission from
Columbia University Library

# COPYRIGHT STATEMENT

The copyright law of the United States - Title 17, United States Code - concerns the making of photocopies or other reproductions of copyrighted material.

Under certain conditions specified in the law, libraries and archives are authorized to furnish a photocopy or other reproduction. One of these specified conditions is that the photocopy or other reproduction is not to be "used for any purpose other than private study, scholarship, or research." If a user makes a request for, or later uses, a photocopy or reproduction for purposes in excess of "fair use," that user may be liable for copyright infringement.

This institution reserves the right to refuse to accept a copy order if, in its judgement, fulfillment of the order would involve violation of the copyright law.

*AUTHOR:*

ENRIQUES, FEDERIGO

*TITLE:*

PROBLEME DER WISSENSCHAFT.

*PLACE:*

LEIPZIG

*DATE:*

1910

Master Negative #
93-81604-1

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DEPARTMENT

**BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET**

**Original Material as Filmed - Existing Bibliographic Record**

101 Problemi della scienza.
En7 German. Grelling.

**Enriques, Federigo, 1871-1946.** ~~501 Q606~~

... . Probleme der Wissenschaft. Erster-[zweiter] Teil. Übersetzt von Kurt Grelling. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910.

½ vol. L. 19cm. (Wissenschaft und Hypothese. XI.)

*At head of title:* Federigo Enriques.

Contents.—Tl. 1. Wirklichkeit und Logik. x, 258, 16 p. 3 diagr.—Tl. 2. Die Grundbegriffe der Wissenschaft. vi p., p. [259]-599, [1] p.

**Restrictions on Use:**

**TECHNICAL MICROFORM DATA**

FILM SIZE: 35mm REDUCTION RATIO: 11x
IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB
DATE FILMED: 7/26/93 INITIALS F.C.
FILMED BY: RESEARCH PUBLICATIONS, INC WOODBRIDGE, CT

# VOLUME 1

# BIBLIOGRAPHIC IRREGULARITIES

**MAIN ENTRY:** Enriques, Federigo

**Bibliographic Irregularities in the Original Document**
List volumes and pages affected; include name of institution if filming borrowed text.

_____ Page(s) missing/not available: _____

_____ Volumes(s) missing/not available: _____

_____ Illegible and/or damaged page(s): _____

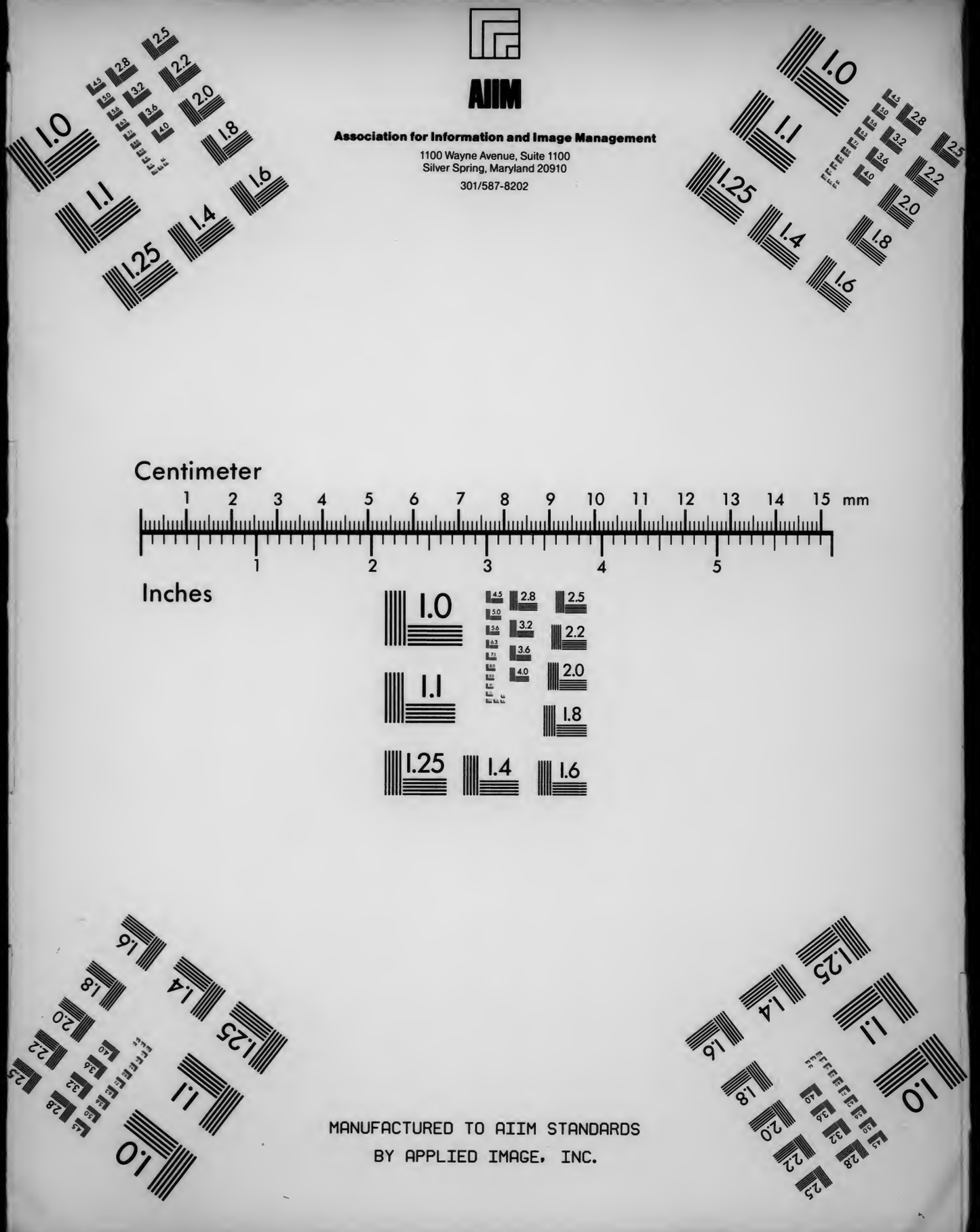
_____ Page(s) or volumes(s) misnumbered: _____

_____ Bound out of sequence: _____

_____ Page(s) or illustration(s) filmed from copy borrowed from: State University of N.Y. at Albany Hawley Library
v.1 - entire book

_____ Other: _____

FILMED IN WHOLE
FROM A COPY
BORROWED FROM
STATE
UNIVERSITY AT
ALBANY HAWLEY
LIBRARY


AIIM
Association for Information and Image Management
1100 Wayne Avenue, Suite 1100
Silver Spring, Maryland 20910
301/587-8202
Centimeter
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 mm
Inches
1 2 3 4 5
MANUFACTURED TO AIIM STANDARDS
BY APPLIED IMAGE, INC.

# COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES

## Interlibrary Loan

Borrowed for DIRKS

Request number 93i4067

Lending library NYAG

**Due Date:** 11-16

***Do not remove this band.***

Number of volumes 2 of 2

If the lending library has placed restrictions on the use of this item, the restriction is noted below.

___ No photocopying

___ Not renewable by the lending library

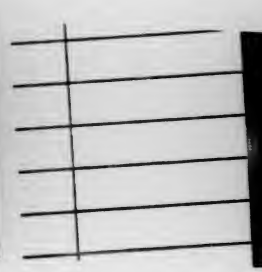
___ Library use only

**Renewal.** To renew, call us at 854-3542 or come to the Columbia Interlibrary Loan Office in 207 Butler Library at least 5 days before the due date shown above.

**Fines.** You will be charged a fine if this item is returned to us after the due date shown above. This policy applies to all Columbia borrowers through Interlibrary Loan, including faculty and other officers.

**Return** this loaned item to the Interlibrary Loan Office, 207 Butler Library, Monday through Friday, 9:00 a.m. to 5:00 p.m.

***Do not remove this band.***



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# Wissenschaft und Hypothese

## Sammlung von Einzeldarstellungen aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen.

8. In Leinwand geb.

Es ist ein unverkennbares Bedürfnis unserer Zeit, die in den verschiedenen Wissensgebieten durch rastlose Arbeit gewonnenen Erkenntnisse von umfassenden Gesichtspunkten aus im Zusammenhang miteinander zu betrachten und darzustellen. Nicht um spezielle Monographien handelt es sich also, sondern um Darstellung dessen, was die Wissenschaft erreicht hat, was sie früher oder später noch erreichen kann, und welches ihre wesentlichen und aus der Tiefe ihres Wirkens entspringenden Probleme sind. Die Wissenschaften in dem Bewußtsein ihres festen Besitzes, in ihren Voraussetzungen darzustellen und ihr pulsierendes Leben, ihr Haben, Können und Wollen aufzudecken, soll die Aufgabe sein; andererseits aber soll in erster Linie auch auf die durch die Schranken der Sinneswahrnehmung und der Erfahrung überhaupt bedingten Hypothesen hingewiesen werden.

Bisher erschien in dieser Sammlung:

I. Band: **Wissenschaft und Hypothese.** Von Henri Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München. 2. Aufl. 1906. Geb. *M.* 4.80.

Dies Bnch behandelt in den Hauptstücken: Zahl und Größe, den Raum, die Kraft, die Natur, die Mathematik, Geometrie, Mechanik und einige Kapitel der Physik. Zahlreiche Anmerkungen des Herausgebers kommen dem allgemeinen Verständnis noch mehr entgegen und geben dem Leser wertvolle literarische Angaben zu weiterem Studium.

II. Band: **Der Wert der Wissenschaft.** Von Henri Poincaré-Paris. Deutsch von E. und H. Weber-Straßburg. Mit einem Bildnis des Verfassers. 1906. Geb. *M.* 3.60.

Der geistvolle Verfasser gibt einen Überblick über den heutigen Standpunkt der Wissenschaft nnd über ihre allmähliche Entwicklung, wie sie sowohl bis jetzt vor sich gegangen ist, als wie er sich ihre zukünftigen Fortschritte denkt. Das Werk ist für den Gelehrten zweifellos von größtem Interesse, durch seine zahlreichen Beispiele nnd Erläuterungen wird es aber auch jedem modernen Gebildeten zugänglich gemacht.



III. Band: **Mythenbildung und Erkenntnis.** Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. Von G. F. Lipps-Leipzig. 1907. Geb. *M.* 5.—

Der Verfasser zeigt, daß erst durch die Widersprüche, die mit dem naiven, zur Mythenbildnng führenden Verhalten unvermeidlich verknüpft sind, der Mensch auf die Tatsache aufmerksam wird, daß sein Denken die Quelle der Erkenntnis ist — er wird kritisch und gelangt zu der kritischen Weltbetrachtung. Die Entwicklung der kritischen Weltbetrachtung stellt die Geschichte der Philosophie dar.

IV. Band: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola-Pavia. Deutsch von H. Liebmann-Leipzig. 1908. Geb. *M.* 5.—

In der vom Verfasser und Übersetzer erweiterten deutschen Ausgabe wird wohl nicht nur den Mathematikern ein Gefallen erwiesen, sondern vor allem auch den vielen, welche mit elementaren mathematischen Vorkenntnissen ausgestattet, Ziele und Methoden der nichteuklidischen Geometrie kennen lernen wollen. Man wird in der elementar gehaltenen und flüssigen Darstellung die Antwort auf viele Fragen finden, wo andere nur dem gründlich vorgebildeten Mathematiker zugängliche Quellen versagten.

V. Band: **Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels-Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer. 43 Illustrationen. 1902. Geb. *M.* 6.80.

Nach einer Übersicht über die Erscheinnngen der Ebbe und Flut, der Seeschwankungen, der besonderen Flutphänomene sowie der Beobachtungsmethoden werden in sehr anschaulicher, durch Figuren erläuterter Weise die fluterzeugenden Kräfte, die Theorien der Gezeiten sowie die Herstellung von Gezeitentafeln erklärt. Die folgenden Kapitel sind geophysikalischen und astronomischen Fragen, die mit der Einwirkung der Gezeitenkräfte auf die Weltkörper zusammenhängen, gewidmet.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von Max Planck-Berlin. 2. Auflage. 1908. Geb. *M.* 6.—

In drei Abschnitten wird behandelt: die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clansius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise; schließlich die Darlegung, wie man durch Anwendung des Prinzips unabhängig von jeglichen Hypothesen über das Wesen der Naturkräfte zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Erscheinungswelt gelangen kann.

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert-Göttingen. 3. durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte Auflage. 1909. Geb. *M.* 6.—

Diese Untersuchung ist ein Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zutage tritt.

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge d. Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann-Königsberg i. P. 2. Aufl. 1910. Geb.

Durch die sichtliche Zunahme der erkenntnistheoretischen Interessen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften war dem Verfasser der Weg für die Neubearbeitung der inzwischen notwendig gewordenen zweiten Auflage vorgezeichnet, seine späteren erkenntnistheoretischen Untersuchungen in die Grundzüge einzuarbeiten und damit eine weitere Durcharbeitung des gesamten für ihn in Betracht kommenden Gegenstandes zu versuchen, ohne daß dabei Richtung und Ergebnis seiner bisherigen Studien eine wesentliche Änderung erfahren konnten.

XI. Band: **Probleme der Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-Göttingen. 2 Teile. 1910. Geb.

I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.**
II. Teil: **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.**

Der Plan des Werkes ist ein sehr umfassender. Es handelt sich um eine neue Theorie der Erkenntnis, welche der Verfasser durch eine gründliche Analyse der Fragen der Logik und Psychologie entwickelt, dabei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik, der Mechanik, der Physik, der Chemie bis zur Biologie, der Wirtschaftslehre und der Geschichte usw. berührend.

Unter der Presse:

VIII. Band: **Das Wissen unserer Zeit in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von É. Picard-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.

X. Band: **Wissenschaft und Religion.** Von É. Boutroux-Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg i. E.

In Vorbereitung (genaue Fassung der Titel vorbehalten):

**Anthropologie und Rassenkunde.** Von E. v. Baelz-Stuttgart.
**Prinzipien der vergleichenden Anatomie.** Von H. Braus-Heidelberg.
**Die Erde als Wohnsitz des Menschen.** Von K. Dove-Jena.
**Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich.** Von K. Escherich-Tharandt.
**Prinzipien der Sprachwissenschaft.** Von F. H. Finck-Berlin-Südende.
**Erdbeben und Gebirgsbau.** Von Fr. Frech-Breslau.
**Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften.** Von Dr. M. Frischeisen-Köhler-Berlin.
**Die pflanzengeographischen Wandlungen der deutschen Landschaft.** Von H. Hausrath-Karlsruhe.
**Reizerscheinungen der Pflanzen.** Von L. Jost-Bonn-Poppelsdorf.
**Geschichte der Psychologie.** Von O. Klemm-Leipzig.
**Die Materie im Kolloidalzustand.** Von V. Kohlschütter-Straßburg i. E.
**Vorfahren und Vererbung.** Von F. Le Dantec-Paris. Deutsch von H. Kniep-Freiburg i. B.
**Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie.** Von G. Linck-Jena.
**Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp-Marburg.
**Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.
**Botanische Beweismittel für die Abstammungslehre.** Von H. Potonié-Berlin.
**Mensch und Mikroorganismen** unter besonderer Berücksichtigung des Immunitätsproblems. Von H. Sachs-Frankfurt a. M.
**Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper.** Von H. v. Seeliger-München.
**Meteorologische Zeit- und Streitfragen.** Von R. Süring-Berlin.

**Die Sammlung wird fortgesetzt.**

FEDERIGO ENRIQUES

# PROBLEME DER WISSENSCHAFT

## ERSTER TEIL
## WIRKLICHKEIT UND LOGIK

ÜBERSETZT VON
**KURT GRELLING**

HAWLEY LIBRARY
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK AT ALBANY

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge d. Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann-Königsberg i. P. 2. Aufl. 1910. Geb.

Durch die sichtliche Zunahme der erkenntnistheoretischen Interessen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften war dem Verfasser der Weg für die Neubearbeitung der inzwischen notwendig gewordenen zweiten Auflage vorgezeichnet, seine späteren erkenntnistheoretischen Untersuchungen in die Grundzüge einzuarbeiten und damit eine weitere Durcharbeitung des gesamten für ihn in Betracht kommenden Gegenstandes zu versuchen, ohne daß dabei Richtung und Ergebnis seiner bisherigen Studien eine wesentliche Änderung erfahren konnten.

XI. Band: **Probleme der Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-Göttingen. 2 Teile. 1910. Geb.

I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.**
II. Teil: **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.**

Der Plan des Werkes ist ein sehr umfassender. Es handelt sich um eine neue Theorie der Erkenntnis, welche der Verfasser durch eine gründliche Analyse der Fragen der Logik und Psychologie entwickelt, dabei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik, der Mechanik, der Physik, der Chemie bis zur Biologie, der Wirtschaftslehre und der Geschichte usw. berührend.

Unter der Presse:

VIII. Band: **Das Wissen unserer Zeit in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von É. Picard-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.

X. Band: **Wissenschaft und Religion.** Von É. Boutroux-Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg i. E.

In Vorbereitung (genaue Fassung der Titel vorbehalten):

**Anthropologie und Rassenkunde.** Von E. v. Baelz-Stuttgart.
**Prinzipien der vergleichenden Anatomie.** Von H. Braus-Heidelberg.
**Die Erde als Wohnsitz des Menschen.** Von K. Dove-Jena.
**Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich.** Von K. Escherich-Tharandt.
**Prinzipien der Sprachwissenschaft.** Von F. H. Finck-Berlin-Südende.
**Erdbeben und Gebirgsbau.** Von Fr. Frech-Breslau.
**Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften.** Von Dr. M. Frischeisen-Köhler-Berlin.
**Die pflanzengeographischen Wandlungen der deutschen Landschaft.** Von H. Hausrath-Karlsruhe.
**Reizerscheinungen der Pflanzen.** Von L. Jost-Bonn-Poppelsdorf.
**Geschichte der Psychologie.** Von O. Klemm-Leipzig.
**Die Materie im Kolloidalzustand.** Von V. Kohlschütter-Straßburg i. E.
**Vorfahren und Vererbung.** Von F. Le Dantec-Paris. Deutsch von H. Kniep-Freiburg i. B.
**Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie.** Von G. Linck-Jena.
**Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp-Marburg.
**Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.
**Botanische Beweismittel für die Abstammungslehre.** Von H. Potonié-Berlin.
**Mensch und Mikroorganismen** unter besonderer Berücksichtigung des Immunitätsproblems. Von H. Sachs-Frankfurt a. M.
**Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper.** Von H. v. Seeliger-München.
**Meteorologische Zeit- und Streitfragen.** Von R. Süring-Berlin.

**Die Sammlung wird fortgesetzt.**

FEDERIGO ENRIQUES

# PROBLEME DER WISSENSCHAFT

## ERSTER TEIL
## WIRKLICHKEIT UND LOGIK

ÜBERSETZT VON
**KURT GRELLING**

HAWLEY LIBRARY
STATE UNIVERSITY OF NEW YORK AT ALBANY

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Q
175
E64
V.1

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

# Vorwort.

Gedanken, welche im Laufe des Dezenniums von 1890 bis 1900 herangereift sind, haben mich auf die Kritik einiger Probleme geführt, die sich auf die logische und psychologische Entwickelung der wissenschaftlichen Erkenntnisse beziehen. Dies sind die hier behandelten „Probleme der Wissenschaft".

Der Plan des Werkes (mit Ausnahme des letzten Kapitels) kann seit dem Jahre 1901 als festgestellt betrachtet werden. In diesem Jahre begann ich meine Ansichten über den Gegenstand in verschiedenen Vorlesungen und Vorträgen auseinanderzusetzen. Die äußere Anordnung des Stoffes hat nach dieser Zeit nur unwesentliche Verbesserungen erfahren.

Es ist schwer, die allgemeine Tendenz der Behandlungsweise des Themas mit Bezug auf die philosophischen Schulunterscheidungen zu definieren. Ich möchte sie als zugleich kritisch und positivistisch charakterisieren; denn ich glaube wirklich, diese philosophischen Richtungen, die mich zuerst zum Nachdenken angeregt haben, klarer und wissenschaftlicher auszulegen und ohne eklektischen Kompromiß zu versöhnen; aber ich verhehle mir nicht die tiefen Unterschiede, welche die in diesem Buche dargelegten Gedanken von denjenigen trennen, die unter dem Namen des „kritischen Positivismus" kursieren. Schon die Lektüre des ersten einleitenden Kapitels genügt, um das zu zeigen.

Welche Gegenstände in den verschiedenen Teilen des Buches behandelt werden, kann man aus den Über-

339958

schriften ersehen, die auch im Inhaltsverzeichnis aufgeführt sind. Das verknüpfende Band zwischen so weit auseinanderliegenden Themen besteht in dem Überblick über das Ganze des wissenschaftlichen Fortschritts, den wir unter Herbeiziehung zahlreicher Beispiele induktiv zu erklären versucht haben.

Die Analyse des Begriffs der Wirklichkeit erweitert sich im zweiten Kapitel zu einer Kritik der Begriffe „Tatsache" und „Theorie", welche zur Scheidung des positiven Gehalts der Wissenschaft von den in ihr enthaltenen subjektiven Elementen dient.

Aus dieser Analyse ergeben sich zwei Reihen von Problemen, die nacheinander eingehend behandelt werden: nämlich diejenigen, welche sich auf die logische Umformung der Begriffe beziehen, die als Ergebnis einer psychologischen Entwickelung und als Werkzeug der Erkenntnis betrachtet wird (Kap. III), und diejenigen, welche die Bedeutung und die Bildung der allgemeinsten Begriffe wie Raum, Zeit, Bewegung usw. betreffen (Kap. IV, V).

Im VI. Kapitel werden die Fragen der theoretischen Physik einer Prüfung unterzogen unter dem Gesichtspunkt einer Kritik der mechanistischen Naturphilosophie. Hieran schließen sich einige Bemerkungen über die Ausdehnung der mechanistischen Erklärung auf die Lebenserscheinungen.

Wir haben in diesem Buche unseren Begriff der Wissenschaft nicht im Zusammenhange eines allgemeinen philosophischen Systems entwickelt.

In den Rahmen unserer Untersuchung gehören nicht die Beziehungen zwischen *Wissen* und *Wollen* außer derjenigen, die in der Definition der Wissenschaft selbst enthalten ist. Daher wird ihr *Wert* von uns postuliert und alle Werturteile über sie sind von unserer Kritik ausgeschlossen.



Dennoch halten wir das Wissen nicht für einen Zweck an sich. Wir sehen wohl, daß das Wort *„Die Wissenschaft für die Wissenschaft!"* vom sozialen Standpunkte aus eine leere Formel ist und so anderseits die Wissenschaft dem Willen zwar die *Mittel*, aber nicht die *Zwecke* des Handelns zeigen kann, daß es also ungereimt ist, in der Wissenschaft *praktische Gesetze des Lebens* zu suchen.

Wir meinen jedoch, daß der Wille zur Wissenschaft, abgesehen von dem utilitarischen Zwecke, den er verfolgt, sich selbst einem moralischen Gesetze unterwirft, sofern er die Unabhängigkeit der Wahrheit von unserem Fürchten und Wünschen anerkennt und so beiträgt zur Entwickelung der ganzen menschlichen Persönlichkeit, des Gewissens und der Macht eines Willens, der fähig ist, den Blick über die vergänglichen Schranken der Gegenwart zu höherem künftigen Fortschritt zu erheben.

Das Vertrauen auf diese Philosophie der Wissenschaft hat mich veranlaßt, die Gefilde der Geometrie, wo der Gedanke in der Sicherheit erworbenen Besitzes ruhig dahinlebt, mit dem Kampfplatz zu vertauschen, auf dem um die ersten Anfänge einer Erkenntnistheorie gekämpft wird, über die sich die Gelehrten verständigen könnten und die es möglich machen würde, die verschiedenen Wissensgebiete zu dem gemeinsamen Fortschritt der Erkenntnis zusammenzuführen.

So kam ich darauf, ein Buch zu schreiben, das, indem es dergestalt weit auseinander liegende Dinge und Probleme in Beziehung setzt, von dem, was man bei unseren Gelehrten gewohnt ist, einigermaßen abweicht und deshalb im Publikum begreiflichem Mißtrauen begegnen muß.

Dem kann ich nur das Bewußtsein 15jähriger Arbeit entgegenhalten. Wo sich aber dennoch Bildung und Verstand dem kühnen Unternehmen nicht gewachsen zeigen, da möchte ich die Hoffnung aussprechen, daß die

Anstrengung keine vergebliche war, sondern daß die Idee der geeinigten Wissenschaft die Bemühungen der Männer, die auf getrennten Wegen der Eroberung der Wahrheit zustreben, zu einem höheren Ziele verbrüdern möge.

Möge diese Idee über die methodischen und materialen Unterschiede als ein Leuchtturm des Fortschritts sich erheben. Möge sie vorzüglich den Italienern den Weg beleuchten, auf daß das Werk der Renaissance, das unsere Väter begonnen haben, sich fortsetze in der vollen und harmonischen Entfaltung des Nationalgeistes.

Bologna, Januar 1906.

**Der Verfasser.**

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort . . . . . III

Kapitel I. **Einleitung.**

§ 1. Besondere Probleme und allgemeine Ideen in der Wissenschaft . . . . . 1
§ 2. Wissenschaft und Philosophie . . . . . 4
§ 3. Der agnostische Verzicht . . . . . 6
§ 4. Die sogenannten unlösbaren Probleme . . . . . 8
§ 5. Die Quadratur des Kreises . . . . . 8
§ 6. Das perpetuum mobile . . . . . 11
§ 7. Die Alchimie . . . . . 12
§ 8. Das Erkenntnisproblem . . . . . 13
§ 9. Die Gefahren der Sprache . . . . . 16
§ 10. Absolut und Relativ: das Absolute in der Bewegung . 17
§ 11. Das Absolute in der Moral . . . . . 19
§ 12. Was ist das Absolute in einem transzendenten Sinne? 21
§ 13. Die transzendenten Prozesse und die physiologische Psychologie . . . . . 22
§ 14. Die transzendenten Prozesse in der Analysis des Unendlichen . . . . . 23
§ 15. Der psychologische Wert des Absoluten . . . . . 26
§ 16. Wesen und Schein . . . . . 29
§ 17. Das Unbekannte . . . . . 31
§ 18. Der Unterschied zwischen Subjektiv und Objektiv nach KANT . . . . . 32
§ 19. Der Unterschied zwischen Subjektivem und Objektivem positiv betrachtet . . . . . 34
§ 20. Das Subjektive und Objektive bei der Messung . . . 38
§ 21. Subjektives und Objektives im Aufbau der Wissenschaft 43
§ 22. Kritik des Positivismus . . . . . 45
§ 22a. Positivismus und Metaphysik . . . . . 46

Seite

§ 23. Physikalischer Positivismus . . . . . 50
§ 24. Biologischer Positivismus . . . . . 55
§ 25. Psychologischer Positivismus . . . . . 65
§ 26. Der Positivismus in Geschichte und Soziologie . . 68
§ 27. Die positiven Ziele, die man einer Theorie der Wissenschaft stecken kann . . . . . 70
§ 28. Die Methoden: die geschichtliche, die psychologische, die wissenschaftliche . . . . . 74

## Kapitel II. Tatsachen und Theorien.

§ 1. Traum und Wirklichkeit . . . . . 81
§ 2. Sinnestäuschungen . . . . . 82
§ 3. Das Kriterium der Wirklichkeit . . . . . 84
§ 4. Die Voraussetzungen im Begriff der Wirklichkeit . . 87
§ 5. Die Wirklichkeit des Vergangenen . . . . . 90
§ 6. Die psychische Wirklichkeit . . . . . 93
§ 7. Die soziale Seite der Wirklichkeit . . . . . 94
§ 8. Die Halluzinationen . . . . . 95
§ 9. Die biologische Bedeutung des Glaubens an die Wirklichkeit . . . . . 98
§ 10. Das Postulat der Erkenntnis . . . . . 99
§ 11. Unbearbeitete und wissenschaftliche Tatsachen . . . 101
§ 12. Die physikalischen Tatsachen . . . . . 102
§ 13. Tatsache und Gesetz . . . . . 104
§ 14. Die Tatsachen der Astronomie . . . . . 107
§ 15. Die chemischen Tatsachen . . . . . 110
§ 16. Die Tatsachen der Naturwissenschaften . . . . . 111
§ 17. Die geschichtlichen Tatsachen . . . . . 115
§ 18. Die der wissenschaftlichen Erkenntnis zugrundeliegenden Annahmen . . . . . 120
§ 19. Der Wert der wissenschaftlichen Erkenntnis . . . 123
§ 20. Erkenntnis durch Begriffe . . . . . 124
§ 21. Empirismus und Rationalismus . . . . . 125
§ 22. Die Erwerbung der Erkenntnisse . . . . . 127
§ 23. Wissenschaftliche Theorien . . . . . 130
§ 24. Die Theorie der Gravitation . . . . . 131
§ 25. Kritik der Theorien . . . . . 137
§ 26. Poissons elektrostatische Theorie . . . . . 139
§ 27. Die Theorie der Lösungen . . . . . 144
§ 28. Die Ökonomie und die psychologische Entwickelung der Theorien . . . . . 149



## Kapitel III. Die Probleme der Logik.

### A. Die reine Logik.

Seite

§ 1. Reale und formale Logik . . . . . 153
§ 2. Wortschemata und Zeichen . . . . . 158
§ 3. Die symbolische und die psychologische Logik . . 162
§ 4. Die Möglichkeit der formalen Logik, abgeleitet aus der Entwickelung der Mathematik . . . . . 164
§ 5. Kritik der Definition . . . . . 166
§ 6. Real- und Nominaldefinitionen . . . . . 171
§ 7. Die implizite Definition . . . . . 173
§ 8. Beispiele: Die physikalisch gegebenen Begriffe . . 177
§ 9. Die psychologisch gegebenen Begriffe . . . . . 178
§ 10. Das logische Verfahren: die Problemstellung . . . 180
§ 11. Logische Operationen . . . . . 183
§ 12. Rein logische Begriffe . . . . . 184
§ 13. Elementare Typen der Definition . . . . . 185
§ 14. Konstruierte logische Beziehungen und Axiome . . 187
§ 15. Aussagen . . . . . 190
§ 16. Gegebene logische Beziehungen . . . . . 190
§ 17. Bedingungen der Möglichkeit der Begriffe: logische Grundsätze . . . . . 193
§ 18. Vereinbarkeit der Postulate einer Theorie . . . . 195
§ 19. Die Grundlagen der Arithmetik . . . . . 199

### B. Die Anwendung der Logik.

§ 20. Fundamentale Probleme . . . . . 202
§ 21. Logische Darstellung und das Postulat der Erkenntnis 204
§ 22. Substanz: Materie und Energie . . . . . 206
§ 23. Ursache . . . . . 210
§ 24. Zusammenfassung . . . . . 215
§ 25. Der reale Wert der logischen Grundsätze . . . . 216
§ 26. Der Wert der Axiome: die objektive Gültigkeit der Logik 218
§ 27. Die Grenzen der Anwendung der Logik . . . . . 220
§ 28. Das Problem der Bestätigung . . . . . 223
§ 29. Die Bestätigung der expliziten Hypothesen . . . . 224
§ 30. Die Experimente im Unstetigen . . . . . 227
§ 31. Experimente im Stetigen . . . . . 229
§ 32. Schlüsse über die Deutung der Experimente . . . 232
§ 33. Das Postulat der Stetigkeit und die psychologische Vorstellung der Ursachen: wie und warum? . . 234

Seite

§ 34. Sicherung und Bestätigung der impliziten Hypothesen 238
§ 35. Beispiele . . . . . 241
§ 36. Die Krisis in der zeitgenössischen Volkswirtschaftslehre 241
§ 37. Schlüsse: der circulus vitiosus der Wissenschaft . . 247

C. Die physiologische Seite der Logik.

§ 38. Stellung des Problems . . . . . 250
§ 39. Grundlegende Hypothesen . . . . . 252
§ 40. Erklärung der Axiome . . . . . 256
§ 41. Über die Vorstellung der Ursachen . . . . . 257

Kapitel I.

# Einleitung.

## § 1. Spezielle Probleme und allgemeine Ideen in der Wissenschaft.

Wer sein Leben der Wissenschaft widmet, gerät in eine doppelte Verlegenheit.

Will er an dem Fortschritt der Wissenschaft mitarbeiten, so muß er sich zunächst vorbereiten durch ein geduldiges Studium der tausend Einzelheiten, welche die Technik ausmachen; er muß die Ergebnisse kennen lernen, welche die unzähligen Gelehrten gefunden haben, deren Untersuchungen auf das gleiche Ziel gerichtet sind; er muß sich ihre Begriffe aneignen und sie einer erneuten Kritik unterwerfen.

Diese Arbeit nimmt die Kraft des Forschers so sehr in Anspruch, daß er nur wenig Zeit darauf verwenden kann, einen Blick auf die anderen Zweige der Wissenschaften zu werfen, die sich neben ihm entwickeln.

Und dennoch drängt sich ihm auch diese Notwendigkeit auf.

Wenn er so einerseits spezielle Probleme bearbeiten muß, so kann er es andererseits doch nicht vermeiden, die Ziele dieser Untersuchungen einer Beurteilung zu unterwerfen, indem er von einem allgemeinen Gesichtspunkte ein weiteres Feld der Wissenschaft überschaut.

Diese doppelte Anforderung erzeugt jenen Zwiespalt der Neigungen, der sich in unserem Produktionssystem als Zeit- und Arbeitsverschwendung äußert und unter dem die intellektuelle Gesellschaft leidet.

Der größte Teil der Forscher verschließt sich, wenn ihm die geeignete Leitung fehlt, in einem engen Kreise

und verfällt in blinden Empirismus; andere verlieren sich in die Regionen verworrener Allgemeinheit. Nur wenige überragende Geister finden von selbst den richtigen Weg, und diese müssen oft durch eigene Arbeit das gewinnen, was sie von dem Werke ihrer Mitarbeiter hätten erwarten können.

Aber das heroische Zeitalter eines DESCARTES oder LEIBNIZ, deren Genius sich alle Pforten der Wissenschaften öffneten, scheint für immer vorbei zu sein.

Die Eroberungen der Vergangenheit lasten auf der Gegenwart und der Zukunft. Und wenn man hoffen darf, daß einstmals eine glücklichere Verwendung der Geisteskräfte der heutigen Verwirrung ein Ende setzen werde, so ist nicht anzunehmen, und eigentlich auch nicht zu wünschen, daß wir zu jenem Zustande zurückkehren werden, wo die Wissenschaft das Werk einiger weniger genialer Menschen war. Den vereinten Kräften von Tausenden wird es gelingen, die Steinmassen zu heben, die den Schultern des Riesen zu schwer waren!

Es ist nur nötig, die Organisation der Arbeit zu vervollkommnen, und das läßt sich unter einer freiheitlich gesinnten Regierung durch eine passende wissenschaftliche Erziehung erreichen.

Dazu aber ist notwendig, daß alle die Männer, die in irgendeinem Zweige der Wissenschaft bewandert sind, auch Verständnis für die allgemeinen, der Wissenschaft gesteckten Ziele besitzen.

Dann werden sie sich die Hand reichen und einander in herzlichem Einverständnis unterstützen. Die getrennten Bemühungen der einzelnen werden ersetzt durch die rationellere Arbeit wissenschaftlicher Gesellschaften.[1])

1) Es fehlt nicht an Anzeichen dafür, daß das Bedürfnis nach Zusammenschluß sich unter den Gelehrten immer mehr geltend macht. Ich möchte dafür das gewichtige Zeugnis zitieren, das E. PICARD in seinem glänzenden Berichte über den allgemeinen Zustand der Wissenschaften ablegt, der bei Gelegenheit der Pariser Ausstellung im Jahre 1900 veröffentlicht wurde.



Auch für die überragenden Geister wird in einer solchen Organisation der Produktion Platz sein. Ja, befreit von dem Zwange, ihr Forschertalent durch Erwerbung einer zu sehr ins Einzelne gehenden Bildung zu ersticken, werden sie von der Allgemeinheit mehr Nutzen haben und ihr daher auch besser dienen; sie werden als Organisatoren mannigfaltige Untersuchungen mit den allgemeinen Zielen der Wissenschaft in Verbindung bringen und dadurch die Möglichkeit gewinnen, das Ganze weiter und genauer zu übersehen.

Aber vielleicht verlieren wir uns in ein Traumbild der dichterischen Einbildungskraft, wenn wir uns das Bild einer idealen Organisation der wissenschaftlichen Produktion vorstellen?

Sicherlich braucht man sich nicht die Schwierigkeiten zu verhehlen, die sich uns in den Weg stellen; dennoch können sie uns das Vertrauen auf den Fortschritt nicht rauben, der sich, wenn auch zweifellos langsam, vollziehen wird und der auf allen Gebieten zu höheren Formen des sozialen Lebens führen muß.

Das Ziel, dem wir heute zustreben müssen, ist eine wissenschaftliche Erziehung, die demjenigen, der auf irgendeinem Gebiete arbeitet, das Verständnis dafür vermittelt, wie sich der Gegenstand seiner Untersuchung allgemeineren Problemen unterordnet.

Man muß in den Geistern Verständnis erwecken für eine höhere Harmonie, in der sich die scheinbaren Gegensätze aufheben.

Nichts ist so gefährlich, als sich in einen Kreis einzuschließen, aus dem durch eine strenge Logik alles das ausgeschlossen wird, was mit einer eng begrenzten Erfahrung nicht übereinstimmt.

## § 2. Wissenschaft und Philosophie.

Die soeben hervorgehobenen Ziele stehen in deutlicher Beziehung zu dem Einfluß, den die Philosophie auf die Wissenschaft ausüben soll. Denn im Grunde ist ja die Philosophie nichts anderes als der Ausdruck eines Strebens nach Einheit und Allgemeinheit in unserer Erkenntnis, wenngleich dieses Ziel auf sehr verschiedenen Wegen verfolgt wird.

Aber wenn sie ihrer Mission nicht in dem Maße gerecht wird, wie es notwendig wäre, so muß der Grund dafür in der Lage der Dinge gesucht werden, die am Anfang des verflossenen Jahrhunderts zu jenem verhängnisvollen Zwiespalt führte, der noch heute die Philosophen von den Vertretern der strengen Wissenschaft trennt. Wir beabsichtigen nicht hier die Gründe dieses Zwiespalts zu untersuchen, denn wir möchten die alten Anklagen nicht zu einer Zeit erneuern, wo auf beiden Seiten die Anzeichen einer erfreulichen Wiederannäherung sich bemerkbar machen.

Wir wollen nur bemerken, daß das Urteil der Vertreter der Wissenschaft, das den Mangel an Klarheit und Genauigkeit, der gewissen nebelhaften Ausdrucksweisen des spekulativen Gedankens eigen ist, in sachlicher Weise verbessern sollte, jede Bedeutung verliert, wenn es zugleich mit denen, die die Leerheit ihrer Gedanken durch eine dunkle Sprache zu verbergen suchen, diejenigen verdammt, die vielleicht in einen unvermeidlichen Irrtum der Methode verfallen, die aber nichtsdestoweniger bestrebt sind, die Einheit in der Mannigfaltigkeit und im Unbestimmten das Bestimmbare zu finden.

Und die Kritik verliert um so mehr an Wert, wenn sie, nicht zufrieden, den Philosophen zu treffen, sich gegen die Philosophie selbst wendet und ihrem schwankenden Kartenhaus das festgegründete Gebäude der Wissenschaft gegenüberstellt. Einen solchen Vorwurf kann nur jemand erheben, der nicht begriffen hat, daß das philosophische Denken gar nicht einzelne wohl definierte Probleme lösen will, sondern daß es vielmehr eine Tendenz des menschlichen Geistes repräsentiert, die dem Gebäude der Wissenschaft sozusagen den Stil verleiht, an den es sich in verschiedener Weise bei seinem fortschreitenden Aufbau anpaßt.



Das strenge Urteil der Gelehrten, von dem wir oben sprachen, wendet sich um so schärfer gegen jene Philosophie der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, die, gespeist aus den frischen Quellen des modernen Gedankens, sich zügellos zu den höchsten Gipfeln des Abstrakten emporschwang.

Gestützt auf die bündige Verurteilung eines Auguste Comte kam die positive Wissenschaft zu der Meinung, daß dort nicht um Gedanken, sondern nur um leere Worte gestritten werde. Anstatt sich darauf zu beschränken, die Metaphysik der modernen Systeme als eine zur Behandlung gewisser Probleme ungeeignete Methode zu verwerfen, ging man so weit, sogar die Existenz der Probleme zu bestreiten, die jene Spekulation zum Gegenstande hat.

So zollt manch einer der negativen Seite von Comtes Philosophie die höchste Anerkennung, ohne eine Ahnung von dem zu haben, was dieser durch Darlegung der allgemeinen Resultate der Wissenschaft geleistet hat und dessen Frische wir heute nach 60 Jahren noch bewundern müssen. Einem solchen Verdammungsurteil entgeht nichts, was Gegenstand klassischer Untersuchungen war, und es scheint ohne Prüfung, als ob all jene Arbeit umsonst verschwendet war, sintemalen sie Dinge erkennen wollte, die nie und in keinem Sinne Gegenstand der Erkenntnis werden können.

## § 3. Der agnostische Verzicht.

Man hat mit Recht bemerkt, daß dieses Verhalten der Geister gegenüber gewissen überkommenen Fragen auf einem bestimmten, für die Seele des modernen Menschen charakteristischen Zustande beruht. Scheint es doch, als verspräche jener Agnostizismus, der kritische sowohl als der dogmatische, auf den alle Wege der Spekulation im vergangenen Jahrhundert einmündeten, der ganzen menschlichen Gesellschaft den Frieden.

Es ist wenig mehr als 30 Jahre her, daß ein berühmter Physiologe (Du Bois Reymond) diesem Agnostizismus öffentlich Ausdruck gab. Das ewige „Ignorabimus", in das er ihn zusammenfaßte, lastet seither auf der zeitgenössischen Wissenschaft.

Und neuerdings hat sich eine Bewegung — ein eigentümlicher Rückfall in der Geschichte der Zivilisation — das Wort vom „Bankrott der Wissenschaft" zum Schlachtruf erkoren, in der Absicht, das einleuchtende Prinzip damit zu bezeichnen, daß das Wissen dem Wollen keine Gesetze vorschreiben könne. Nicht umsonst hat man das Phantasiegebilde einer Wirklichkeit heraufbeschworen, die jeder irgendwie gearteten wissenschaftlichen Bestimmung auf ewig entzogen sein sollte!

Aber es gehört nicht in den Rahmen unserer Arbeit, die Folgen einer philosophischen Resignation zu untersuchen, die sich in der Annahme des Unerkennbaren ausdrückt.

Es mag genügen, darauf hinzuweisen, daß sich in unseren Kreisen eine erfreuliche Reaktion gegen diesen modernen Kleinmut regt und zwar in den verschiedensten wissenschaftlichen Lagern.

In der Tat waren diejenigen, die die Kühnheit besaßen, der menschlichen Erkenntnis Schranken zu setzen,



nicht immer so vorsichtig, innerhalb des vagen Gebietes der nicht genau zu definierenden Dinge zu bleiben.

So kam es, daß mehrfach solche Schranken überschritten wurden, woraus erhellte, daß wir mit ebensowenig Recht in bezug auf irgendein Ding unsere künftige Unwissenheit behaupten, wie wir uns im Besitz einer noch nicht erlangten Erkenntnis wähnen dürfen.

Ich möchte als an ein lehrreiches Beispiel daran erinnern, wie die Spektralanalyse nach wenigen Jahren Auguste Comte Lügen strafte, der der Astronomie die Möglichkeit absprach, jemals das Geheimnis der chemischen Zusammensetzung der Himmelskörper zu ergründen.

Andererseits ertragen auch die sichereren Gründe, auf die agnostische Schlüsse sich stützen möchten, nur schlecht den Fortschritt der Kritik. Man kann sie mit gewissen Festungen vergleichen, furchtbaren Kriegsmaschinen, die zu erobern keiner überlegenen Macht gelänge, nur ist es für eine Handvoll Menschen ein leichtes, sie ohne Schwertstreich zu umgehen.

Gerade so verfährt die Wissenschaft, wenn sie die Schwierigkeiten umgeht, die sich ihr in den Weg stellen!

Sie hätte nie ihren heutigen Stand erreicht, wenn sie nicht Form und Ausdruck der Probleme ständig geändert hätte, indem sie das Ziel der Untersuchung den veränderten Bedingungen des Geisteslebens anpaßte. Dieses Verfahren ist in allen Zweigen des Wissens so allgemein üblich, daß ein Skeptiker, der die Dinge von einem besonderen Gesichtspunkte betrachtet, sehr wohl über einen Fortschritt spotten könnte, dem es niemals vergönnt war, die gerade Linie zu verfolgen.

Aber da nichtsdestoweniger die Erkenntnis des Fortschritts sich demjenigen aufdrängt, der die Dinge im ganzen überschaut, so ist es klar, daß die wissenschaftlichen Fragestellungen einen wesentlichen Kern ein-

schließen, der unabhängig ist von der besonderen Art in der sie in einer bestimmten Zeit von denjenigen aufgefaßt werden, die ihnen ihre Aufmerksamkeit zuwenden.

Dieses Wesen einer jeden Frage zu suchen und aufzufinden, ist die Aufgabe des wahren Philosophen, der sich nicht damit begnügt, an der Oberfläche der Dinge haften zu bleiben.

## § 4. Die sogenannten unlösbaren Probleme.

In einem gewissen Sinne gibt es überhaupt keine unlösbaren Probleme, denn jedes Problem entspricht einem wenn auch zuweilen dunklen Gefühl, das befriedigt werden kann durch die Entdeckung irgendeiner neuen Tatsache, welche unsere Macht über die Außenwelt ausdehnt.

Es gibt nur Probleme, die noch nicht ihren richtigen Ausdruck gefunden haben, und oft verlieren wir uns in müßige und sinnlose Streitigkeiten, und entfernen uns von dem wahren Ziele, weil wir es nicht ins richtige Licht zu setzen vermögen und die Antwort auf falsch gestellte Fragen suchen.

Das lehrt deutlich die Geschichte der Wissenschaft, der wir einige lehrreiche Beispiele entnehmen wollen.

## § 5. Die Quadratur des Kreises.

Man braucht weder in der Geometrie noch in der Mechanik oder der Chemie bewandert zu sein, um von einigen berühmten Problemen gehört zu haben, wie der Quadratur des Kreises, dem „perpetuum mobile" oder der Verwandlung der Metalle in Gold, um die sich das Mittelalter auf der Suche nach dem Stein der Weisen so sehr bemühte.



Obgleich solche Probleme gewöhnlich als Beweis für die Ohnmacht des menschlichen Verstandes angeführt werden, der vor unüberwindlichen Schwierigkeiten gedemütigt steht, bieten sie doch Gelegenheit zu interessanten Betrachtungen, die geeignet sind, das Vertrauen auf den wissenschaftlichen Gedanken zu stärken.

Das Problem der Quadratur des Kreises ist das berühmteste unter den drei Rätseln, welche die griechische Geometrie den Anstrengungen ihrer Nachfolger als Erbe hinterlassen hat.

Die Dreiteilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels haben in der Neuzeit schon eine passende Lösung gefunden, nur die Quadratur des Kreises widerstand hartnäckig auch den größten Mathematikern des vorigen Jahrhunderts. Erst vor 24 Jahren wurde die Schwierigkeit überwunden! Aber der Weg, auf dem man zu diesem Resultat gelangte und der Sinn der erhaltenen Lösung sind für unseren Zweck von dem größten Interesse.

„Den Kreis quadrieren" bedeutet — für den, der davon keine genaue Vorstellung haben sollte — „ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat wie ein vorgelegter Kreis." Daß ein solches Quadrat *existiert*, läßt sich leicht aus Gründen der Stetigkeit beweisen, denn die Seite des Quadrates wäre leicht zu konstruieren, wenn man eine Strecke von der Länge des Kreisumfangs hätte.

Diese Bemerkung genügt, um zu zeigen, daß die Lösung des Problems nicht absolut *unmöglich ist.* Und dennoch mußten die 20 Jahrhunderte hindurch beinahe ununterbrochen wiederholten Anstrengungen notwendig an der *Unzulänglichkeit der Mittel* scheitern, mit denen man auszukommen glaubte.

Kein noch so großes Genie hätte den Schlüssel des Geheimnisses finden können, wenn nicht eine neue

Kritik die alten Anschauungen über die *Lösung* geometrischer Probleme geklärt hätte.

*Lineal* und *Zirkel* sind die einzigen Instrumente, die die euklidische Geometrie bei ihren Konstruktionen verwendet. Und wenn man auch mit Wahrscheinlichkeit vermuten darf, daß schon den Griechen Zweifel aufgetaucht seien an der Unzulänglichkeit dieser Mittel für die drei berühmten Probleme, deren sie nicht Herr werden konnten, so fehlten ihnen doch die Mittel, sich mit Hilfe der Analysis darüber zu vergewissern.

Für uns wurde die Sache in ein neues Licht gerückt, seit CARTESIUS die analytische Geometrie begründet hatte. Da zeigte sich der wahre Sinn der Frage, auf die so viele Mühe vergeblich verwandt worden war.

„Kann man, wenn der Durchmesser eines Kreises gegeben ist, *mit Lineal und Zirkel* die Seite des Quadrates konstruieren, das mit dem Kreise gleichen Flächeninhalt hat, oder (was auf dasselbe hinauskommt) kann man eine Strecke konstruieren, die gleiche Länge wie der Kreisumfang hat?"

Auf diese Weise bekam das Wort „konstruieren" einen bestimmten Sinn mit Bezug auf gewisse Instrumente (Lineal und Zirkel), deren man sich ausschließlich bedienen wollte. Dadurch erhielt das ganze Problem ein neues Aussehen.

Wenn die Länge der Peripherie auf diese Weise konstruierbar sein sollte, so mußte die Zahl $\pi$, die ihr Verhältnis zu der des Durchmessers darstellt, gewisse wohl definierte analytische Eigenschaften haben.

Es war daher eine präzise Frage, ob sie diese Eigenschaften besitzt. Man sieht sofort, wie unter dieser Form das Problem eine bestimmte bejahende oder verneinende Antwort zuläßt.

Die Frage wurde im Jahre 1882 von LINDEMANN gelöst. Diesem gelang es, die scharfsinnigen Methoden,



welche HERMITE für das Studium der Zahl $e$, der Basis der natürlichen Logarithmen, erdacht hatte, in glücklicher Weise auf eine größere Menge von Zahlen auszudehnen.

Die *Antwort* ist *verneinend.* Man braucht daher nicht mehr die Quadratur des Kreises durch euklidische Konstruktionen zu suchen; in diesem Sinne ist die Lösung des Problems unmöglich.

Aber, wie wir schon bemerkten, handelt es sich nur um eine Unmöglichkeit in bezug auf die bezeichneten Instrumente.

Da die Lösung existiert, kann es nicht schlechthin unmöglich sein, sie zu finden. Es handelt sich also darum, ein Instrument zu erfinden, das imstande wäre, sie zu liefern und das allen Anforderungen der Praxis genügte.

Von diesem neuen Gesichtspunkte aus kann man sagen, daß eine befriedigende Lösung des Problems in dem *Integraphen* von ABDANK-ABAKANOWICZ gegeben ist, den man gewöhnlich zur Auswertung von Flächeninhalten benutzt.

## § 6. Das perpetuum mobile.

Eine Unmöglichkeit in strengerem Sinne, als bei der Quadratur des Kreises, von der wir oben sprachen, scheint dem Wunsche derjenigen im Wege zu stehen, die sich seit Jahrhunderten bemühen, das perpetuum mobile zu erfinden. Aber das wissenschaftliche Problem, das sich daran knüpft, hat, weit entfernt davon, sich als unlösbar zu erweisen, vielmehr zur Entdeckung eines der obersten Naturgesetze geführt.

Als man die Frage von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus betrachtete, ergab sich, daß die Forderung des perpetuum mobile gleichbedeutend ist mit der Forderung einer bestimmten Beziehung zwischen den dynamischen Elementen, welche imstande sind, eine

Maschine in Bewegung zu setzen und dem Wirkungsgrad dieser Maschine.

Nun folgt aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie eine solche Beziehung, und gerade aus ihr ergibt sich die Unmöglichkeit des perpetuum mobile, wie es in der Regel verstanden wird.

Immerhin fand man, daß, wenn es gelänge, unabhängig von Temperaturunterschieden, Wärme in mechanische Arbeit zu verwandeln, man dadurch zu einer neuen Art von perpetuum mobile gelangen könnte. Man hätte dann nämlich eine Maschine, die fortgesetzt einen Körper Wärme entzöge und in Arbeit verwandelte, während der Körper sich unter die Temperatur der Umgebung abkühlt.

Aber der neuen Forderung, auf welche die Suche nach einem solchen perpetuum mobile *zweiter Art* führte, entspricht auf dem Gebiete der physikalischen Erfahrung der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, der die Möglichkeit einer solchen Verwandlung leugnet. Wie fruchtbar dieses Prinzip war, kann man ermessen, wenn man bedenkt, daß zusammen mit dem Energiegesetz dieses CARNOT'sche Prinzip die Methode geliefert hat, den Wirkungsgrad thermischer Maschinen zu bewerten.

## § 7. Die Alchimie.

Wir haben gesehen, daß das Problem des perpetuum mobile zur Entdeckung eines bei den Verwandlungen der Energie quantitativ unveränderlichen Elementes führte.

Das Resultat hingegen, zu dem die Untersuchungen der Alchimisten führten, war die Unmöglichkeit, mit unseren experimentellen Mitteln die Materie von einem gewissen Punkte an noch weiter qualitativ zu zerlegen. So ordnete sich das Problem, „die Metalle in Gold zu



verwandeln" in einen weiteren Kreis von Fragen ein, aus dem die moderne Chemie entstand.

Die mannigfachen Verwandlungen der Materie, die sich zuerst im Gewande des Wunders darboten, hatten die Phantasie der alten Forscher erregt, so daß ihnen jede Änderung in der Zusammensetzung der Körper als möglich erscheinen mußte. Aber sobald die Kritik der Beobachtungstatsachen in der Vielheit der Erscheinungen „das Gesetz" zu entdecken erlaubte, erhielt das chemische Problem seine wahre wissenschaftliche Gestalt und erweiterte sich zur allgemeinen Untersuchung der Beziehungen und Bedingungen, welche die Veränderung der Materie beherrschen.

Dies ist, kann man sagen, der neue Ausdruck des Problems, das im Geiste der Alchimisten verborgen lag, sofern man wenigstens das dunkle wissenschaftliche Gefühl in Betracht zieht, das ihre Untersuchungen leitete.

Wenn man andererseits die Entwickelung der modernen Wissenschaft betrachtet, so kann man nicht verkennen, wie weit das Ziel des Reichtums, welcher die Sehnsucht der alten Alchimisten bildete, in den Hintergrund getreten ist. Dennoch aber bieten die industriellen Anwendungen der Chemie unseren Zeitgenossen viel reichlicheren und wertvolleren Gewinn als jenen Midasreichtum, den ihnen die Verwandlung der Metalle in Gold hätte bringen können.

## § 8. Das Erkenntnisproblem.

Es war nicht die Gier nach Reichtümern, was die Philosophen angetrieben hat, mit allen Kräften das Problem zu verfolgen, das sich auf die Wirklichkeit und die Erkennbarkeit der Dinge bezieht.

Wenn ihre Anstrengungen Erfolg gehabt hätten, so war ihnen ein einziges Ergebnis verheißen: durch den

philosophischen Zweifel hindurch jenes sichere und natürliche Vertrauen der Menschen wiederzufinden, welches unberührt jenseits aller Kritik steht.

Aber gerade die logisch schärfsten Geister, die sich auf diesen Weg begaben, schienen zu gerade entgegengesetzten Resultaten zu kommen: nichts verbürgt jene angebliche Wirklichkeit, zu der zu gelangen uns kein Mittel verliehen ist; nur die Vorstellung ist wahr, und das Ich bleibt unbestrittener Herrscher in einer Welt, die sich um dasselbe bewegt.

Merkwürdige Folgerungen! Man könnte wahrlich leicht die Antwort darauf geben, die Diogenes dem Zeno gab, als dieser ihm beweisen wollte, daß es keine Bewegung gebe; der Zyniker erhob sich vom Boden, wo er gesessen hatte, und begann schweigend auf und ab zu wandeln.

Gerade so antwortet die positive Philosophie dem metaphysischen Idealismus, indem sie auf die Tatsachen hinweist, die die Wissenschaft gesammelt hat.

Die Selbstüberhebung des Geistes, der sich Alleinherrscher in einer Traumwelt wähnt und in seinem eigenen Innern ihre Gesetze entdecken will, widerlegt sie durch den Hinweis auf eine Wirklichkeit, die sich täglich erweitert und sich von uns entfernt und die der eitlen Bemühungen spottet, sie unseren Meinungen oder unserm Willen zu unterwerfen.

Aber eigentlich sind Scherze stumpfe Waffen im Kampfe gegen die Philosophen. Und wer sich damit begnügt, sie zu verlachen, verdient vielleicht, an das Sprichwort erinnert zu werden: „risus abundat in ore stultorum."

Da es sich um gebildete Männer handelt, so ist es sicher weiser, sie zu verstehen zu suchen und aus ihren Irrtümern zu lernen. Denn eine absurde Schlußfolgerung kann den Gang der Wissenschaft nicht aufhalten, und



ein Irrtum, den man nur von der lächerlichen Seite betrachtet, wäre eine verlorene Gelegenheit, etwas zu lernen.

Wie kann man an dem zweifeln, was für jeden Menschen seit der frühesten Kindheit das Gewisseste ist?

Vielleicht gelingt es nicht, das zu verstehen, wenn man sich nicht in der Phantasie zurückversetzt in jene fast aus der Erinnerung entschwundene Zeit, wo Traum und Wirklichkeit zusammenfließen, und wo das Bild, das der Spiegel zurückwirft, ebenso wirklich erscheint wie die Person, die davorsteht.

Da Wahrheit und Irrtum in unseren Geist beide durch die Pforte eintreten, die die Sinne der Erkenntnis öffnen, so sehen wir uns sehr bald gezwungen, uns in acht zu nehmen, um nicht durch Illusionen getäuscht zu werden.

Gerade aus diesem Wunsch des Menschen, nicht getäuscht zu werden, entspringt das Erkenntnisproblem!

Es handelt sich immer und einzig darum, die Wirklichkeit erkennen zu lernen trotz der tausend Fehlerquellen, die unsere Beobachtung fälschen.

Man muß also einen relativen Unterschied feststellen.

Der metaphysische Idealismus dagegen verlor, indem er dem Trugbild eines eingebildeten Absoluten folgte, diese Relativität aus den Augen und führte uns dadurch auf den Punkt zurück, von dem wir ausgegangen waren, nämlich zu der Verwechselung von Traum und Wirklichkeit. Ob man dem einen den Namen der anderen gibt oder umgekehrt, macht keinen wesentlichen Unterschied.

Es kommt auf Bergtouren zuweilen vor, daß man nicht genau weiß, wie weit das Ziel noch entfernt ist. Steigt man dann den felsigen Abhang eines Vorberges empor, so glaubt man es wohl zum Berühren nahe, aber hinter diesem Berge öffnet sich dem Blicke unver-

hofft ein neues Tal. Wir müssen vorsichtig wieder hinuntersteigen und nach einem mehrstündigen ermüdenden Marsche befinden wir uns vielleicht nicht höher als am Ausgangspunkte. Aber Zeit und Mühe waren nicht vergebens aufgewendet; denn wenn auch jetzt bei erweitertem Horizonte der Gipfel weiter erscheint, so haben wir uns ihm in Wirklichkeit doch genähert, indem wir ein Hindernis überwanden, das ihn unseren Augen verbarg. Man darf nur nicht den Mut verlieren und in einem schwachen Augenblick die Flinte ins Korn werfen.

Der Kampf beginnt von neuem, mit einer Willensanstrengung! Und wenn der Abhang auch steil ist, wenn auch ungeheure Risse, vom Schnee verborgen, sich unter unseren Füßen auftun, wir wollen doch vorsichtig hinaufklimmen, indem wir uns aneinander festhalten, wir wollen uns an das Seil binden und uns die Hände reichen!

So kann man bildlich von dem metaphysischen Idealismus sagen: Wenn er den steilen Hügel des erträumten Absoluten erstiegen hat, steht er vor einem tiefen Abgrunde und jenseits erstrahlt die Wirklichkeit, die er erreichen wollte. Wir aber sind diesem wirklichen Ziele näher, denn wir haben uns die relative Natur der Frage klar gemacht.

Mögen also alle, die den guten Willen haben, sich einer momentanen Schwäche erwehren und sich vereinigen, um mit neuer Kraft die neuen Schwierigkeiten zu überwinden, die sich unseren Augen darbieten!

## § 9. Die Gefahren der Sprache.

Man muß vor allem die Fehler der Vergangenheit vermeiden. Deshalb muß bemerkt werden, daß die Sprache, deren wir uns bedienen, um unsere Gedanken



auszudrücken, letzten Endes ein System zur symbolischen Bezeichnung der Dinge ist. Dadurch, daß sie schrittweise zum Ausdruck allgemeinerer Tatsachen emporsteigt, liefert sie uns ein einfaches Schematisierungsverfahren und erlaubt uns dadurch abstrakte Begriffe zu erörtern, die sich weit von der Wirklichkeit entfernen, welche unmittelbar unter unsere Sinne fällt.

Aber der Gebrauch dieses mächtigen Werkzeuges, das unserem schwachen Verstande zu Hilfe kommt, ist nicht frei von Gefahren. Wer seinen Flug in die luftigen Höhen des Gedankens nimmt, läuft Gefahr, die Bedeutung der Worte zu vergessen, die sinnlos werden, wenn sie aufhören die Dinge zu bezeichnen. Wenn man an diesem Punkte angelangt ist, dann ist nichts leichter als formal mit den Symbolen zu operieren, aber die Entwickelung des Gedankens, die ja nach Allgemeinheit strebt, wird dann nicht mehr gezügelt durch die konkrete Welt, der sie sich entfremdet hat.

Wenn man sich also nicht in sinnlose Träume verlieren will, so darf man nicht die oberste *Bedingung der Positivität* vergessen, daß nämlich ein Urteil, falls es eine Erkenntnis enthalten soll, immer in letzter Linie besondere oder allgemeine Tatsachen bejahen oder verneinen muß.

## § 10. Absolut und relativ: das Absolute in der Bewegung.

Diese Bemerkungen werfen ein helles Licht auf die klassischen Argumente, mit denen man die Existenz von etwas *Absolutem* beweisen will, das sich für alle Zeiten unserer Erkenntnis entzieht.

In der Sprache kommt das Wort „absolut" im Gegensatz zu „relativ" vor. Die Bedeutung des Wortes läßt sich leicht aus dem Gebrauch entnehmen, den man

gewöhnlich in bezug auf irgendeinen Gegenstand davon macht.

Wenn wir in einem Wagen fahren, so sehen wir die Bäume an uns vorbeieilen und sagen dann, daß sie sich relativ zu uns bewegen; aber in absolutem Sinne stehen die Bäume still, und der Wagen, in dem wir fahren, bewegt sich.

Dieses Absolute wird selbst wieder etwas Relatives, wenn man es vom Standpunkte der Astronomie betrachtet. Die Bäume werden von der Erde getragen, die sich um die Sonne bewegt.

Aber auch die Sonne scheint eine eigene Fortschreitungsbewegung zu besitzen, relativ zu den entsprechenden Fixsternen, deren gegenseitige Ortsveränderungen man während einer nicht zu langen Zeit vernachlässigen kann.

Nichtsdestoweniger haben über lange Zeiträume ausgedehnte Beobachtungen gezeigt, daß auch diese zu Unrecht „Fixsterne" genannten Gestirne sich relativ zueinander bewegen. Ihre Entfernungsänderung muß ungeheuer sein, wenn die Änderung der Winkel merkbar ist, unter denen sie von einem so entfernten Punkte wie unserer Erde aus gesehen werden.

Es ergibt sich also, daß eine Bewegung, die in einem bestimmten Tatsachenzusammenhang als absolut erscheint, sich in einem weiteren Gebiete als relativ herausstellt. Es handelt sich um ein Absolutes, das verschiedener Grade fähig ist, und das dem Bedürfnis der Wissenschaft entspricht, einen festeren Stützpunkt zu suchen.

Wir wollten nur ein Beispiel anführen, ohne die Diskussion bis zu der Grenze zu verfolgen, die man bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse erreichen kann.

Wir werden noch Gelegenheit haben, das Problem zu erörtern, welches der absoluteste Sinn ist, den wir der Bewegung beilegen können. Aber es wird sich immer



darum handeln, dem Wort „absolut" eine relative Bedeutung von größerer Ausdehnung zu geben, die der Gesamtheit der bekannten mechanischen Beziehungen besser entspricht.

## § 11. Das Absolute in der Moral.

Wählen wir ein zweites Beispiel aus einem ganz anderen Gebiet.

Wer einen Zweck *will*, *muß* wenigstens eins der Mittel wollen, die zu ihm führen. In diesem Sinne erscheint das Gefühl der Notwendigkeit unter den Motiven eines jeden Willens, sei er nun gut oder schlecht.

Zu dieser Art von Pflicht gegen sich selbst gesellen sich ähnliche gegen die Gesellschaft, die, wenn auch erworben durch den suggestiven Einfluß Anderer, sich nur verstehen lassen als gefordert mit Rücksicht auf einen stillschweigend anerkannten Zweck, sei es auch nur durch den Willen einer sozialen Gemeinschaft, anstatt durch den eigenen.

Nun macht die Moral einen Unterschied zwischen solchen Pflichten, sie setzt den „absoluten Pflichten" die „relativen" entgegen, und sie gibt zu, daß die Schwierigkeit der Handlung die Nichterfüllung von diesen rechtfertigen könne, behauptet aber, daß ein solches Motiv uns in keiner Weise der Mühe überhebt, jene zu erfüllen. Warum?

Weil es sich um ein Sollen handelt, das sich auf allgemeine Zwecke bezieht, deren stete Verfolgung für die menschliche Gesellschaft mehr Wert hat als alle noch so großen vorübergehenden Opfer oder Schädigungen.

Aber der Wert des Zweckes, der absolute Bedeutung gegenüber gewissen Beweggründen hat, erscheint seinerseits relativ im Verhältnis zu anderen Zwecken derselben Ordnung. Die Pflicht, welche Erfüllung heischt,

ohne Rücksicht auf die Opfer oder den Schaden des Handelnden, verlangt nicht ebenso die Unterordnung anderer Pflichten; der Zweck heiligt nicht die Mittel. Und der moralische Konflikt kann nur gelöst werden durch eine vergleichende Bewertung der in Frage stehenden Ideale und durch ihre Unterordnung unter irgendein höheres Ideal.

Aber kein Ideal ist das höchste, und der höchste Zweck, der innerhalb einer bestimmten Gemeinschaft und zu einer bestimmten Zeit absolute Geltung hat, wird relativ, wenn man ihn mit der Moral anderer Völker unter anderen Lebensbedingungen vergleicht.

Man wird vielleicht einwenden, dieses absolut höchste Ideal sei die Gerechtigkeit.

In der Tat drückt in jedem Augenblick und auf jeder Stufe der sozialen Entwickelung die humane Idee der Gerechtigkeit die höchste Synthese der Werturteile aus; aber sind nicht diese Urteile selbst zu jeder Zeit einer Ausdehnung auf einen weiteren Kreis von Beziehungen fähig? Und folgt daraus nicht, daß ihr allgemeinster und abstraktester Ausdruck niemals als erreicht angesehen werden kann?

Der absolute Wert in der Moral bedeutet also nichts anderes als eine erweiterte Relativität. Diese Feststellung drängt sich jedem auf, der die Moral wissenschaftlich als eine Tatsache betrachtet, unabhängig von jeder möglichen Rücksicht auf Schaden oder Vorteil, die daraus entstehen könnten. Aber die Gefahr des gefürchteten Schadens besteht nicht für den, der dies Übergewicht im Auge behält, welches die ethischen Zwecke über die Motive der individuellen Handlungen haben. Denn das ist das einzige praktisch Wichtige, was durch ein solches Absolutes ausgedrückt wird. Übrigens trägt die Behauptung, daß die Moral relativ sei, selbst dazu bei, die Kriterien unserer Urteile und



unseres Verhaltens zu veredeln, besonders bei den Beziehungen zwischen verschiedenen Völkern unter verschiedenen Lebensbedingungen. Nichts ist ungerechter als den Maßstab unserer Moral an Menschen anzulegen, die uns unähnlich sind; und der absurde Anspruch, dies auf Grund einer natürlichen Überlegenheit zu tun, würde dem Philosophen leichten Grund zum Spotte geben, wenn seine praktischen Folgen nicht bitterere Gedanken erweckten.

## § 12. Was ist das Absolute in einem transzendenten Sinne?

In den vorangehenden Beispielen erscheint das Absolute, dem üblichen Sprachgebrauch entsprechend, als eine tiefere und weiter von uns entfernte Relativität.

Allerdings lehrt uns in einem solchen Falle ein unbestimmtes Gefühl, daß das Wort nicht in seiner strengen Bedeutung gebraucht ist. Aber in der Regel nimmt man sich nicht die Mühe, diese erweiterte Bedeutung zu bestimmen, die dem Worte in unbestimmter Weise untergelegt wird.

Prüfen wir nun, was das Wort für die Philosophie geworden ist.

Da es im Relativen Grade gibt, so gibt man vor, in einer unendlichen Reihe bis zum Ende aufzusteigen, um etwas zu erreichen, das unter keinem Gesichtspunkte mehr relativ ist und deshalb im eigentlichen Sinne als absolut bezeichnet werden kann.

In einer unendlichen Reihe von Stufen bis zum Ende aufsteigen? Der Widerspruch in diesem Vorhaben leuchtet ein. Aber das offenbar Absurde ist unvermeidlich vermöge einer im menschlichen Geist festgewurzelten Illusion.

Es ist ein besonderer Vorteil der symbolischen Schreibweise, daß man mit ihrer Hilfe ein Element, das in einer

Reihe irgendeine Stelle hat, darstellen kann, ohne nacheinander alle die Operationen ausführen zu müssen, die nötig wären, um zu ihm zu gelangen. So können wir z. B. mit der Zahl 164.792.843 rechnen, ohne nacheinander alle Einheiten herzuzählen, aus denen sie besteht; und in ähnlicher Weise können wir arithmetische Rechnungen über $2^{1000}$ aufstellen, ohne die tausend Multiplikationen auszuführen, die durch das Zeichen angedeutet werden.

In diesen Fällen faßt der Geist gewissermaßen in einem abgekürzten Verfahren auf Grund logisch feststehender Beziehungen eine Reihe ausführbarer Operationen zusammen, die nur eine längere Zeit in Anspruch nehmen würden. Und der Gedanke erreicht ein ganz bestimmtes Glied innerhalb der Reihe selbst.

Aber die so erworbene Gewohnheit, durch ein Symbol die Operationen zu ersetzen, welche die wirkliche Definition ausmachen, führt zu der Täuschung, daß die Sache durch das Zeichen definiert sei, und daß man deshalb das *letzte Element* einer unendlichen Reihe nur mit einem Worte zu bezeichnen brauche, damit dem Worte ein Gegenstand entspricht. Dennoch ist in diesem Falle das Zeichen bedeutungslos, da die *transzendente* Operation, die damit angedeutet werden soll, unmöglich ist. Abgekürzte Verfahren erlauben dem Gedanken eine endliche Anzahl von Operationen schneller zu vollziehen, niemals aber eine unendliche. Eine Unendlichkeit läßt sich in keiner noch so langen Zeit erschöpfen, wie man auch ihre Elemente zusammenfaßt.

## § 13. Die transzendenten Prozesse und die physiologische Psychologie.

Dieser letzteren Behauptung kann man eine schärfere Fassung geben, aus der die Illegitimität der transzendenten Prozesse, von denen oben die Rede war, noch deutlicher hervorgeht.



In der Tat erlaubt die physiologische Psychologie, die Zeit zu *messen*, die zu einem psychischen Akte nötig ist. Und da sich in jedem Falle ein Minimum von Zeitdauer findet, so kann man dem menschlichen Geiste in keiner Weise die Fähigkeit zuschreiben, eine unendliche Anzahl von Akten in einer wie immer gegebenen Zeit zu vollziehen.

## § 14. Die transzendenten Prozesse in der Analysis des Unendlichen.

Es kann daher nicht überraschen, daß die entgegengesetzte Voraussetzung, wenn man sie fehlerhaften Definitionen zugrunde legt, zu unzähligen Widersinnigkeiten führt.

Die Infinitesimalrechnung war das Gebiet, auf dem derartige Widersinnigkeiten sich am klarsten zeigten, ehe die transzendenten Überlegungen daraus glücklicherweise verbannt wurden. Und die Kritik der Begriffe „*unendlich*“, „*unendlich klein*“, „*Reihe*“ und „*Grenze*“ scheint uns die beste Vorbereitung zu sein, um in den Sinn der vorhergehenden Bemerkungen gut einzudringen.

Das Erste, was diese Kritik feststellt, ist, daß das Wort „unendlich“ nicht auf Zahlen oder gegebene Größen angewendet werden darf, sondern daß es nur die Art des Wachstums einer veränderlichen Größe bezeichnet, welche Werte annehmen kann, die größer sind als jeder beliebige vorgegebene Wert. Das drückt man aus, wenn man sagt, daß das Unendliche nicht, wie Leibniz annahm, *aktuale* Bedeutung hat[1]), sondern nur *potentielle* oder *genetische*.

1) Allerdings muß diese Behauptung eingeschränkt werden, im Hinblick auf die nicht archimedischen Zahlsysteme, die neuer-

Das gleiche gilt für das unendlich Kleine.

Die Wichtigkeit dieser Art, die Dinge zu betrachten, besteht in der Erkenntnis, daß es widersinnig ist, *eine Zahl durch eine unendliche Reihe als deren letztes Glied definieren* zu wollen. Es kann vorkommen, daß *außerhalb* der Reihe eine Zahl existiert, der sich die Glieder der Reihe nähern und die demnach ihre *Grenze* darstellt. Aber die Existenz dieser Grenze drückt im wesentlichen nur eine Eigenschaft der Art aus, wie sich die Glieder einer andern Reihe *verändern*, nämlich derjenigen, die aus den Differenzen zwischen der Grenze und den Gliedern der ursprünglichen Reihe besteht. Demnach kann *die Existenz der Grenze nicht aus der bloßen Tatsache der Existenz der Reihe geschlossen werden, mit anderen Worten, die Grenze kann nicht ausschließlich durch die Reihe definiert werden, sondern nur, indem man die Reihe mit etwas unabhängig und außerhalb von ihr Gegebenem vergleicht.*

Der praktische Wert dieser Bemerkungen ist nachgerade allen denen bekannt, die die Infinitesimalrechnung kennen. Denn die unendlichen Algorithmen geben gewöhnlich zu *Reihen ohne Grenze* Anlaß, und wenn man so operiert, als könnten diese eine solche Grenze definieren, so kommt man zu den merkwürdigsten Ungereimtheiten.

Z. B. stellen sich die Reihen, die man aus einem unendlichen Summationsprozeß erhält (abgesehen von denjenigen, die gegen eine Grenze *konvergieren*), als *divergente* oder als *unbestimmte* dar. Zu diesen beiden Kategorien gehören beziehungsweise die Reihen

dings in verschiedener Weise von VERONESE, LEVI-CIVITA, HILBERT u. a. konstruiert worden sind. Es mag erlaubt sein, diese Konstruktionen zu übergehen und es mag genügen zu bemerken, daß sie von keinem transzendenten Definitionsverfahren Gebrauch machen.



$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

und

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

Mit Benutzung dieser Reihen nun kann man die Gleichheit zweier beliebigen Zahlen beweisen!

Und nicht genug damit; auch beim Gebrauch der konvergenten Reihen darf man nicht vergessen, daß es nur auf Verabredung beruht, wenn man durch sie eine Zahl außerhalb ihrer (die Grenze) darstellt. Wenn man das vergäße, so würde es sich in der Tat um etwas Transzendentes handeln, und wenn man die Reihe als *Summe von unendlich vielen Gliedern* auffaßt, so könnte man sich berechtigt glauben, mit ihr gemäß den Eigenschaften der Summe zu operieren und beispielsweise die Reihenfolge der Summanden zu *ändern;* aber auf diese Weise könnte man z. B. aus der konvergenten Reihe:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

nach Belieben Reihen entstehen lassen, die nach verschiedenen Grenzen konvergieren oder auch divergente oder unbestimmte Reihen.

„Jedes transzendente Definitions- oder Rechnungsverfahren eliminieren", das ist die für das Verständnis der Infinitesimalrechnung wesentliche Bedingung, die CESARO am Anfange seiner schönen Vorlesungen ausspricht, indem er dem Leser empfiehlt, alle metaphysischen Gedanken aus seinem Geiste zu verbannen!

Den Lehren, die wir aus der Analysis des Unendlichen gezogen haben, wollen wir die hinzufügen, die sich aus der modernen *Mengenlehre* ergeben.

Hier hat sich die transzendente Definition bei der Konstruktion gewisser „Mengen" gezeigt, die man auffaßt als „Gesamtheit der unendlichen Größen, denen eine gewisse Eigenschaft zukommt".

Unter den Beispielen, die wir anführen könnten (und die durch die Untersuchungen von CANTOR, DU

Bois-Reymond u. A. ins Licht gesetzt worden sind), wollen wir ein sehr einfaches wählen, auf das Russell kürzlich die Aufmerksamkeit der Mathematiker gelenkt hat.

Auf mehrfache Weise kann man eine Menge bilden

$$s \equiv \{\alpha\},$$

die aus den Elementen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3 \cdots$ besteht und die sich nicht selbst als Element enthält (so daß also keines der $\alpha$ mit $s$ identisch ist.

Nun definieren wir $\Sigma$ als die *Menge aller derjenigen Mengen, denen die genannte Eigenschaft zukommt:*

$$\Sigma \equiv \{s\}.$$

Zunächst ergibt sich, daß $\Sigma$ nicht unter den Elementen $s$ vorkommen darf, denn das würde dem widersprechen, was wir über die $s$ vorausgesetzt haben. Wenn aber andererseits $\Sigma$ nicht in der Menge $\{s\}$ enthalten ist, so erschöpft diese Menge nicht alle $s$, denen die genannte Eigenschaft zukommt.

Der Widerspruch zeigt, daß der Begriff der Menge $\Sigma$ illusorisch ist, und so offenbart sich die Fehlerhaftigkeit des transzendenten Verfahrens, durch das $\Sigma$ definiert wurde.

## § 15. Der psychologische Wert des Absoluten.

Aber die logische Untersuchung, die den Fehler in der transzendenten Definition aufweist, erschöpft die Frage des Absoluten nicht. Wie würde sich sonst der bevorzugte Platz erklären, den das Absolute in dem Glauben einnimmt, der mit den innersten Gefühlen der Menschenseele verknüpft ist? Wie könnte eine falsche Fragestellung einem Symbole *Wert* verleihen, dessen Inhaltlosigkeit wir erkannt haben?

Um diese Fragen zu beantworten, müssen wir zu den Betrachtungen über „das Absolute in der Moral" zurückkehren.



Wir sprachen schon von der eigentümlichen Neigung des menschlichen Willens, die ihm gesetzten Ziele einer Rangordnung zu unterwerfen, in der das nähere Ziel dem ferneren untergeordnet ist.

Das Bestehen einer solchen Rangordnung verlangt aber, daß der höchste Zweck in jedem Augenblick hinreichend stark auf den Willen einwirkt, um den zufälligen Triebfedern entgegenzuwirken, die sonst den Entschluß von ihm ablenken würden. Und diese autosuggestive Kraft erhält er durch die Erfahrung, die der Wille von seiner eigenen Festigkeit macht, und sie enthüllt sich in dem darauffolgenden Bewußtsein *sich nicht zu ändern.*

Man sieht daraus, daß die fortschreitende Erweiterung der Rangordnung der Zwecke und ihre Beständigkeit für den menschlichen Willen zwei einander widersprechende psychologische Forderungen bilden. Ein neuer höherer Zweck kann die vom Willen bereits angenommenen nicht ändern, ohne dessen Vertrauen in die eigene Stetigkeit und Kraft zu erschüttern.

Wenn im Leben des Individuums oder der Gesellschaft die Perspektive der Zwecke sich plötzlich erweitert, so entsteht dadurch eine jener *kritischen Perioden*, die durch eine Desorganisation des Wollens ausgezeichnet sind. Ein solcher Zustand der Ohnmacht, der die menschliche Persönlichkeit für Augenblicke vernichtet, trägt sein Heilmittel gewöhnlich in sich selbst, indem er das Interesse am Aufsuchen neuer Ziele aufhebt. Ist so dem Fortschritt Einhalt getan, so kommt es zur Entscheidungsschlacht zwischen den widerstreitenden Trieben, die in der Seele um die Herrschaft ringen; und wenn dann ein Entschluß Sieger bleibt, indem er sich als fähig erweist, die andern sich unterzuordnen, so verwendet der Geist auf ihn die ganze Energie, die ihm das Bedürfnis verleiht, einem schmerzhaften Zustande zu entgehen.

Jeder Mensch macht, wenn er aus dem Knaben- in das Jünglingsalter oder aus diesem in das Mannesalter tritt, eine kritische Periode, wie sie eben beschrieben wurde, durch und überwindet sie aus eigener Kraft oder mit fremder Hilfe.

Ähnliche Willenskrisen entstehen in manchen geschichtlichen Augenblicken auf sozialem Gebiet. Es entstehen dann Perioden revolutionärer Desorganisation, die auf einen zu raschen Fortschritt folgen und ihn aufhalten. Diejenige Macht, die in solchen Zeiten Sieger bleibt, erfährt dadurch einen übermäßigen Zuwachs an Autorität.

Der psychologische Wert des Absoluten beruht auf den Bedingungen des oben beschriebenen Fortschritts. Es wäre ein leichtes, Beweise aus der Geschichte dafür beizubringen.

Die Illusion, als könnte man die unendliche Reihe der Zwecke bis zu Ende durchlaufen, entspricht dem Bedürfnis, für den angstvollen Zweifel, *jenseits* eine Schranke zu finden, wo die Konflikte des Willens durch einen Machtspruch gelöst werden.

In diesem Sinne ist das Absolute weniger eine regulative Idee als eine Bedingung der Freiheit des Geistes, die alle Fähigkeiten in einem Brennpunkt vereinigt, während jeder fremde Antrieb und jede Kritik unterdrückt wird durch das Bewußtsein: *credo quia absurdum est.*

Dieser wesentlich schwärmerische und religiöse Zustand der Seele bedeutet für den Psychologen ein Problem; aber den Erkenntnistheoretiker interessiert er nicht.

Zu erklären, wie und warum in unserer Zeit zugleich mit dem Erschlaffen des religiösen Glaubens das Absolute Gegenstand einer Untersuchung wurde, die daraus eine Wissenschaft machen will, wäre gewiß lehrreich und zwar nicht nur vom historischen Standpunkte. Aber eine



solche Erklärung würde eine längere Untersuchung erfordern.

Uns genügt es, aus den vorhergehenden Betrachtungen den Schluß zu ziehen, daß das Absolute als Gegenstand verstandesmäßiger Konstruktionen aufhört, absolut zu sein, und daß es angesichts der Kritik den Wert eines Imperativs einbüßt, der über allen Zwecken des Willens und über allen geistigen und sinnlichen Trieben steht.

Was bleibt also von jener angeblichen Metaphysik anderes übrig als ein Dokument zugleich von der Ohnmacht und von der Herrschaft des Menschengeistes?

Ein Ikarus, der den Flug zum Himmel wagte und in die Tiefen des Meeres stürzte.

Entmutigt versinkt die Vernunft ins Meer des Unerkennbaren.

## § 16. Wesen und Schein.

Wir sahen, wie der Trugschluß, den man gewöhnlich in die Worte faßt, „Das Relative setzt das Absolute voraus.“ auf einer Täuschung durch Worte beruht, hinter denen sich ein sinnloser Definitionsprozeß verbirgt.

Alle die ähnlichen Antinomien, von denen die klassische Philosophie voll ist, erklären sich auf analoge Weise. Sie können auf die Form eines unendlichen Prozesses gebracht werden oder sich als einfache Gegensätze darbieten; aber im letzten Falle handelt es sich um einen rein formalen Gegensatz, der ebenso dazu dient, ein sinnloses Wort zu bilden.

Diese Art Antinomien ziehen ihre ganze Kraft aus dem Umstande, daß sie *bis zu einem gewissen Grade* wahr sind, wenn man nämlich die Ausdrücke nicht in ihrer strengen Bedeutung nimmt.

Man spricht z. B. von dem *Wesen* (Substanz) der Dinge im Gegensatz zu ihrer *Erscheinung*. Kohle und

Diamant sind im Wesen dasselbe, wenn sie gleich in ihrer Erscheinung nichts gemein haben. Andererseits verbergen Diamant und Bergkristall unter einer ähnlichen Erscheinung verschiedene Substanzen.

In solchen Fällen macht man einen wichtigen Unterschied zwischen den unmittelbaren Sinneseindrücken, die wir auf ein gewisses Ding beziehen und der Gesamtheit der Beziehungen dieser Sache zu der sie umgebenden Welt, von denen wir teilweise eine vermittelte Kenntnis erlangen können.

Und diese Beobachtung geht auf ARISTOTELES zurück. Der Philosoph bemerkt z. B., daß das ins Wasser getauchte Ruder, obgleich unversehrt uns doch geknickt erscheint. Aber der Sinn der Unterscheidung änderte sich im Laufe des Mittelalters als der Geist des Absoluten die hellenische Kultur begrub.

Sehen wir nun, was bei KANT aus dieser Unterscheidung geworden ist!

Die Erscheinung, oder wie KANT sich ausdrückt, das Phänomenon, wird dem Sein an sich oder Noumenon gegenübergestellt, wo dieser letzte Ausdruck in einem absoluten Sinne genommen wird.[1]) Man abstrahiere bei der Betrachtung irgendeines Körpers von allen Beziehungen, die für uns mittelbar oder unmittelbar wahrnehmbar sind; was dann übrig bleibt, ist das wahre Wesen des Körpers.

Ein solcher Widersinn bliebe allerdings unerklärlich, wenn er nicht mit einer anthropomorphen Vorstellung von der Welt zusammenhinge. Dabei stellt man sich vor, daß, wenn man in das Innere eines Steines gelangen könnte, man Empfindungen haben würde, die geeignet wären, sein wahres Wesen zu enthüllen.

1) Wir meinen hier das Noumenon im negativen Sinne verstanden, von dem KANT im dritten Hauptstück des zweiten Buches der „transzendentalen Analytik" spricht.



Der verworrene Zustand des Geistes, der der Betrachtung des Wesens als etwas Absolutem entspricht, erinnert genau an diesen Anthropomorphismus, den wir wahrscheinlich in unserer frühesten Kindheit durchgemacht haben.

Man kann sich aber eigentlich nicht wundern, daß man in bezug auf diese angebliche Wesenheit zu agnostischen Folgerungen gelangt[1]), wenn man sie so definiert, daß in der Bedeutung des Wortes nichts mehr übrig bleibt!

## § 17. Das Unbekannte.

Allerdings wollen wir damit dem Gefühl von einem „großen Geheimnis des Universums" nicht widersprechen, einem Gefühl, das die Reflexionen über die Idee des Wesens in unserem Geist erwecken. Die Erkenntnis der vielfachen Beziehungen, die alle Dinge miteinander verknüpfen, veranlaßt uns, dahinter ein zu entschleierndes Unbekanntes zu vermuten und es uns als unmöglich vorzustellen, die Dinge, die in seinen Bereich fallen, zu erschöpfen. Aber die Behauptung der Existenz des Unerkennbaren ist kein adäquater Ausdruck dieser Ansicht!

In Übereinstimmung mit der Kritik, die unser Landsmann ARDIGO in diesem Punkte an der Lehre SPENCERS übt, können wir nicht zugeben, daß der unserer Erkenntnis zugänglichen Wirklichkeit eine andere geheimnisvolle Wirklichkeit gegenübersteht, die jeder Anstrengung des Gedankens *notwendig* trotzt. Im Gegenteil zeigen die vorhergehenden Bemerkungen, daß es eine Reihe

1) Die Analyse KANTS läuft in der Tat auf eine Unerkennbarkeit des Noumenon hinaus, die er damit ausdrückt, daß er die Unmöglichkeit behauptet, ein Noumenon im *positiven* Sinne zu erkennen.

von unserer Erkenntnis gleich zugänglichen Objekten gibt; aber da diese Reihe sich als unendlich erweist, so ergibt sich, daß unser Wissensdurst nie gänzlich gelöscht werden kann.

In der Tat ein glücklicher Umstand für die menschliche Gesellschaft, der sich ein Ausblick auf einen unbegrenzten Fortschritt eröffnet!

## § 18. Der Unterschied zwischen subjektiv und objektiv nach Kant.

Dem Unterschied zwischen Schein und Wesen verwandt ist der zwischen Subjekt und Objekt, zwischen subjektiv und objektiv.

Wir können es uns ersparen, zu wiederholen, daß eine derartige Unterscheidung, absolut genommen, sinnlos ist. Sie entspricht nämlich einerseits einer transzendenten Auffassung des Dinges an sich (das mit dem Wesen zusammenfällt), und andererseits einer transzendenten Auffassung des Ich als eines von den verschiedenen Erscheinungsformen der Persönlichkeit unabhängigen Substrates, das diesen zugrunde liegt.

Es ist immer derselbe auf das Absolute gerichtete Geist der Kritik, der dem kantischen Agnostizismus den Boden bereitet.

Aber nur wer die Dinge von einem speziellen Gesichtspunkte aus betrachtet, kann die Philosophie Kants dahin deuten, daß sie zu einem skeptischen Ergebnis führt, indem sie mit der positivistischen Philosophie zusammentrifft.

Und wenn diese Seite der Lehre darauf gerichtet erscheint, gewissen praktischen Forderungen zu genügen, „sofern sie gerade den praktischen Datis den Platz für eine Erweiterung der Erkenntnis läßt, den die spekulative auszufüllen sich als unfähig erweist“[1]), so kann man wohl behaupten, daß dadurch, daß ihre Fehlerhaftigkeit ins Licht gesetzt wird, der Wert der Revolution, die Kant gegen die alte Metaphysik ins Werk setzte, nicht vermindert wird. Wenn man den Geist der kantischen Schriften ohne Engherzigkeit zu verstehen sucht, so stellt sich in der Tat heraus, daß bei diesem Philosophen die Unterscheidung von subjektiv und objektiv keine unfruchtbare Antinomie blieb, sondern daß sie für ihn der Ausgangspunkt für eine neue Auffassung der wissenschaftlichen Realität wurde, eine Auffassung, zu der der Positivismus auf anderem Wege auch gelangte.



Wir glauben, daß sogar vom streng positivistischen Standpunkte aus die Philosophie Kants noch einen wissenschaftlichen Charakter annehmen kann, sofern man sich herbeiläßt, nur ihren Geist in dem besten, was sie enthält, zurückzubehalten und sie im übrigen auf veränderter Grundlage neu aufzubauen.

In der Tat behält die Lehre „daß man in der Erkenntnis ein persönliches *(subjektives)* und ein reales *(objektives)* Element unterscheiden muß, und daß letzteres von Mensch zu Mensch veränderlich, sich in gewisse allgemeine Formen der menschlichen Sinnlichkeit und des menschlichen Verstandes einfügt“ eine positive Bedeutung, sofern man den Wert der Unterscheidung anerkennt, ohne darin etwas Absolutes finden zu wollen.

Aber dazu muß man nicht nur die Entwickelungen der zügellosen nachkantischen Spekulationen übergehen, sondern auch die Urteile des Meisters selbst über die „Antizipation *a priori* der *Form* einer möglichen Er-

1) Vgl. „Critique de la raison pure“ trad. Barni 2e ed. Préface p. 28.

Ebenso: Kr. d. r. V., Ausgabe von Kehrbach S. 20f. (Anm. d. Übers.).

fahrung" (vgl. op. c. S. 321) und über „die objektive Realität, welche den Erkenntnissen *a priori* durch die *Möglichkeit der Erfahrung* verliehen wird" (op. c. S. 215); diese Urteile sind in sich selbst zweideutig, und ihre authentische Interpretation sowohl als ihre Anwendung enthalten den ursprünglichen Fehler der transzendenten Auffassung des Unterschiedes von Subjektivem und Objektivem. Und indem man durch sie dahin gelangte, implicite eine gewisse Objektivation der psychischen Strukturgesetze in dem Aufbau der Geometrie oder der Mechanik anzuerkennen, hat man schließlich der Metaphysik die Tore wieder geöffnet, die KANT für immer verriegelt zu haben glaubte.

Anderseits hat das, was am Kritizismus lebensfähig war, außerhalb der Entwickelung der Philosophie im vorigen Jahrhundert, in den Gebieten der Wissenschaft, in die er Eingang fand, durch Anregung und Erneuerung tiefe Spuren hinterlassen. Und auf dieser Grundlage soll sich die neue Kritik erheben, die die positiven Probleme der Erkenntnis beleuchten wird!

## § 19. Der Unterschied zwischen Subjektivem und Objektivem positiv betrachtet.

Hat der Unterschied zwischen Subjektivem und Objektivem in bezug auf unsere Erkenntnisse einen positiven Gehalt? In welcher Weise kann er aufrecht erhalten werden, da wir doch die Antimonie zwischen Subjekt und Objekt im transzendenten Verstande fallen sahen? Wir wollen einige Beispiele untersuchen, die geeignet scheinen, uns zu einer passenden induktiven Definition zu führen.

Betrachten wir eine kleine Schachtel mit würfelförmigen Klötzen, wie man sie (nach dem Fröbelschen System) kleinen Kindern zum Spielen gibt. Der Boden



der Schachtel ist durch zwei schwarze Striche in vier quadratische Felder geteilt, die gleich den Seiten unserer Würfel sind. Das Kind lernt daraus, „daß *vier* Würfel nötig sind, um den Boden der Schachtel zu bedecken".

Wir sind alle einig in der Erkenntnis, daß diese Aussage einen *objektiven Bestandteil* enthält: in der Tat, wenn die Schachtel größer wäre im Verhältnis zu den Würfeln, so könnten *sechs* oder *acht* usw. dazu nötig sein. Hinwiederum geht in den Ausdruck dieser Erkenntnis ein *subjektiver Bestandteil* ein. In erster Linie die *sprachliche Form* des Wortes „quattro", das von verschiedenen Personen verschieden ausgesprochen wird, und für das ein Franzose den Laut „quatre", ein Deutscher „vier" setzt usw. In zweiter Linie ihre *psychologische Form.*[1]) Ein Kind stellt sich die „Vier" vor, indem es die Würfel in Gedanken den vier Fingern der Hand mit eingebogenem Daumen zuordnet, ein anderes nimmt die vier Kügelchen einer Rechenmaschine; ein drittes Kind, das noch nicht zählen kann, hat man gelehrt, mit Bleistift auf die Würfel je einen Viertelkreisbogen zu zeichnen; dadurch gelingt es ihm, so viel Würfel zu legen, als nötig sind, um den Boden der Schachtel zu bedecken, indem es sie so aneinandersetzt, daß die Bögen (in roher Annäherung) einen Kreis bilden. Das letzte Kind besitzt, wie die andern, die in Rede stehende Erkenntnis aber nicht mehr durch die zahlenmäßige Darstellung, sondern durch Vermittlung einer geometrischen Figur.

Wir sagen, daß die Erkenntnisse unserer Kinder *objektiv* die gleichen sind, denn sie *stimmen überein in*

1) Ein psychologischer Unterschied drückt sich zuweilen schon in der sprachlichen Verschiedenheit aus: so stellt z. B. ein Italiener die Zahl achtzig als $10 \times 8$ dar, ein Franzose als $20 \times 4$ (quatre-vingts).

*der Voraussicht*, die man von ihnen verlangt, indem sie in gleicher Weise die Würfel vorbereiten, die den Boden der Schachtel bedecken sollen, während diese Voraussicht *nicht* erfüllt wäre, bei *einer andern Schachtel* oder bei *Würfeln* von *anderen* Dimensionen. Wir sagen dagegen, daß dieselben Erkenntnisse *subjektiv* verschieden sind, denn sie haben die Voraussicht auf verschiedene Weise erlangt, durch verschiedene *Bilder*.

Aber sobald wir unsere Kritik weiter treiben, bemerken wir:

1. daß die erwähnte Voraussicht nur durch Vermittelung irgendwelcher Bilder möglich ist und daß daher eine *reine* objektive Erkenntnis nicht möglich ist;
2. daß die subjektive Art der Vorstellung auf die Voraussicht selbst und auf andere ähnliche einwirkt, weshalb man sagen muß, daß sie einen objektiven Bestandteil enthält

In dem vorigen Beispiel tritt das sehr deutlich hervor. Das Kind, das sich die erwähnte Tatsache geometrisch vorstellt, weiß *weniger* als die anderen, insofern als es nicht gleich erkennen wird, daß seine vier gezeichneten Würfel den Boden der Schachtel auch bedecken würden, wenn sie in einer Anordnung darauf gestellt würden, bei der die vier Bögen eine vom Kreis verschiedene Figur ergeben würden (s. Fig. 1). In anderer Hinsicht *lehrt* die erwähnte geometrische Vorstellung *mehr*, nämlich vorauszusehen, bei welcher Anordnung der Würfel der Boden der Schachtel bedeckt wird usw.

Fig. 1.

An diesem Beispiel kann man schon erkennen, daß der *subjektive und der objektive Bestandteil nicht zwei irreduzible Elemente der Erkenntnis sind, sondern vielmehr verschiedene Ansichten derselben, die sich ergeben*



*aus ihrer Gegenüberstellung mit andern Erkenntnissen ein und derselben Person oder verschiedener Personen hinsichtlich einer Sache oder verschiedener.*

Wir begegnen dem *objektiven* Elemente überall da, wo eine *Übereinstimmung der Voraussicht* vorhanden ist, unabhängig von der Art, wie sie (von ein und derselben Person oder von mehreren) erlangt wird.

In der Mannigfaltigkeit dieser möglichen *Arten* begegnen wir dem *subjektiven* Elemente.

Aber obgleich bei fortschreitender Erweiterung der Erkenntnis die beiden Elemente *immer mehr auseinandertreten*, so werden sie doch *niemals absolut* getrennt. Der Begriff des Objektiven und der des Subjektiven entstehen vielmehr in jedem Augenblick durch Abstraktion aus der Vergleichung von Erkenntnissen, die immer einer Erweiterung fähig bleiben.

Folglich wird die subjektive Ansicht der Erkenntnisse immer etwas Objektives enthalten ebenso wie die objektive etwas Subjektives.

Immerhin kann die Unterscheidung viel weiter getrieben werden, als sich aus dem angeführten Beispiel ergibt.

Indem man immer die *Vergleichung von Erkenntnissen* zugrunde legt, kann man sich nämlich über jene Objektivität erheben, die sich aus der Vergleichung zwischen den Erkenntnissen ergibt, die verschiedene Personen von derselben Sache besitzen; und wenn man ebenso die Art vergleicht, wie verschiedene Gegenstände erkannt werden, so kann man eine Subjektivität der Vorstellungen erkennen, die allen Menschen gemeinsam ist.

Auf dieser neuen wissenschaftlichen *Stufe der Unterscheidung* von Subjektiv und Objektiv ergibt sich ein neuer Umstand, daß nämlich „die Vorstellungsart, die in einem gegebenen Falle zu einer verifizierten Voraus-

sicht führt, in bezug auf andere mögliche Voraussagen zu einem Irrtum führen kann". Das drückt man dadurch aus, daß man sagt, mit der subjektiven Ansicht der Erkenntnisse seien *Erscheinungsweisen* der Dinge verbunden, die nicht ihrer *Wirklichkeit* entsprechen. Die so erhaltene Unterscheidung führt also zu einer *Korrektur* der ursprünglich erworbenen Erkenntnis, indem man sie in zwei Teile spaltet, von denen der eine (der objektive Bestandteil) dem größeren *Komplex* von Voraussagen besser entspricht, der andere (der subjektive Bestandteil) mit dem ersten zusammen die Voraussicht in dem einzelnen abweichenden Falle liefert (oder wie man sagt, den *trügerischen Schein erklärt*).

## § 20. Das Subjektive und Objektive bei der Messung.

Das gerade können wir durch die Untersuchung eines einfachen und klaren Beispiels erkennen.

Wenn man von der *Größe* oder den *Dimensionen eines Gegenstandes* spricht, so meint man eine zusammengesetzte Erkenntnis, die die Übereinstimmung vielfacher Voraussichten in sich schließt in bezug auf Erfahrungen des Tastsinnes, des Gesichtsinns usw.

Nun wollen wir einmal die Dimensionen eines vorgelegten Gegenstandes als *bekannt* voraussetzen. Von diesen Dimensionen verschafft uns der Gesichtsinn eine gewisse unmittelbare Erkenntnis, in die verschiedene Elemente eingehen, die wir unserer Analyse unterwerfen müssen.

Vor allem muß man die Entfernung und die Stellung des Gegenstandes berücksichtigen und die Fehler korrigieren, die aus dieser Beziehung des Gegenstandes zum Subjekt entspringen und in mehrfacher Weise die Bedingungen seines Anblicks verändern.



Aber danach bleiben in unserer Erkenntnis noch gewisse Elemente, die von dem Bau des Sehorgans abhängen und die, wie die Psychophysik lehrt, von Mensch zu Mensch veränderlich sind, die aber jedenfalls auf gewissen allgemeinen Umständen der Wahrnehmungen beruhen. So erscheinen z. B. zwei Punkte, die durch einen leeren Raum getrennt sind, näher beieinander als zwei gleich weit voneinander entfernte Punkte, deren Zwischenraum stetig mit Materie erfüllt ist; und in ähnlicher Weise werden gleiche Längen verschieden geschätzt, je nachdem sie gleichmäßig oder wechselnd gefärbt sind usw.

Wir sehen schon in dem erwähnten Beispiel den Einfluß des subjektiven Elementes, das dem Gesichtseindruck innewohnt, und den die Tastempfindungen uns zu korrigieren erlauben. Aber auch ohne auf die exakten Messungsmethoden mittels des Tastsinnes zu rekurrieren, kann man leicht verstehen, wie geeignete Experimente zur Entdeckung der systematischen Fehlerquellen führen können, ohne das Gebiet der Gesichtswahrnehmungen zu verlassen. Es genügt in der Tat, auf die Färbung der verschiedenen Teile des Gegenstandes zu achten, erfüllte Räume durch leere zu ersetzen usw. Und wenn man so einmal gewisse Regeln in bezug auf die *Luftperspektive* im weitesten Sinne des Wortes aufgestellt hat, so besitzt man darin ein Mittel, um die Gesichtswahrnehmungen zu korrigieren und so zu einer genaueren Erkenntnis der Dimensionen von Körpern zu gelangen, die unserem Urteil unterbreitet werden. Auf diese Weise kann man Vorausbestimmungen treffen, die besser mit den verschiedenen möglichen Erfahrungen durch den Gesichtssinn bei einer und derselben oder bei verschiedenen Personen zusammenstimmen.

Wenn wir nunmehr jede Beschränkung auf ein einzelnes Sinnesgebiet fallen lassen, ohne doch das Gebiet

der Messung zu verlassen, so finden wir Stoff zu interessanteren Betrachtungen.

Die Messung besteht in einem vergleichenden Urteil zwischen einer unbekannten Länge und einer anderen, die als Maßeinheit dient, sie wird vollzogen mittels der Sinne und mit Hilfe geeigneter Instrumente. Das benutzte Instrument gestattet einen gewissen Genauigkeitsgrad, den man als ein objektives Datum des Urteils ansehen kann. Aber außerdem muß man die *Art*, wie das Instrument gehandhabt wird, den *physischen und psychischen Zustand* des Experimentators und tausend andere Nebenumstände in Betracht ziehen; denn alle diese rufen, wo es sich um einen gewissen Grad von Genauigkeit handelt, Abweichungen in den Versuchsresultaten von einem zum andern Mal bei einer Person und in ihrer Gesamtheit bei verschiedenen Personen hervor.

Sehen wir jetzt von den *systematischen Fehlern* ab, um uns lediglich mit den *zufälligen* zu beschäftigen, so begegnen wir der merkwürdigen und lehrreichen Tatsache, daß das Mittel aus den Beobachtungsergebnissen bei demselben Experimentator die Tendenz zeigt, von dem *genauen Wert* um einen konstanten Fehler abzuweichen, den man als die *persönliche Konstante* bezeichnet.

Auf zwei Weisen kann diese Tatsache erkannt werden. Einmal durch Anwendung vollkommenerer Meßinstrumente und anderseits durch Gegenüberstellung der Beobachtungen verschiedener Personen. Aber wenn einmal die persönliche Konstante festgestellt und zur systematischen Korrektur der Messung benutzt worden ist, so erreicht man damit einen höheren Grad von Genauigkeit, der in der besseren Übereinstimmung zwischen den Resultaten eines Experimentators und zwischen denen verschiedener Experimentatoren zum Ausdruck kommt.



Die obigen Bemerkungen machen klar, welcher positive Gehalt in der Behauptung von dem subjektiven Element in der Erkenntnis enthalten ist.

In der Tat sehen wir in dem vorhergehenden Beispiel nochmals, daß es sich nicht darum handelt, dem *Objekt* eine in Beziehung auf das *Subjekt* strenge transzendentale Bedeutung zu geben. Dadurch daß die Unterscheidung eine relative wird, verliert sie gewiß nicht an Bedeutung; es gelingt, ein Datum aus dem Bau der Sinnesorgane klar zu bestimmen, obgleich die Erkenntnis selbst, die wir als genau betrachten, mittelbar auf den Sinnen selbst beruht, deren Ungenauigkeit wir gerade ins Licht setzen.

Aber wir müssen die vorhergehenden Bemerkungen noch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten.

Man erhält das obenerwähnte *Fehlergesetz*, indem man die Gesamtheit der mannigfaltigen Beobachtungen durch ihr *arithmetisches* Mittel ersetzt, von dem man annimmt, daß es sich dem *genauen Maß* mehr nähert.

Zwei Fragen erheben sich da.

Vor allem sehen wir, daß der Begriff eines *genauen* Maßes an dem Gedankenprozeß beteiligt ist, der zur Korrektur der sinnlichen Fehler führt. Es ist dies ein wichtiger Punkt, auf den besonders die Kantianer ihr Augenmerk richten werden.

Was ist das genaue Maß? Ist es nicht das Absolute in der Messung? Und sollten wir uns nicht auf diese Weise gezwungen sehen, dem Absoluten einen Platz anzuweisen, das wir doch vorher für sinnlos erklärt haben?

Wir wollen die Frage kaltblütig prüfen.

Wenn gefragt wird: „Kann man sich in der Folge der fortschreitenden Annäherungswerte eines Maßes ein *letztes* Glied denken?“ So antworten wir: nein! In diesem realistischen Sinne bedeutet das genaue Maß gar nichts.

Die Annahme, daß eine unmittelbare genaue Maßbestimmung möglich sei, begegnet weiter verschiedenen Einwänden. Das, was wir über den Bau der Materie wissen oder annehmen, und das, was wir über die Natur des Lichts (besonders den Begriff der *Wellenlänge*) voraussetzen, bildet ein Hindernis für eine solche Annahme; ist es doch nicht schwer, z. B. für die kleinste mit dem Mikroskop sichtbare Länge eine theoretische Grenze anzugeben, die von der praktisch erreichten nicht allzuweit entfernt ist.

Aber auch alles dies ist für uns gleichgültig, wenn wir zum Ausgangspunkte unserer Überlegungen die *Annahme* der Existenz eines genauen Maßes machen.

Der Wert dieser Annahme besteht lediglich darin, daß sie erlaubt, die Tatsachen, die mit den experimentellen Bestimmungen des Maßes zusammenhängen, durch einen logisch wohl definierten Begriff (den Begriff einer *Zahl*) darzustellen, so daß die darauf gegründeten Überlegungen zu Voraussichten führen, die durch die Erfahrung bestätigt werden. Nun bildet diese Unterordnung der sinnlichen Daten unter *Begriffe* gerade einen *Bestandteil unserer psychischen Organisation*, dessen Wichtigkeit für die Erkenntnistheorie wir später hervorzuheben Gelegenheit haben werden.

Noch einige Worte über das *Postulat des Mittels*, das mit unserem Thema nicht so eng zusammenhängt.

Sehr witzig bemerkte einmal Lipmann zu Poincaré, daß in solchen auf die Wahrscheinlichkeit bezüglichen Fragen die Übereinstimmung der Gelehrten eine vollkommene sei, weil die Mathematiker glauben, sie seien durch das physikalische Experiment entschieden, während die Physiker glauben, die Mathematik habe sie gelöst. Und Poincaré antwortete, indem er das Wort bestätigte, die Frage brauchte nicht mehr erörtert zu werden, es handle sich nur um Versuchsergebnisse.



Die Wahl des arithmetischen Mittels zur Darstellung einer Folge von Beobachtungen entspricht der Wahl derjenigen Zahl, durch die die Summe der Quadrate der Differenzen der einzelnen Beobachtungswerte den kleinsten Wert annimmt. Diese Wahl ist *a priori* willkürlich. Aber das Prinzip, auf dem sie beruht, rechtfertigt sich durch die größere Übereinstimmung, die die Vergleichung verschiedener Beobachtungsreihen ergibt. Im ganzen entspricht also der physikalische Begriff des Maßes einem Intervall, innerhalb dessen die durch das Determinierungsverfahren gelieferten Werte liegen und das man soweit wie möglich zu verkleinern strebt. Dieses Intervall wird kleiner, wenn man die aus den einzelnen Beobachtungen gewonnenen Resultate durch ihre Mittelwerte ersetzt. Dies ist die Bedeutung des Mittelpostulates, auf das Gauss die *Fehlertheorie* gegründet hat. Man nimmt das arithmetische Mittel, das die Quadratsumme der oben genannten Differenzen zu einem Minimum macht, weil es sich gerade darum handelt, im Resultat das Intervall zu verkleinern, das die äußersten erhaltenen Werte von demjenigen nach beiden Seiten trennt, der von beiden gleich weit entfernt ist.

## § 21. Subjektiv und Objektiv im Aufbau der Wissenschaft.

Die weitere Verfolgung der obigen Beobachtungen führt uns zu einer eingehenderen Diskussion des Problems der *positiven Definition der Wirklichkeit;* dieses Problem werden wir ausführlicher im II. Kapitel behandeln, welches eine Kritik der Tatsachen und Theorien enthalten soll.

Hier wollen wir uns darauf beschränken, zu bemerken, daß das Beispiel der Messung uns über den wissenschaftlichen Wert der Unterscheidung von Sub-

jektivem und Objektivem in der Erkenntnis belehrt. Sieht man nämlich von jeder transzendenten Deutung ab, so wird diese Unterscheidung zum Ausgangspunkt eines *Verfahrens der fortschreitenden Korrektur* im Fortgang der Wissenschaft. Wenn nun auch dieser Gesichtspunkt diejenigen nicht befriedigen kann, die sich die Arbeit der Wissenschaft auf irgendeinem Gebiete als abgeschlossen vorzustellen lieben, so entspricht er doch den Erfordernissen des Fortschritts und hat daher eine viel positivere und befriedigendere Bedeutung für die praktischen Zwecke.

Zweifellos strebt die Wissenschaft nach einer immer objektiveren Erkenntnis. In jedem Stadium ihrer Durcharbeitung unterdrückt sie daher in ihrer dogmatischen Darstellung diejenigen Elemente, die nach dem augenblicklichen Stande der Kenntnisse subjektiv erscheinen. Aber die Elimination des Subjektiven wird noch weiter getrieben werden müssen in einem vorgeschritteneren Stadium, in dem die Korrektur des vorhandenen Fehlers weiter fortgeschritten sein wird. Und anderseits werden jene subjektiven Elemente, die als Residuen der vorhergehenden Elimination ausgeschieden werden, bei erneuter Kritik noch etwas Objektives ergeben.

So kann man den Fortschritt der Wissenschaft mit der Bewegung einer Schaukel vergleichen, die derjenige, der darauf sitzt, so hoch wie möglich zu schwingen strebt; jedem Stoß nach vorne entspricht eine Schwingung, durch die auch die Bewegung nach rückwärts verstärkt wird und das macht den Stoß immer wirksamer.

Vom genetischen Gesichtspunkt aus betrachtet, steigt nicht nur die Wissenschaft zu immer höherer Objektivität auf, sondern auch die Subjektivität der Vorstellungen, die ihr als Mittel der Erkenntnis dienen, erreicht ihrerseits immer höhere Grade.



## § 22. Kritik des Positivismus.

Der angegebene Bauplan vervollständigt diejenige Betrachtung der *ausgebildeten* Wissenschaft, die der positiven Philosophie angehört.

Die geistige Bewegung, die mit diesem Namen bezeichnet wird, verdankt ihren Ursprung der Reaktion gegen die willkürlichen Begriffsbildungen des metaphysischen Idealismus, der um so gefährlicher war, als er Anspruch auf sehr hohe (vielmehr absolute) Objektivität erhob, während er doch nur eine Übertreibung der Subjektivität widerspiegelte.

Während Immanuel Kant mit seiner Kritik die Täuschung dieser angeblichen metaphysischen Objektivität aufdeckte (indem er freilich dabei den Zugang zu einer unberechtigten Ausdehnung des Subjektiven über das Objektive öffnete), war das Ziel Auguste Comtes ihre negative Kritik; den vielgestaltigen und einander widersprechenden philosophischen Systemen stellte er die ausgebildete Wissenschaft gegenüber und setzte den Charakter der „Tatsachenerkenntnisse", auf denen sie beruht, ins Licht.

Icilio Vanni hebt mit Recht hervor, daß Comte dieses Kriterium der *wirklichen Erkenntnis* in der *Übereinstimmung* der *Menschen* findet, d. h. in dem *sozialen* Wert der Wissenschaft im Gegensatz zu dem *individuellen* Wert der Metaphysik. Wir haben oben neben diesem wichtigen Unterscheidungsmerkmal des Objektiven andere angeführt, die im Gebiet des Individuellen bleiben.

Wie dem auch sei, der *positivistische Geist*, der das ganze Werk Comtes beherrscht, offenbart sich in einer rigorosen Auswahl derjenigen Erkenntnisse, denen der Charakter der Objektivität zugesprochen wird. Unabhängig von der Schule von Schriftstellern und Soziologen, die sich hauptsächlich der Weiterbildung einiger Resul-

tate der letzten comtischen Spekulationen gewidmet hat, hat jener Geist in den verschiedenen Gebieten der Wissenschaft einen starken Einfluß ausgeübt und hat seinen vollendetsten Ausdruck im Gebiete der physikalisch-mathematischen Erkenntnis gefunden, von der die Spekulation des Meisters ausgegangen war.

Indessen zeigt sich die erwähnte Wirkung auf allen Gebieten des Wissens in doppelter Weise: einerseits in dem Bestreben eine in immer höherem Grade von den verschiedenen Vorstellungsweisen unabhängige Form der Erkenntnis zu gewinnen; anderseits in einer völligen Gleichgültigkeit gegenüber allem, was diese Vorstellungsweisen betrifft, und in einer summarischen Verurteilung der Metaphysik, die aus ihnen ihre Nahrung zieht.

Wir haben bereits bemerkt, daß diese negative Seite des Positivismus, obgleich gerade sie den meisten Anklang zu finden scheint, in unseren Augen seine schwächste ist. Die Kritik der Metaphysik, die sich daraus ergibt, gibt dieser einerseits *mehr* zu, als nötig ist, und begreift anderseits in ihrer Verurteilung Dinge, die verteidigt zu werden verdienten.

## § 22a. Positivismus und Metaphysik.

An der alten Metaphysik ist etwas zu verteidigen? Und dieser Zweifel allein genügt nicht, um von seiten aller Gelehrten ein Scherbengericht gegen denjenigen herbeizuführen, der ihn ausspricht?

Wir bitten vor Fällung des Urteilsspruchs den *Angeklagten* zu hören, ohne das Vorurteil, als hätte man einen *Überführten* vor sich.

Vor allem handelt es sich darum, festzustellen, „was man gewöhnlich unter Metaphysik versteht". Vielleicht nur wenige oder keiner von den Positivisten hat sich



diese Frage gestellt. Oder sie sind wenigstens häufig bei der Antwort stehen geblieben: „*Metaphysik ist die Wissenschaft von dem Absoluten*, das hinter der physikalischen Relativität liegt[1]); dieses *Absolute ist unerkennbar* und folglich eine Wissenschaft davon ein Unding."

Für uns hingegen ist das *Absolute ein Ausdruck ohne Bedeutung*, der fehlerhaft definiert ist; daher gesteht man von diesem Standpunkt der Metaphysik zu viel zu, wenn man ihr die *Existenz* eines wenn auch unerkennbaren *Gegenstandes* zugibt, auf den sie sich bezieht.

Aber die oben wiedergegebene Definition der Metaphysik ist unvollständig. Die Metaphysik kombiniert nicht lediglich sinnlose Zeichen, von denen sie vorgibt, sie hätten eine transzendente Bedeutung, sondern sie bemüht sich ihren Gegenstand durch *Bilder* darzustellen, die eine konkrete Bedeutung haben.

Wer sich nur ein wenig damit beschäftigt, eines jener *ontologischen Systeme* zu prüfen, in denen der Geist der Metaphysik am reinsten zum Ausdruck kommt, der findet bald, daß die *Wesenheiten*, aus denen dort die Welt aufgebaut wird, nichts anderes als *Bilder von realen Dingen* sind. Wenn auch ihre Erfinder sich dagegen verwahren, daß die von ihnen erdachten *Substanzen*, *Äther* oder *Flüssigkeiten* irgend etwas mit den konkreten Dingen zu tun hätten, mit denen die Worte assoziiert sind, da sie etwas darstellen, das hinter den Erscheinungen ist, so erkennt man doch leicht, daß diese Verschiedenheit nur darin besteht, daß man Eigenschaften, die verschiedenen Dingen zukommen, durch einen geistigen Assoziations- und Abstraktionsprozeß vereinigt hat.

1) Zu solchen Ehren hat es das Wort gebracht, mit dem man ursprünglich dasjenige Buch in der Sammlung der aristotelischen Werke bezeichnete, das auf das der Physik folgte!

Letzten Endes ist eine *Ontologie* eine *subjektive Darstellung der Wirklichkeit*, ein vom menschlichen Geiste geformtes *Modell*, dessen *Bestandteile zwar der Wirklichkeit entnommen, aber nach einem bestimmten subjektiven willkürlich für allgemein erklärten Gesichtspunkte zur Erklärung eines gewissen Komplexes von Erkenntnissen kombiniert werden.*

Die ersten ontologischen Systeme, die die Geschichte kennt, tragen diesen Charakter noch in besonders unbeholfener Weise zur Schau, so z. B. das System des THALES von Milet, der die Feuchtigkeit erklärte, indem er das „Wasser" als den Ursprung aller Dinge ansah. In den höher entwickelten Lehrgebäuden ist der Assoziations- und Abstraktionsprozeß komplizierter.

Aber in der modernen Philosophie tritt noch die transzendente Art hinzu, in der man die Universalität des Systems versteht; dieses soll nicht nur imstande sein, jedes mögliche neu hinzutretende Datum zu erklären, sondern es macht sich auch anheischig, das *Ganze der Wirklichkeit* selbst und somit das Absolute im Gegensatz zum Relativen zu begreifen.

Der theologische Ursprung der heutigen Metaphysik erklärt zur Genüge, daß sie den erwähnten Charakter angenommen hat. Immerhin erkennt man von einem gewissen Gesichtspunkt aus, wie diese Degeneration, die eine systematische Verfehltheit in die Ontologien bringt, sich nach psychologischen Gesetzen aus jener philosophischen Methode entwickeln mußte, die nach einigen vorbereitenden Betrachtungen sich gänzlich von der Außenwelt abkehrt. Allerdings erlaubt eine solche Abkehr dem Denker sein eigenes Weltbild für abgeschlossen zu halten, so daß die *Unendlichkeit* der Welt, die eine Folge des *genetischen* Prozesses ist, durch den wir unsere Erkenntnisse erwerben, in das erwähnte Bild nicht aufgenommen werden kann, es sei denn, daß man sie als eine *aktuale* auffaßt.



Doch, anstatt uns noch länger bei der Kritik jener transzendenten Verfahren aufzuhalten, deren Nichtigkeit wir bereits gezeigt haben, wollen wir lieber anerkennen, daß auch in den Ontologien der modernen Metaphysik sich immer ein *System von Bildern*, ein *Modell* findet, das sich zuweilen in geeigneter Weise einer Gruppe realer Tatsachen anpassen läßt und das jedenfalls, indem es neue Assoziationen auslöst, in der Entwickelung der Wissenschaft eine nützliche Rolle spielen kann. Einzig diesen Bestandteilen ist es zu verdanken, wenn man in den sonderbarsten metaphysischen Systemen Bemerkungen begegnet, die eine später wirklich eingetretene wissenschaftliche Entdeckung vorauszuahnen scheint.

Anderseits sind neben den metaphysischen Ontologien, die ihren Anspruch, eine *endgültige* und *vollständige* Wissenschaft zu liefern nicht verhüllen (und die sich nicht die Mühe nehmen, zu untersuchen, ob solche Eigenschaftswörter vor diesem Hauptwort überhaupt einen Sinn haben) für ein begrenztes Gebiet von Erkenntnissen andere *ontologische Systeme* konstruiert worden und werden es noch tagtäglich. Auch hier fehlt nicht die Tendenz des menschlichen Geistes, sich in ihrer Betrachtung zu isolieren und ihre Gültigkeit über ihren ursprünglichen Bereich auszudehnen![1])

---

1) Ein charakteristisches Beispiel ist die *Entwickelungslehre*, die bei SPENCER ein richtiges *metaphysisches System* geworden ist, wenn auch ohne den Fehler des Transzendentalismus, für den der Autor nur *außerhalb* des positiven Teiles seiner Philosophie einen Platz hat.

Um die Entwickelung außerhalb des Feldes der Biologie (wo sie eine wissenschaftliche Theorie ist) zu rechtfertigen, läßt sich der große Philosoph verleiten unter seine Grundsätze solche aufzunehmen, wie die „Unbeständigkeit des Homogenen", seine Differenziation unter dem Einfluß „zufälliger Kräfte" und ähnliches

Diese bescheideneren und nützlicheren Konstruktionen, die sich oft verborgen in der Wissenschaft finden, sind der unerbittlichen Kritik Comtes nicht entgangen, sondern er hat sie als metaphysisch gebrandmarkt. Der Äther oder die Fluida, mit denen die Physiker in ihren Hypothesen die unsichtbare Welt bevölkern, haben vor seinen Augen keine Gnade gefunden; und das gleiche gilt von so vielen anderen ähnlichen Begriffen, die auch heute noch von vielen Gelehrten angewandt werden. Jeder, der vom Geiste des Positivismus angehaucht ist, wird zugeben, daß Comtes Verwerfungsurteil insoweit berechtigt ist, als solche Konstruktionen und Theorien mit dem Anspruch auftreten, *objektive Erkenntnisse* darzustellen; daß aber diesen (sagen wir ruhig *metaphysischen*) Theorien nicht in der Entwickelung der Wissenschaft als *psychologischen Vorstellungen* ein gewisser Wert zukommt, diese Behauptung kann man nicht ohne vorhergehendes gründlicheres kritisches Studium dieser Entwickelung annehmen.

Doch es ist nunmehr an der Zeit, den Positivismus in bestimmten wissenschaftlichen Gebieten einer Kritik zu unterwerfen.

## § 23. Physikalischer Positivismus.

In keinem andern Zweige des Wissens hat die positivistische Lehre so große Erfolge zu verzeichnen wie gerade neuerdings in den physikalischen Wissenschaften. Das erscheint übrigens natürlich, wenn man bedenkt, daß wir der Physik den ersten realistischen Begriff des

mehr: Sätze, für die schwerlich ein Jünger der Mechanik die volle Verantwortung übernehmen wird, denen aber jeder den Wert von in gewisser Hinsicht ziemlich glücklich gewählten *Bildern* zugestehen wird.



Faktums verdanken und daß in der Physik die experimentelle Methode ihren Ursprung hat.

Den höchsten, den reinsten Positivismus findet man z. B. in den Werken von Mach und Kirchhoff. Dieser ging so weit, aus der Mechanik den Begriff der *Kraft* zu verbannen, denn er schien ihm, besonders in der Astronomie, ein subjektives Element in der Darstellung der Bewegung zu bilden. Die physikalischen Theorien liefern für jede Gruppe von Erscheinungen eine Differentialgleichung, die für sich allein alle Einzeltatsachen umfaßt, sie werden systematisch von allem gereinigt, was lediglich anschauliche Bedeutung besitzt.

Aus dieser Betrachtungsweise ergibt sich eine unerwartete Konsequenz, die Poincaré in einer genialen Bemerkung hervorhebt: Wenn nämlich für eine Gruppe von Erscheinungen *eine mechanische Erklärung* existiert, so gibt es deren unendlich viele.

Es gibt z. B. eine mechanische Erklärung des Lichtes, nach der dieses auf einer gewissen Art von *Äther*schwingungen beruht; daraus allein folgt, daß man auf unendlich viele verschiedene Weisen andere Reihen von Schwingungen konstruieren kann, die gleichfalls auf alle Lichterscheinungen passen.

Die Sache erscheint durchaus paradox: mechanische Theorien können, obgleich unter sich verschieden, doch zugleich *wahr* sein, d. h. gleichermaßen der Wirklichkeit entsprechen, indem sie nämlich die gleichen Tatsachen umfassen und sich nur in dem unterscheiden, was an ihrer Darstellung subjektiv ist.

Welch ein Fortschritt vom Standpunkt der Logik! Alle die müßigen Diskussionen über die Wahl zwischen *äquivalenten* Theorien erweisen sich in unerwarteter Weise als entschieden, man gelangt dahin, jede spezielle Darstellung der Tatsachen aufzugeben und nur in jedem einzelnen Falle danach zu fragen, ob sie eine mechanische

Erklärung zulassen. So befreit sich die Physik von gewissen traditionellen Methoden; es scheint schwer die Durchführung des positivistischen Gedankens in dieser Wissenschaft noch weiter zu treiben.

Aber die Emanzipation ist noch nicht vollkommen, es bleibt noch eine Notwendigkeit für den menschlichen Verstand, sich konkrete mechanische Bilder zu machen, und man würde einen Fehler begehen, wenn man zwei Theorien von verschiedenem subjektivem Wert als völlig gleichberechtigt betrachten wollte.

In diesem psychologischen Gesichtspunkt liegt auch die Kraft, die den Menschen vorwärts treibt auf dem Wege der Entdeckungen; daher sind auf jedem Gebiete nur wenige Theorien erdacht und ernsthaft diskutiert worden, nämlich diejenigen, die dem Bedürfnis nach Einfachheit genügten, das dem menschlichen Verstande innewohnt.

Der englische Geist eines MAXWELL oder THOMSON scheut nicht davor zurück, solchen Theorien bis in die kleinsten Einzelheiten zu folgen; und die konkrete Vorstellung der Ätherbewegung führt sie zur Entdeckung von Tatsachen, die die Bewunderung der ganzen gelehrten Welt erwecken.

Wir verlassen nicht das Gebiet der physikalischen Erkenntnis, wenn wir kurz die Frage der *atomistischen Hypothese* berühren, in der sich der psychologische Wert metaphysischer Vorstellungen besonders klar zeigt.

Wir wollen hier nicht die Widersprüche besprechen, die sich an die Annahme von Atomen knüpfen. Da wir uns keinen Teil der Materie anders vorstellen können als mit allen ihren Eigenschaften begabt, so stößt das Bild, das wir uns von den Atomen machen, die wir uns als sehr kleine Körper vorstellen, auf vielleicht unüberwindliche Schwierigkeiten, sobald wir ihm Realität beilegen.



Allerdings können wir nicht verschweigen, daß die neuen Untersuchungen, die von dem Experiment mit der CROOKESschen Röhre ausgehen, und die neuen Gedanken über die elektrische Erklärung der Unteilbarkeit des Atoms vielleicht die schwerwiegendste der erwähnten Schwierigkeiten zu beseitigen geeignet sind. Nichtsdestoweniger würde eine ähnliche Schwierigkeit beim *Elektron* wieder auftreten, so daß ein auf das Positive gerichteter Geist in der atomistischen Hypothese nichts anderes als eine subjektive Vorstellung sehen kann.

Wenn man das Atom der konkreten Eigenschaften beraubt, die seinem Bilde zukommen, so muß man es als ein Symbol betrachten. Der logische Wert der atomistischen Theorie hängt dann davon ab, ob es gelingt, eine Zuordnung herzustellen zwischen ihren Symbolen und der Wirklichkeit, die sie darstellen soll.

Betrachten wir jetzt die Zeit, in der diese Theorie in die moderne Chemie aufgenommen wurde, so sehen wir, daß die rohen atomistischen Formeln nur die unveränderlichen Beziehungen ausdrücken, die zwischen den Verbindungen der einfachen Körper dem Gewicht und Volumen nach bestehen, wobei letztere auf einen wohldefinierten gasförmigen Zustand bezogen werden.

Nachdem aber die atomistische Terminologie einmal in die Wissenschaft eingeführt ist, führt sie dazu, die Bedeutung der Symbole zu erweitern und in der Wirklichkeit nach Tatsachen zu suchen, die diesem erweiterten Begriff entsprechen.

Die Theorie schreitet vorwärts, sozusagen angetrieben von ihrer metaphysischen Seite oder, wenn man will, von der Ideenassoziation, die durch die konkrete Atomvorstellung ausgelöst wird.

So treten in der Chemie der Kohlenstoffverbindungen an Stelle der rohen Formeln *Strukturformeln;* diese stellen mit Hilfe der Gruppierung der Atome im Molekül For-

mationsbeziehungen zweiten Grades dar, d. h. Beziehungen, die bei gewissen chemischen Umsetzungen stattfinden, bei denen einzelne Gruppen von Elementen einen invarianten Charakter zeigen. Da hier das ebene Bild des Moleküls nicht genügte, um z. B. die Tatsachen der Isomerie zu erklären, so hat VAN T'HOFF zur stereochemischen Darstellung gegriffen.

Müssen wir noch an die kinetische Gastheorie erinnern, an die Tatsachen, die durch die Dissoziation der Moleküle in Ionen erklärt worden sind, oder an die Hypothesen, auf die z. B. VAN DER WAALS durch den Gedanken geführt wurde, daß die Atome wirkliche räumliche Ausdehnung besitzen? Sollen wir von den physikalischen Phänomenen ganz anderer Art (z. B. von den Farben der dünnen Häutchen, aus denen die Seifenblasen bestehen) sprechen, die W. THOMSON mit der Messung dieser Größe in Verbindung gebracht hat?

Diese Menge von Resultaten zeigt deutlich, daß es für den Fortgang der Wissenschaft keineswegs nützlich ist, einer Theorie den Weg zu versperren, indem man nur auf ihren positiven Gehalt, d. h. auf die Gesamtheit der Tatsachen sieht, die sie erklärt; ihr Wert beruht in weit höherem Maße in den Hypothesen, die sie vermöge der psychologischen Vorstellung ihrer Symbole zu suggerieren vermag.

Wir wollen daraus nicht den Schluß ziehen, daß die atomistische Hypothese den außerordentlich verfeinerten Sinneswahrnehmungen eines Wesens entsprechen müßte, das einem vervollkommneten Menschen gleichen würde; wir wollen überhaupt nicht mit der Möglichkeit solcher imaginären Wahrnehmungen argumentieren, sofern sie als eine Steigerung der unsrigen gedacht sind. Sondern wir wollen in bezug auf die atomistische Theorie ein Wort wiederholen, das ein berühmter Meister über die Einheit der Materie gesagt haben soll: wenn bei einer ersten



Prüfung eine Tatsache, die der atomistischen Vorstellung widerspricht, als möglich erscheint, so besteht eine große Wahrscheinlichkeit, daß dies durch die Erfahrung widerlegt wird.

Besteht nicht in dieser Fähigkeit, sich den Tatsachen anzupassen und ein Bild von ihnen zu geben die *positive* Bedeutung einer Theorie?

## § 24. Biologischer Positivismus.

Wenn mehrere Alpinisten auf verschiedenen verschlungenen Pfaden durch dichte Wälder schließlich den Gipfel eines Berges erklommen haben, so können sie wohl die Meinungsverschiedenheiten über die Wahl des Weges, die sie vorher trennten, vergessen, um gemeinsam die Erreichung des ersehnten Zieles zu feiern. Angesichts der großartigen Aussicht, die alle Anstrengungen belohnt, werden unsere Leute alle Diskussionen aufgeben bis zu dem Augenblick, wo der Wunsch, noch höher zu steigen, sie von neuem zur Wahl des Weges zwingt.

So auch die Physiker; wenn sie dazu gelangt sind, vielfache Arten von Tatsachen unter eine einzige allgemeine Tatsache zusammenzufassen, die sich in einer Differentialgleichung ausdrückt, so können sie die Frage der subjektiven Vorstellung ruhen lassen, die sie zu dem Resultat geführt hat. Erst ein weiterer Fortschritt wird eine Untersuchung dieses Gegenstandes erfordern.

Aber in den biologischen Wissenschaften ist die Zahl der einfachen und allgemeinen Gesichtspunkte, zu denen man bisher gelangt ist, gering; die enorme Kompliziertheit der Tatsachen erschwert ihre Gewinnung; die aus kärglichen Beobachtungen und vorläufigen Assoziationen entstandenen Vorstellungen erweisen sich allzuoft als unzulänglich; und zu dem Gefühl der Ohnmacht

gesellt sich leicht die Vorstellung von etwas Vagem, Unbestimmten, Mystischen, gewissermaßen eine geheime Furcht, die den Forscher auf seinem dunklen und verwachsenen Pfade bedrückt und seine ohnehin schwachen Kräfte noch mehr vermindert.

Dieses Bild erläutert recht gut den Zustand der biologischen Wissenschaften zu der Zeit, als unter dem Einfluß der allgemeinen Philosophie der Geist des Positivismus gleich einem frischen Winde in sie hineinblies.

Daher bestand die erste Wirkung des Positivismus auf diesem Gebiete der Wissenschaft in der Ausschaltung der illusorischen mystischen Erklärungsversuche und in einer Belebung der Detailforschung: die geduldigen anatomischen Untersuchungen, mit denen schon CUVIER mit Hilfe des Sektionsverfahrens in den inneren Bau des tierischen Organismus eingedrungen war, erweitern sich zur Embryologie der Seetiere und führen später zur Lehre von den Zellen dank den Entdeckungen der *histologischen Technik*

Mit den anatomischen Forschungen halten die Fortschritte der Biochemie und der Physiologie gleichen Schritt; der ersten gelingt es, die Ansicht zu widerlegen, daß die organische Materie anders zusammengesetzt sei als die anorganische; die andere führt viele physiologische Vorgänge auf physikalisch-chemische zurück und erklärt sie dadurch. Diese einzelnen gesicherten Tatsachen bilden offenbar den bedeutsamsten Teil der Erfolge, die die biologische Forschung unserer Tage aufzuweisen hat

Aber sie entsprechen der analytischen Absicht einer Forschung, die darauf ausgeht, die Lebenserscheinungen physikalisch-chemisch zu erklären. Schon COMTE hat, obgleich er die Ähnlichkeit zwischen Biologie und Physik hervorhob, auf ihre Unterschiede aufmerksam gemacht und Einspruch erhoben gegen den Versuch, die eine auf



die andere zurückzuführen; und die Natur der synthetischen Physiologie im Gegensatz zur Physik ist von CLAUDE BERNARD klar auseinandergesetzt worden: die *physiologische Synthese* besteht in einer neuen Art von Beziehungen, in einer neuen Gruppierung der Elementarerscheinungen, die als ein *hierarchisch determiniertes* System aufgefaßt werden.

Diese Synthese nun kommt in gewissem Grade in einigen allgemeinen Vorstellungen zum Ausdruck, die gerade auf diesem Gebiete die Rolle von leitenden Ideen der Untersuchung spielen.

Wenn die *Entwickelungshypothese* für die Anatomie und Physiologie diese Rolle übernommen hat, so verdankt man es gerade den theoretischen Konstruktionen, daß sie den Anstoß gegeben hat zu der Erklärung der Tatsachen der *Vererbung* und der *Variation* und zu den Ausblicken auf die damit zusammenhängenden Probleme der allgemeinen Zellenlehre.

Bei flüchtiger Betrachtung dieses Gebietes sehen wir bald, daß die bloße Vergleichung der Beobachtungen und Experimente, mit einem Wort das positive Studium der Tatsachen nach ihrem objektiven Gehalt anscheinend nicht mehr ausreicht. Von neuem erheben sich auf den Trümmern der alten diskreditierten Theorien des *Animismus*, der *Lebenskraft*, und des *nisus formativus* neue Vorstellungen, die aber von einer geistigen Strömung gespeist werden, welche sich früher wegen mangelnder Kenntnisse nicht in gebührendem Maße ausbreiten konnte.[1])

Da auf allen Seiten das Studium der Zelle betrieben wurde, auf das die Probleme der Zeugung und der

---

1) Vgl. IVES DELAGE „La structure du protoplasma et les théories sur l'hérédité, et les grands problèmes de la Biologie générale" Paris, C. Reinwald, 1895.

histologischen Entwickelung hinausliefen, so versteht man, daß die positive Forschung sich den innersten Eigenschaften des Plasmas und speziell der Keimelemente zuwandte und versuchte, diese realen Unterschiede mit den verschiedenen Eigenschaften der Organismen in Verbindung zu setzen, die sich daraus entwickeln.

Aber dieser Weg scheint nicht direkt zum Ziele zu führen; ein Beispiel wird die Sache klar machen.

Zu den deutlichsten Unterschieden, die sich in dem Bau der Keimzellen zeigten, gehörte die Zahl der Chromosomen, d. h. derjenigen Teile des Zellkerns, die sich mit dem Mikroskop unterscheiden lassen.

Diese Zahl bildet eine konstante Eigenschaft einer jeden zoologischen Spezies, die auch bei der Zeugung unverändert bleibt infolge der Zellteilung, die vor der Befruchtung stattfindet.

Es erscheint nun a priori sehr natürlich in dieser Zahl ein Zeichen für die Stufe zu suchen, die in der Phylogenese erreicht ist: aber eine elementare Beobachtung zeigt ihre geringe Bedeutung für den Charakter der Art. Es genügt in der Tat die Bemerkung, daß *Ascaris megalocephala* (auf die sich die Untersuchungen der elementarsten entwickelungsgeschichtlichen Erscheinungen beziehen) zwei *völlig ähnliche* Varietäten aufweist, *Ascaris univalens* und *Ascaris bivalens*. Die Keimzelle der ersten enthält *zwei* Chromosomen, während die der zweiten deren *vier* enthält!

Wenn man daher die Eigenschaften der Tiere aus dem Bau ihrer Keimzelle erklären will, so darf man diese Erklärung nicht von dem verlangen, was man in der Zelle selbst sieht; sondern man muß die Hypothese weiter treiben, indem man sich ein Bild von dem Zellenbau in seinen unsichtbaren Teilen macht.

Anderseits zwingen die mannigfaltigen Erscheinungen, die im allgemeinen mit dem Protoplasma zu-



sammenhängen, bereits dazu, seine Struktur als außerordentlich kompliziert anzunehmen.

Nur um die Bewegungen des Plasmas zu erklären, haben sich viele Autoren die verschiedensten Vorstellungen von seiner physikalischen und chemischen Natur gemacht; wir wollen von den neuesten die von Quincke und Bütschli erwähnen (der letztere konstruierte eine Substanz von zellenförmiger Struktur mit Hilfe eines Gemenges von Öl und einer Lösung von Kaliumkarbonat); ferner die von Berthold, der das Plasma mit einer außerordentlich komplizierten Emulsion vergleicht, in der gewisse osmotische und chemische Erscheinungen auftreten; endlich die von Verworn, der (um von der Fähigkeit, sich zusammenzuziehen, Rechenschaft zu geben) sich das Plasma aus Molekülen zusammengesetzt denkt, die durch drei Zustände hindurchgehen können, indem sie oxydieren und plötzlich zerfallen. Diese Theorien tragen das Gepräge von, wenn man will, geistvollen, aber auch etwas groben *Bildern;* ihr primitiver und eng umgrenzter Charakter verleiht ihnen einen geringen wissenschaftlichen Wert, so daß trotz der merkwürdigen von Blütschli erzielten Reproduktion der kariokinetischen Figuren wenige Biologen geneigt sind in solchen Gesichtspunkten mehr als erstaunliche Analogien zu erblicken; nur wenige trauen ihnen zu bei weiterem Eindringen zur Entdeckung neuer Tatsachen zu führen. Daher der große Unterschied, der solche Theorien von den metaphysischen Ontologien trennt, wo die umfassendere Vorstellung bei dem Autor die Illusion erzeugt, als habe er die Wirklichkeit als Ganzes oder wenigstens einen Teil von ihr erschöpft.

Viel näher der Metaphysik verwandt erscheinen hingegen die *allgemeinen Theorien* über den Bau der Keimzellen, Theorien, die veranlaßt wurden durch die

konstatierte Unzulänglichkeit der physikalisch-chemischen Begriffe über die Struktur des Plasmas, insofern diese uns nur über die Zahl und Beschaffenheit seiner Bestandteile belehren, nicht aber über die speziellen Lebenserscheinungen, die aus der Verteilung und Gruppierung derselben entstehen.

Trotzdem sie auf einer viel tieferen Stufe der Ausbildung stehen, zeigen diese Theorien in ihrer Konstruktion eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit den physikalischen Darstellungen, eine Analogie, die um so mehr hervortritt, als die moderne Ansicht sich vom Physizismus entfernt hat. Wie die Physiker ihre Äther und Fluida in Analogie zu den festen, flüssigen und gasförmigen Körpern geschaffen haben, indem sie deren Eigenschaften entsprechend den zu erklärenden Tatsachen kombinierten, so haben die Biologen versucht, sich eine Vorstellung von der Keimzelle zu machen nach dem Bilde der Aggregate von einzelligen Wesen, oder nach dem der Tierstöcke oder geradezu nach dem der organisierten tierischen Gesellschaften.

In der Tat stellen sie sich die Zelle als ein Aggregat oder einen Organismus von Partikeln vor, denen schon gewisse elementare Eigenschaften der belebten Materie zugeschrieben werden; schon die Worte, mit denen sie die gegenseitige Wirkung und Gegenwirkung dieser Partikel bezeichnen, drücken klar eine solche Vorstellung aus.

Dies ist wenigstens der Grundcharakter der neuesten Theorien, die Delage als *„mikromeristisch"* und *„organizistisch"* bezeichnet. Wissenschaftliche Theorien, sagt man, nicht metaphysische; denn in der Tat erheben sie nicht den Anspruch universelle Systeme zu bilden, sie bauen sich vielmehr selbst erst auf einer atomistischen Vorstellung von der Materie auf; auch verlieren sie sich nicht in die mystischen Nebel des alten Animismus,



noch erstreben sie in irgendeiner Weise eine transzendente Erklärung des Lebens.

Einige sehen in ihnen sogar *positive* Theorien, weil sie die Tatsachen nicht aus den Augen verlieren und sich gemäß den Beobachtungen und Experimenten anpassen und umformen; aber dieses Attribut hat im Munde der Biologen nicht seine strenge Bedeutung entsprechend dem comtischen Geist, der die Theorien der Elektrizität und des Lichtes und die atomistische Theorie selbst verwirft, denen doch in diesem Sinne ein höherer Grad von Positivität zukommt.

Wahrhaft positiv kann eine Theorie nur genannt werden, wenn sie lediglich aus *Tatsachenhypothesen* besteht, wie aber soll man sich hier die *physiologischen Elementarteile*, aus denen sich die Zelle zusammensetzen soll, gewissermaßen als lebende Wesen vorstellen, da es doch ihr Grundcharakter ist, sich als *Organismen* darzustellen?

Man kann für die mikromeristische Hypothese das wiederholen, was über die atomistische gesagt worden ist; die Vorstellung von dem Atom als einem wirklichen materiellen Teilchen stößt auf die Schwierigkeit, daß man dieses Teilchen gewisser Grundeigenschaften wie der Teilbarkeit berauben muß; entsprechend stößt die Vorstellung von physiologischen Elementarteilen auf die Schwierigkeit, daß man etwas, was lebt, der Eigenschaft der Organisation berauben muß.

Es ergibt sich also, daß, wenn die einfache Annahme einer gewissen physikalisch-chemischen Konstitution das *Leben* des Plasmas nicht hinreichend erklärt, an dem Problem nichts geändert wird für diejenigen seiner Teile, die schon als lebend betrachtet werden, es sei denn, daß es gelingt, sie wirklich als *Elemente* zu fassen. Aus dem Versuch dieser Schwierigkeit zu entgehen entspringen auch die Unstimmigkeiten, die die Kritik in den einzelnen Theorien findet.

Diese Bemerkungen zeigen, daß man unrecht daran täte, diesen biologischen Theorien einen positiven Wert beimessen zu wollen, den wir nicht einmal ihren physikalischen Schwestern zuerkennen können. Aber das vermindert nicht ihren wissenschaftlichen Wert als Bilder oder Modelle, die geeignet sind auf Tatsachenhypothesen zu führen. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nicht einmal auf die Diskussion von Theorien einzugehen, die von Männern wie SPENCER, HAACKE, HAECKEL, DARWIN, WEISMANN, ROUX usw. aufgestellt worden sind. Es genügt einen raschen Überblick über die positiven Probleme zu geben, die sich dabei ergeben. Wie mannigfaltig und interessant sind diese Probleme, wenn auch das, was jene Theorien zu ihrer Lösung beitragen, noch so geringfügig ist!

Indessen hat natürlich jeder Autor in seine Vorstellung von der Keimzelle diejenigen Ansichten hineingetragen, die ihm in bezug auf das Leben der tierischen Aggregate oder der Arten eigentümlich sind; HAECKELS sogenanntes „*biogenetisches Grundgesetz*" sucht, indem es einen Parallelismus zwischen Phylogenese und Ontogenese annimmt, diese Übertragung zu rechtfertigen, die gewissermaßen eine Bedingung für die Fruchtbarkeit der Bilder ist, die aus den früher erwähnten Analogien und Vergleichungen entspringen. Nun sind natürlich diejenigen, welche die Hauptursache der Variation der Arten in der äußeren Umgebung erblicken, gezwungen, die Differenzierung des Plasmas *epigenetisch* zu erklären, indem sie die physiologischen Einheiten des Keims als gleichwertig ansehen; anderseits greifen diejenigen, welche die Hauptursache der Variation in inneren Eigenschaften der Art suchen, nach *präformistischen* Erklärungen im modernen Sinne des Wortes.[1])

1) Die alte Lehre von der Präformation oder Evolution nahm an, daß die Keime ineinandergeschachtelt seien, so daß jedes Ei oder Spermatozoon (nach den Ovisten oder den Spermatisten) alle Nachkommen als Embryonen enthalten sollte, die sich dann nur zu entfalten brauchten. Diese absurde Hypothese ist längst aufgegeben, auf Grund der mikroskopischen embryologischen Untersuchungen. Aber die neue Präformationslehre fordert die Existenz verschiedener Elemente im Keime als Repräsentanten, sei es der anatomischen Teile des ausgewachsenen Organismus, sei es seiner elementaren Eigenschaften oder Charaktere.



Hier seien einige Beispiele von dem Einfluß angeführt, den solche Ansichten auf die Forschung ausüben.

Die epigenetische Ansicht, die eine *Isotropie des Eies* voraussetzt, veranlaßt PFLÜGER den Einfluß der Schwerkraft auf seine Entwickelung aufzuklären, indem er (durch geeignete Versuche an befruchteten Froscheiern) zeigte, daß sich die Teilungsebenen senkrecht zu der einwirkenden Kraft ausbilden; gewöhnlich werden diese Versuche als Beweis für die *Isotropie des Zellplasmas* gedeutet. Aber demgegenüber hält ROUX an der *Anisotropie des Kernes* fest gemäß seiner Vorstellung, die zur Präformationslehre neigt, und diese Ansicht führt ihn dazu, experimentell zu untersuchen, wie die Entwickelung des Eies sich vollzieht, wenn sie durch eine langsame drehende Bewegung der Einwirkung der Schwerkraft entzogen wird, sie veranlaßt CHABRY, seine bewunderungswürdigen Experimente an den *Ascidien* auszuführen, indem er einige Blastomeren des Eies tötet und unvollständige Larven erhält.

Die Schlüsse, die durch diese Experimente nahegelegt erscheinen, werden ihrerseits widerlegt durch die Ergebnisse anderer Untersuchungen (DRIESCH, WILSON) an Amphibien, Seeigeln usw., wo trotz Abtötung einer Blastomere sich ein vollständiger Embryo entwickelt. Und eine Bestätigung der epigenetischen Ansicht von der Isotropie des Eies bedeuten auch einige Ergebnisse

der vergleichenden Embryologie, z. B. die, daß die Keimblätter bei den Manteltieren einander gleichen.

Solche offenbaren Widersprüche erhöhen nur das Interesse an den Versuchen so verschiedene Tatsachen adäquat zu erklären. Und jedenfalls stehen die oben erwähnten Beispiele nur in einer indirekten Beziehung zu den Ansichten über die Konstitution des Keims.

In höherm Maße zeigt sich allerdings die Wichtigkeit solcher Ansichten bei den allgemeinen Vererbungsfragen.

Bis vor wenigen Jahren wurde die *Erblichkeit der erworbenen Eigenschaften* als eine Tatsache angesehen, die vorzüglich zu den epigenetischen Ansichten stimmte. Da tritt, veranlaßt durch seine theoretische Vorstellung vom Keimplasma, WEISMANN auf und bestreitet sie kühnlich, und EMERY, der die Grundlage dieser Theorie billigt, macht sie annehmbarer, indem er (durch die *Enzymhypothese*) das Prinzip der Nichtvererbbarkeit abschwächt in bezug auf die allgemeinen Giftwirkungen.

Die jüngste Polemik über diese Frage zwischen WEISMANN und SPENCER ist zu bekannt. Es kommt uns nicht zu, hier eine Entscheidung zu treffen. Aber wer möchte die Wichtigkeit gewisser Vorstellungen verkennen, wenn sie die Macht haben, so lehrreiche Diskussionen hervorzurufen, wenn von ihnen neue Beobachtungen und Experimente, neue reale Unterscheidungen ausgehen, deren objektive Bedeutung von niemand bestritten werden kann?

Wir ahnen wohl den Einwand, den uns jemand machen könnte! Um solche fruchtbaren Debatten herbeizuführen, sind sicherlich gewisse allgemeine theoretische Ansichten notwendig, aber was hat das mit der detaillierten Vorstellung vom Plasma zu tun, in der sich WEISMANN gefällt? Ist es vielleicht nicht klar, daß die vielen genauen Einzelheiten dieses Autors, die vielen Beschreibungen von unsichtbaren Dingen, die



oft nicht einmal in Wirklichkeit denkbar sind, unnütze Anstrengungen einer fruchtbaren Einbildungskraft sind, die sich weit von der positiven Betrachtung der Tatsachen entfernt?

Wir antworten darauf: WEISMANN hat mit Hilfe einer systematischen Konstruktion von Bildern einige Tatsachenhypothesen auf dieselbe Weise gefunden, wie MAXWELL gewisse Beziehungen der Elektrizität und des Lichtes vorausgesagt hat mit Hilfe eines Modells aus einer Theorie, die selbst nicht durchaus eine Tatsachenhypothese war. Wir legen diesen Ansichten nicht eine positive Bedeutung bei, die sie nicht haben; wir trennen auch kritisch das, was daran physikalische oder biologische Hypothese ist, von dem, was lediglich vorstellungsmäßigen oder psychologischen Wert hat. Aber wir verkennen nicht, daß eine solche Trennung gewöhnlich nur möglich ist, *nachdem* die Theorie ihren Dienst getan hat, und vor allem leugnen wir nicht darum die Wichtigkeit eines im konstruktiven Stadium einer Wissenschaft allgemein üblichen Verfahrens, weil es nicht von Anfang an die Merkmale einer positiven Erkenntnis aufweist.

Auch die wissenschaftliche Konstruktion ist ein Faktum, das in seiner psychischen Realität studiert werden muß, und dessen Erkenntniswert man zugeben muß, sofern durch sie positive Fragen irgendwie geklärt oder gelöst werden!

## § 25. Psychologischer Positivismus.

Eine Lehre, die aus dem Begriff des Faktums das vorstellungsmäßige Element eliminiert, kann für eine eigene Wissenschaft von den Vorstellungen keinen Raum bieten.

Wir dürfen uns daher nicht wundern, in dem System COMTES eine Verwerfung der Psychologie zu finden und

den Versuch sie auf ein Kapitel der Physiologie zu reduzieren. Vergeblich erweckten die neuesten Entwickelungen von HELMHOLTZ, FECHNER, WEBER, WUNDT usw. die Hoffnung, das positivistische Ideal verwirklicht zu sehen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen haben uns allerdings eine höchst wertvolle Analyse der Sinnesempfindungen geliefert; morgen vielleicht werden sie zu noch verborgeneren Erscheinungen vordringen; die Assoziationen der sinnlichen Bilder, die Gehirnprozesse, die den höheren Tätigkeiten entsprechen, werden durch sie aufgeklärt werden. Die physiologische Methode kann so zu einem wichtigeren Hilfsmittel für das Studium der psychischen Grundtatsachen werden.

Aber das Unternehmen, die psychologische Erkenntnis auf diese Analyse zu beschränken, stößt auf ähnliche Schwierigkeiten, wie sie sich der Reduktion der Physiologie auf Physik entgegenstellten. Die psychologische Synthese entwickelt andere Beziehungen als jene Elemente: die psychologische Verknüpfung der Erscheinungen ist eine andere als diejenige, die dem Gesichtspunkt der Physiologie entspricht.

Deshalb wird stets neben der physiologischen Psychologie Raum vorhanden sein für eine *Beobachtungspsychologie*, die von der englischen Schule seit LOCKE in positivem Sinne betrieben wird; diese vergleichende Wissenschaft, die die von CLIFFORD als ejektiv bezeichnete Methode befolgt, wird von DARWIN, SPENCER, ROMANES usw. auf die psychischen Äußerungen der Tiere ausgedehnt und gelangt schließlich dahin, unter diesem Gesichtspunkt die sämtlichen primitiven Lebenserscheinungen zu untersuchen (Psychologie der Protisten von VERWORN).

Vor allem aber bleiben die eigentlichen Objekte der Psychologie die Gefühls- und Verstandesäußerungen des



Menschengeistes: Wissenschaft, Kunst, Religion, Sprache, Recht usw.

Nehmen wir einmal an, der physiologische Mechanismus der musikalischen Erfindung sei vollkommen aufgeklärt: dem Rhythmus entsprächen gewisse Variationen nervöser Tonalität, Veränderungen des Blutdrucks, anabolische und katabolische Erscheinungen usw.; wäre wohl das künstlerische Schaffen BEETHOVENS auf diese Weise erklärt?

Es sei dem Physiologen zugestanden, daß er die Gesamtheit der Gehirnvorgänge charakterisiert hat, die einem logischen Schluß entsprechen, was trägt eine solche Erkenntnis bei zum Verständnis des Gedankenprozesses, der einen NEWTON auf seine unsterbliche Entdeckung führte?

Wir verlangen etwas anderes von der Erklärung dieses Prozesses; es handelt sich um Beziehungen, zu deren Verständnis wir auf KEPLER und GALILEI und noch weiter zu den Vorläufern der Mechanik in der alexandrinischen Schule zurückgehen müssen. Das sind weit voneinander getrennte Gehirne, in denen sich physiologisch ganz getrennte Vorgänge abgespielt haben; und ihre von uns geforderte Synthese muß diese Vorgänge in die Sprache des Gedankens übersetzen, nicht den Gedanken in die Sprache der Physiologie.

Untersuchen wir einmal die Entwickelung der Sprachen. Die Sprachwissenschaft, das vergleichende Studium der Grammatik ergeben die Gesetze, nach denen sie sich verändern wie lebende Organismen; diese Gesetze beziehen sich zum Teil auf phonetische Elemente, zum Teil auf begriffliche. Und da die Wirkung einer großen Anzahl sehr verschiedener Erscheinungen zwischen den Wirkungen der einzelnen einen Mittelwert bildet, so erscheint es nicht ungereimt in einigen von ihnen die Spuren physiologischer Ursachen zu suchen.

Aber wer sähe nicht, wie töricht die Annahme wäre, daß die Sprachwissenschaft sich eines Tages auf das Studium der Brocaschen Gehirnwindung reduzieren könnte?

Ohne noch weitere Beispiele anzuführen, halten wir die Behauptung für hinreichend geklärt, daß das physiologische Mittel niemals verwechselt werden darf mit dem Zweck der psychologischen Forschung, d. h. *einer Erkenntnis, die die in diesem Gebiete geforderten Voraussagungen zu leisten vermag.*

## § 26. Der Positivismus in Geschichte und Soziologie.

Die Stellung Comtes zu den historischen und soziologischen Wissenschaften ist ziemlich merkwürdig, denn die besonderen soziologischen Ansichten des Meisters scheinen dem indirekten Einfluß zu widersprechen, den der Geist des Positivismus auf diesen Gebieten ausübt.

Das Bestreben, die Tatsachen sicherzustellen, macht die historische Untersuchung zur Grundlage der soziologischen Wissenschaften und verbessert die Methode jener Untersuchung durch die Quellenkritik. Daraus folgt, daß das historische Faktum in seiner Objektivität als unabhängig von der traditionellen Darstellung aufgefaßt wird, entkleidet alles dessen, womit die künstlerische Einbildungskraft es umgibt, in der noch lebendigen Wirklichkeit seiner materiellen Spuren, die von den vielfältigen und zahlreichen Dokumenten gebildet werden.

Aber gegenüber der hieraus sich ergebenden Spezialisation der Forschung hat Comte auch hier die Notwendigkeit der Synthese betont. Wenn er nun auch hierin mit seinen übrigen Ansichten in Übereinstimmung bleibt, so scheint dies doch nicht in gleichem Maße der Fall zu sein, wenn er diese Synthese an das *Gesetz der drei Stufen* knüpft.



Die Erklärung des sozialen Fortschritts aus der Entwickelung der Erkenntnis aus der theologischen Phase zur metaphysischen und zur positiven, die Unterordnung der Tatsachen unter eine ideologische Darstellung, widerstreiten dem Bestreben, systematisch alle symbolischen Darstellungen zu eliminieren.

Die mildeste Kritik, die man daran üben kann, besteht in der Bemerkung, daß die Ausarbeitung einer soziologischen Wissenschaft den Durchgang Comtes durch das metaphysische Stadium erforderte!

Eine weitere Entwickelungsstufe kann man in der Tat in der ökonomischen Lehre finden, die heutzutage unter dem Namen des „*historischen Materialismus*“ bekannt ist. Diese dem Geiste des Positivismus vollkommen entsprechende Lehre gibt heute ein wichtiges leitendes Kriterium der historischen Forschung ab, indem sie einmal eine Auswahl der für gewisse Interessen notwendig zu untersuchenden Fakta gestattet und diese anderseits durch neue bemerkenswerte Beziehungen verknüpft.

Betrachtet man aber den historischen Materialismus als systematische Ansicht, die andere geschichtliche Faktoren und besonders die ideellen eliminiert oder übergeht, so zeigt sich die Notwendigkeit einer Kritik, die dem psychologischen Element seinen Platz wieder anweist. Gegenüber der Behauptung, daß die Willensäußerungen auf sozialem Gebiete und die Ideen, von denen sie beeinflußt scheinen, in Wahrheit durch den Druck der ökonomischen Forderungen bestimmt werden, steht die Gegenbehauptung, daß die wirtschaftlichen Beziehungen ihrerseits auf viele verschiedene Weisen willkürlich verändert werden, z. B. durch Rechtseinrichtungen.

Diese können als *historische Gebilde* nur verstanden werden, wenn man die realen und *idealen Faktoren des*

*Rechtes* zugleich betrachtet; und wenn man in der *begrifflichen Form* desselben eine Vereinigung der Normen erblickt, die als Ausfluß eines als stetig vorausgesetzten Willens angesehen werden, der ein „Reich der Gleichheit" garantiert und danach strebt sich *durch Analogie auszudehnen*, so daß bei der Entscheidung von Interessenkonflikten eine *Ökonomie des Wollens* zustande kommt.

## § 27. Die positiven Ziele, die man einer Theorie der Wissenschaft stecken kann.

Wir haben in der vorstehenden Kritik einige der positivistischen Schule eigentümliche Ansichten herauszuheben versucht, die den Begriff der wissenschaftlichen Realität auf den objektiven Bestandteil beschränken, da, wo es dem richtig verstandenen Geist des Positivismus gemäß erscheint, auch den subjektiven in Betracht zu ziehen.

Im physikalischen und biologischen Gebiete bezieht sich das subjektive Element auf die Darstellung der Tatsachen und hat besondere Wichtigkeit bei der Erwerbung der Erkenntnis.

Im Gebiete der psychologischen und sozialen Wissenschaften bildet dieser Bestandteil einen viel wesentlicheren Teil des zu erklärenden Faktums, insofern als sich an ihn die *Voraussagen* knüpfen, die den Gegenstand der Erkenntnis bilden.

Die Unterscheidung von Subjektivem und Objektivem hat übrigens nur relativen Wert, und die Betrachtung des Ganzen der Erkenntnis führt zur Verschmelzung der Gesichtspunkte von Physik und Psychologie, indem sie schon in der ersten etwas Psychologisches hervortreten läßt.

Da aber die vorstehenden Bemerkungen die Aufgabe einer Kritik erklärt haben, die in der Wissenschaft Subjektives und Objektives trennt, indem sie zeigten, daß diese Kritik einen allgemeinen Faktor bei dem Fortschritt der Wissenschaft bildet, so sehen wir jetzt aus dieser Kritik sich die großen Probleme der *positiven Erkenntnislehre* erheben, und wir verstehen Bedeutung und Zweck dieser Lehre.



Vor allem müssen die Kriterien festgestellt werden für unseren Begriff der objektiven Realität im Gegensatz zu der Illusion und der Sinnestäuschung. Die wahrhaft positive Entwickelung einer solchen Untersuchung müßte eine reiche Anwendung der Theorie auf dem Gebiete der Beobachtungs- und Experimentiertechnik gestatten: die Korrektur des *persönlichen Fehlers* bei astronomischen und geodätischen Messungen bietet dafür ein lehrreiches Beispiel.

Aber neben dem, was das Sinnesorgan gibt, finden sich im Prozeß der Erkenntnis auch die Daten der psychischen Verarbeitung.

Der ursprüngliche Begriff der Realität erweitert und ergänzt sich; das rohe Faktum entwickelt sich und nimmt die Eigenschaften der wissenschaftlichen Tatsache an. Wie geht dieser Prozeß vor sich, wie und wie weit kann man dabei subjektive und objektive Elemente unterscheiden? Was bleibt dann noch willkürlich in der Wissenschaft, und welche Bedeutung ist dieser Willkür beizumessen?

Die Analyse des Tatsachenbegriffs wird uns zuerst zu dem allgemeinen Resultate führen, daß die wissenschaftliche Erkenntnis sich in Begriffen zu vollziehen strebt, und sie wird uns dadurch einige Grundkriterien für die Bewertung wissenschaftlicher Theorien an die Hand geben.

Nun werden wir in der Begriffsbildung nicht nur (in Übereinstimmung mit Mach) eine *Denkökonomie* finden, sondern auch eine *psychologische Entwickelung*

nach einem bestimmten Punkte hin; das Studium dieser Entwickelung wird uns dann veranlassen einerseits die *Probleme der Logik* zu diskutieren, anderseits die *Erwerbung der allgemeinsten Begriffe* der Geometrie und der Mechanik, ihre wirkliche Bedeutung und ihre fortschreitende Erweiterung. Diese ersten *Probleme der Wissenschaft* sollen nach unserer Absicht eine *Einleitung* in die positive Erkenntnislehre bilden.

Hier wollen wir noch die zweifache Ansicht ins Licht setzen, nach der man eine solche erkenntnistheoretische Wissenschaft betrachten kann, je nachdem man sie vom logischen oder vom psychologischen Standpunkt betrachtet.

Nach der ersten Ansicht, die den Naturwissenschaften eigentümlich ist, bezieht sich die Kritik auf das Reale und untersucht es als Gegenstand des Wissens unabhängig von den Fehlerquellen, die von der Schwachheit des menschlichen Verstandes herrühren. Die so verstandene Erkenntnislehre ist eine Ergänzung der eigentlichen Logik, deren Begriff man nach der strengen Bedeutung des Wortes einschränken muß, damit die Beschäftigung mit der formalen Widerspruchslosigkeit des Raisonnements nicht den Blick trübe für die klare Erkenntnis der empirischen Grundlagen der Tatsachenerkenntnis.

Wenn es Aufgabe der Logik ist, den strengen Rahmen der Beweise und Definitionen zu konstruieren, so bleibt noch Raum für eine Untersuchung, die den Prozeß erforscht, durch den sich das unbearbeitete Material der Sinneswahrnehmungen in einen solchen Rahmen einfügen läßt. Im übrigen beschränkt sich die rein logische Prüfung auf ein formales Urteil, indem sie Fehlschlüsse verwirft und verbietet mit schlecht definierten Begriffen zu operieren; aber auch in diesem Gebiete wird erkenntnistheoretische Kritik geübt, und für sie bildet



jedes, wenn auch unvollkommene Verfahren einen Versuch und im allgemeinen auch einen Schritt näher zur Wirklichkeit und hat in diesem Sinne einen Wert, der nicht vernachlässigt werden darf.

Um dies etwas deutlicher auszudrücken, wollen wir sagen, daß die Logik den idealen Weg zeigt, auf dem der Fortschritt der Wissenschaft vor sich gehen soll, während die positive Erkenntnislehre seinen wirklichen Weg aufzeichnet; in das Gebiet der ersten fallen nur die Methoden der Begründung (und zwar nach unserem Begriff der formalen oder analytischen Begründung), während der zweiten auch die Methoden der Auffindung angehören.

Hieran schließt sich die Betrachtung der Erkenntnistheorie vom psychologischen Gesichtspunkt. Das Verfahren des menschlichen Geistes, abgesehen von der Übereinstimmung des erreichten Ergebnisses mit der Wirklichkeit muß den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden; dieselbe findet mit Hilfe der veränderlichen Elemente die subjektiven Daten in der Darstellung des Faktums und wirft so ein Licht auf die psychische Tätigkeit des Erkennens.

Die beiden Untersuchungen vereinigen sich in bezug auf die Wissenschaft zu einem gemeinsamen Ziele: einer fortschreitenden Trennung der subjektiven von den objektiven Bestandteilen in den verschiedenen Arten der Erkenntnis und ein vergleichendes Urteil über die wissenschaftlichen Theorien nach den gesicherten Tatsachen, die sie erklären und zusammenfassen und nach den Entdeckungen, die sie zu suggerieren fähig scheinen.

Von den modernen Gelehrten scheint vor allem Helmholtz einen klaren Blick für die Aufgabe gehabt zu haben, die die Erkenntnislehre für die Wissenschaft zu erfüllen berufen erscheint.

Es ist einer seiner Ruhmestitel, ausgesprochen zu haben, daß die Diskussion jeglicher Art wissenschaft-

licher Fragen schließlich auf erkenntnistheoretische Probleme hinausläuft. Aber man wird nicht eher über die Nützlichkeit der Behandlung dieser Probleme in einem allgemeinen Sinne richtig urteilen können, als bis die positive Erkenntnistheorie unabhängig von allen philosophischen Kontroversen durch die gemeinsame Arbeit aller Jünger der Wissenschaft aufgestellt sein wird.

Dann erst wird sich zeigen, wie lehrreich die Diskussion einer Theorie sein kann für die Beurteilung einer anderen, die sich auf ein anderes Tatsachengebiet bezieht, und wie z. B. dem Biologen mehr noch als das Studium der *Ergebnisse* der Physik die Kritik ihrer Untersuchungsmethoden und des Gehaltes ihrer Theorien vom erkenntnistheoretischen Standpunkt nützen kann.

Indessen geht die Wichtigkeit solcher Untersuchungen bereits aus dem hervor, was bis jetzt in diesem Sinne geleistet worden ist. Vor allem erscheinen einige positive Ergebnisse der Kritik heutzutage in immer hellerem Lichte dank der Arbeit von Denkern, die sie fortschreitend von der Unbestimmtheit zu befreien suchen, welche den früheren philosophischen Spekulationen, die den Keim dazu enthalten, anhaftete. Eine verheißungsvolle Aussicht für den, der sich solchen Untersuchungen zuwendet!

## § 28. Die Methoden: die geschichtliche, die psychologische, die wissenschaftliche.

Damit die erkenntnistheoretische Arbeit auf allen Wissensgebieten sich schneller und eifriger vollziehe, gemäß den Erfordernissen eines gesunden Fortschritts, muß man durch strenge Kritik eine scharfe Trennung herstellen zwischen dem besonderen Gegenstand der Erkenntnislehre und den mannigfaltigen Gegenständen,



die in das Gebiet der Philosophie im weitesten Sinne des Wortes fallen.

Man kann auf drei Wegen an die Probleme der Erkenntnis herankommen:

Vor allem durch die Geschichte des Denkens, wie es in unserem Lande allgemein üblich ist.

Aber diese Methode kann nicht wahrhaft fruchtbar sein, wenn man nicht bei dem Studium der Ideen die Entwickelung ihrer Konsequenzen in den einzelnen Wissenschaften berücksichtigt.

Wir haben schon gesagt, was wir uns für einen Begriff von der Philosophie machen, daß wir in ihr ein Streben des Menschengeistes nach Einheit und Allgemeinheit in den Erkenntnissen und in den Zwecken erblicken. Wir haben auch bemerkt, daß dieses Streben sich gleichermaßen zeigt in dem Aufbau der Wissenschaft und in den poetischen Träumen einer nicht von lebendigem Gefühl für die Wirklichkeit gezügelten Einbildungskraft. Übrigens fehlt auf diesem Gebiete eine scharfe Trennung, so daß die Entstehung einer Wissenschaft sich nicht allzusehr von einem jener Halbträume unterscheidet, wie man sie kurz vor dem Erwachen hat.

Hieraus erhellt die Gefahr einer historischen Vorbereitung, die sich lediglich auf das unscharf begrenzte Gebiet der Philosophie bezieht. Ein gesunder Geist gelangt auf diesem Wege leicht zu jener Form des Skeptizismus, die jedem Gedanken den gleichen Wert beimißt, sofern er nur eine gewisse Übereinstimmung mit sich selbst aufweist.

Dieser Standpunkt mag für eine Geschichtsforschung angemessen sein, für die jede Philosophie ein Anzeichen für eine Richtung des menschlichen Geistes und unter diesem Gesichtspunkt ein interessantes Untersuchungsobjekt bildet. Aber er ist gefährlich für die Wissenschaft, in der es vor allem darauf ankommt, die Wahrheit vom

Irrtum zu unterscheiden. Und sie kann leicht die Flamme ersticken, die im Philosophen der Entdeckungseifer entfacht.

Aber auch abgesehen von der eben erwähnten Gefahr zeigen viele Beispiele, daß für das Studium der Fragen der Erkenntnis die bloße Betrachtung der allgemeinen im Gebiete der Philosophie erörterten Ideen unzureichend bleibt. Deshalb muß die Geschichte der Philosophie, wenn sie für die Lösung der Erkenntnisprobleme von Nutzen sein will, sich mit der Geschichte der Wissenschaft ergänzen, so wie diese von denjenigen Männern aufgefaßt wird, die mehr als das Leben der Entdecker die Entwickelung der Gedanken und die Reihe der Entdeckungen verfolgen.

Es handele sich z. B. darum, den Wert der Unterscheidung von *Quantität* und *Qualität* zu diskutieren.

Für KANT steht diese Unterscheidung subjektiv a priori fest. STUART MILL hat diese Ansicht wieder aufgenommen, indem er sie auf eine, wie mir scheint, klarere Form brachte: die Unterschiede, die in verschiedenartigen Wahrnehmungen wurzeln, können nicht quantitativ verglichen werden, d. h. sie gehören qualitativ irreduzibeln Erkenntnissen an.

In diesem Sinne sind qualitativ nicht aufeinander zurückführbar Wärme und Bewegung, Elektrizität und Licht.

Wie verhalten sich solche Behauptungen zu dem cartesischen Prinzip, daß in der physischen Welt alles durch Ausdehnung und Bewegung *erklärbar* sein muß?

Die Prüfung der philosophischen Kontroverse kann nur zu folgendem allgemeinen Schluß führen: wenn auch die qualitativen Unterschiede sich den quantitativen eines einheitlichen Prozesses zuordnen lassen, so wird doch die Erkenntnis der Tatsachen durch eine solche *Erklärung* nicht erschöpft; so kann z. B. die Erkenntnis



der Lichterscheinungen sich nicht in dem Kapitel der Optik erschöpfen, das die mechanische Theorie des Lichtes im strengen Sinne enthält.

Aber in der positiven Wissenschaft wird die Frage in anderer Weise gestellt. Da wird gefragt, ob die qualitativ verschiedenen Erscheinungen der physischen Welt sich irgendwie durch einen einheitlichen Prozeß darstellen lassen, der ein Modell von ihnen liefert, und in dem nur quantitative Unterschiede in Betracht kommen (vgl. Kap. VI).

Wir fahren nun fort in der Übersicht über die Methoden, die unserem Zwecke dienen.

Der historischen Methode kann man in gewissem Sinne die physiologisch-psychologische, wie sie HELMHOLTZ im Auge hatte, entgegensetzen.

Die Untersuchung der Entwickelung der Erkenntnisse nicht mehr in der Erscheinungsreihe, die die Geschichte von ihnen bietet, sondern vermittelst des Studiums der Sinnes- und Verstandesorgane scheint der direkte Weg zur Lösung der erkenntnistheoretischen Probleme zu sein.

Aber wir haben schon auf die Schwierigkeiten einer solchen physiologischen Untersuchung hingewiesen, und ohne den Wert einiger Resultate schmälern zu wollen, die aus der Analyse der Sinnesempfindungen hervorgegangen sind, müssen wir doch wiederholen, daß es noch eine andere Art der Verknüpfung gibt, auf die hin die psychologischen Objekte und besonders diejenigen, auf die sich unsere Untersuchung bezieht, vor allem erforscht werden müssen.

Im Hinblick auf diese Verknüpfungen erscheint auch die entwickelungstheoretische Methode in der Psychologie, wenigstens so wie sie von SPENCER verstanden wird, als unzureichend zu einer wirklichen Erklärung der Erkenntnisprobleme; weniger wegen der ausschließlich epigenetischen Ansichten dieses Philosophen als wegen

des besonderen Charakters der Fragen selbst, um die es sich handelt.

Der Prozeß der Erkenntnis, wenngleich er das Resultat einer stetigen Entwickelung ist, weist doch qualitative Diskontinuitäten auf. D. h. an einem gewissen Punkte der psychologischen Entwickelung kann ein geistiger Faktor für die Erkenntnis eine Bedeutung gewinnen, die er vorher in keinem Grade besaß. Im übrigen bleibt die Entwickelungspsychologie, da sie sich mit den einfachsten Erscheinungen beschäftigt, weit entfernt von dem eigentlichen Objekt der Erkenntnislehre, die die Entstehung der höchst entwickelten Wissenschaft aufklären will.

Eine dritte Methode, die sich für das Studium der erkenntnistheoretischen Probleme als fruchtbar erwiesen hat, besteht in der direkten kritischen Prüfung der Wissenschaft, die dabei selbst als das zu erklärende Faktum angesehen wird.

Es ist dies eine Methode der Beobachtung und Vergleichung ähnlich denen der Naturwissenschaften.

Es ist übrigens besser, die Erkenntnis auf ihrer höchsten Entwickelungsstufe zu betrachten, als die vulgäre.

Der Botaniker, der es schwer findet, in dem Embryo die Bestandteile zu unterscheiden, braucht die Pflanze nur wachsen zu lassen, um jene in reinlicher Trennung vor sich zu haben. In ähnlicher Weise zeigt die wissenschaftliche Entwickelung der Begriffe die Bedeutung der physischen und psychischen Elemente, aus denen sie hervorgegangen sind.

Das wurde dem Autor dieser Schrift zum erstenmal an der Geometrie klar, als er drei Zweige dieser Wissenschaft sich von dem gemeinsamen Stamme abzweigen sah, die zusammen eine vollständige Verarbeitung der Daten der verschiedenen Sinne darboten, aus denen die Raumvorstellung entspringt. Doch ist hier nicht



der Ort, diese Frage, die den Gegenstand eines besonderen Kapitels bilden wird, beiläufig abzuhandeln.

Wir wollen nur dem, was wir oben über die wissenschaftliche Methode gesagt haben, hinzufügen, daß es nicht genügt, die allgemeinen Resultate der Wissenschaft zu betrachten und in einer Synthese zu koordinieren, sondern man muß an ihnen entsprechend den oben definierten Zwecken der Erkenntnistheorie in logischer und in psychologischer Hinsicht Kritik üben.

So hat gerade in Ermangelung einer solchen Kritik der Positivismus Auguste Comtes die Probleme der Erkenntnis in keiner Weise beantwortet, obgleich die Erneuerung der Philosophie durch die Wissenschaft der große Gedanke des Meisters war. Daher erscheint ihm der englische Positivismus der Stuart Mill, Bain, Lewes usw. überlegen, wenngleich diese Philosophen vielleicht keine so umfassende und tiefe Auffassung von den einzelnen Wissenschaften besaßen.

Unser Schluß kann nicht in einer Ausschließung einer Methode und in der Zubilligung eines ausschließlichen Vorzugs für eine andere bestehen.

Das Studium der Wissenschaft als „Faktum" muß sich die Lehren der Geschichte so gut wie die Ergebnisse der Psychologie zunutze machen.

Aber vor allen Dingen kommt es darauf an, daß die Erkenntnistheorie selbst als eine wahrhafte positive Wissenschaft aufgefaßt wird; d. h. daß ihre Jünger sich bestimmte Probleme stellen und sie mit möglichst strengen Methoden zu lösen suchen. Mag, wer da will, seiner Einbildungskraft freien Lauf lassen und sich den metaphysischen Träumen hingeben. Aber diese Poesie erhabener Geister, die als Ausdruck für ein Bedürfnis der menschlichen Seele sich immer wieder erneuern wird, soll ihre Zügellosigkeit nicht in die positive Erkenntnislehre, die ihr fremd bleibt, hineintragen.

Die letztere hat einen realen Gegenstand zu erklären und daher wirkliche Probleme zu lösen, die nicht abhängen dürfen von den unbeständigen Meinungen der Philosophen und von den *sozialen* Interessen, die diese leiten.

Jene werden sich davon in gewissem Maße befreien können, wenn sie sich entschließen systematisch alles auszumerzen, was mit den transzendenten Verfahrungsarten der Vernunft zusammenhängt.

Die Untersuchung, die die *Probleme der Wissenschaft* lösen will, ist derselben logischen Bedingung unterworfen, die alle Zweige des Wissens erfüllen müssen, in denen es sich irgendwie um „Tatsachen" handelt.

Es erscheint möglich, daß sich die Fachleute innerhalb dieser Grenzen unabhängig von der Metaphysik über die Begründung einer positiven Erkenntnislehre einigen, die dann ihrerseits wieder zu jener gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit beitragen wird, die wir als Mittel zu einem höheren Fortschritt herbeisehnten.

## Kapitel II.

# Tatsachen und Theorien.

### § 1. Traum und Wirklichkeit.

Aus den arabischen Novellen, die unter dem Titel „Tausend und eine Nacht" überliefert sind, kommt uns jene in Erinnerung, in welcher das merkwürdige Abenteuer erzählt wird, das einem „erwachten Schläfer" zustößt.

Auf Befehl des Kalifen von Bagdad wird Abu Hassan, nachdem man ihn durch ein Narkotikum eingeschläfert hat, in den Palast gebracht und an die Stelle seines Herrn gesetzt, der, um sich ein Vergnügen zu machen, ihn in den Glauben versetzen will, er sei der Kalif.

Der arme Mann erwacht inmitten eines mit herrlichen Reichtümern ausgeschmückten Zimmers, umgeben von einem Kranz von Frauen, die in den Händen verschiedene Musikinstrumente halten, bereit sie erklingen zu lassen, und von schwarzen, prächtig gekleideten Eunuchen, alle in respektvoller Haltung. Als er den Blick auf seine Decke wirft, bemerkt er, daß sie von Goldbrokat auf rotem Grunde und mit Perlen und Diamanten verziert ist; in der Nähe des Bettes gewahrt er ein Gewand aus demselben Stoffe, schimmernd von Edelsteinen und auf einem Kissen neben ihm ein Kalifenbarett.

Durch einen solchen Anblick wird Abu Hassan in äußerste Verwirrung versetzt. „Ich bin also Kalif", sagt er zu sich selbst; doch sogleich verbessert er sich: „Ich darf mich nicht täuschen, ich träume ja." Aber als er die Augen wieder schließt um zu schlafen, reden

ihn die Eunuchen respektvoll an und rufen ihn mit dem Namen des Herrschers „Herr der Gläubigen".

Überrascht von den gehörten Worten und im Entzücken befangen über den Anblick, zu dem sie ihn zurückrufen, wird er doch von Zweifeln gepeinigt: „Wie in aller Welt ist es denn möglich, daß ich nicht zu unterscheiden vermag, ob ich träume oder meinen gesunden Verstand besitze?" Darauf winkt er einer der Frauen, näher zu kommen und spricht, indem er ihr seine Hand entgegenstreckt: „Hier, beißt mich in den Finger, damit ich weiß, ob ich träume oder wache." Und sobald jene, dem empfangenen Befehl gehorchend, die Spitze seines Fingers, den er hingehalten hat, leise mit den Zähnen berührt, zieht Abu Hassan rasch die Hand zurück, indem er ausruft: „Ich wache wirklich!"

Es liegt in dieser Schilderung ein wirklicher philosophischer Geist. Denn wir sehen in Abu Hassans Verfahren den Weg, den im allgemeinen jeder Mensch einschlägt, der sich über irgendeinen Eindruck klar werden will, wenn er Grund hat, zu zweifeln, daß ihm wirklich ein realer Gegenstand entspricht.

In ähnlichen Fällen, sei es beim Erwachen aus einem Traum, sei es wenn irgendeine ungewöhnliche Erscheinung den regelmäßigen Gang unserer Erwartungen stört, suchen wir diesem passiven Geisteszustand, in dem alle Illusionen gedeihen, zu entfliehen, dadurch, daß wir uns zwingen, irgendeine neue Empfindung, die uns im voraus bekannt ist, willkürlich hervorzurufen. Wir urteilen dann nach dieser, indem wir ihre Übereinstimmung mit der vorherigen Erwartung feststellen.

## § 2. Sinnestäuschungen.

Einige Beispiele lassen den hohen Grad von Allgemeinheit erkennen, der der vorstehenden Bemerkung zukommt.



Ein einjähriges Mädchen findet schon Vergnügen daran, sich im Spiegel zu sehen. Ich mache mir zuweilen den Spaß, es hinter denselben zu führen; dann ist es sicher, das Bild, das ihm eben erschien, zu sehen und bereit, es mit den Händen zu greifen. Da nun da nichts mehr ist, ist es sprachlos vor Erstaunen.

Dann will ich den Versuch wiederholen; noch einmal, wenn auch unsicherer, schickt es sich an, nach seinem Bild zu greifen. Aber wir müssen von neuem anfangen, denn in dem Maße, wie seine Unruhe schwindet, wächst sein Vergnügen an dem Spiel.

Endlich, da es sieht, daß unter denselben Bedingungen sich immer der gleiche Vorgang abspielt, lacht es über die Täuschung, der es nicht mehr traut.

Die Reisenden, die in den endlosen Ebenen der Sandwüste marschieren, erfahren am eigenen Leibe, auf ganz ähnliche Weise, was die Fata Morgana ist.

Durch eine Lichtbrechung, die, wie Monge erkannte, von dem sehr stark verdünnten Zustand der unteren Luftschichten abhängt, sieht man zuweilen deutlich die direkten und umgekehrten Bilder von Gegenständen, die unter dem Horizonte sind. So erscheint den verdursteten Reisenden der Horizont von einem großen Überschwemmungsgebiet begrenzt, jeder Sandhügel macht zusammen mit seinem Spiegelbild den Eindruck als sei er von Wasser umgeben. Aber wenn nun die Unglücklichen nach einem beschleunigten Marsch die Stelle erreichen, wohin sie der verführerische Anblick wie ein süßes Versprechen gelockt hatte, was entdecken sie anderes als dürres Erdreich und glühenden Sand?

In der Optik kommen noch verschiedene ähnliche Fälle von Täuschungen vor, die unter verschiedenen Gesichtspunkten ebenso den Physiker wie den Physiologen interessieren.

In diesen Fällen ist es immer leicht, den Fehler zu entdecken durch eine eigens dazu angestellte Probe, die dann eine entscheidende Antwort gestattet. Die Hauptsache ist, die Bedingungen zu verändern, unter denen die Erscheinung eintritt, was am sichersten dadurch zu erreichen ist, daß man an Stelle des Gesichts einen anderen Sinn, z. B. den Tastsinn als entscheidende Instanz benutzt.

Aber man kann sich von einer optischen Sinnestäuschung auch Rechenschaft geben, ohne das Gebiet der visuellen Erfahrung zu verlassen, wie es gerade bei den oben erwähnten Beispielen geschieht. Es genügt in jedem Falle, die Bedingungen zu studieren, unter denen die Gesichtswahrnehmung eintritt, und das zu entdecken, was man ändern muß, um die Fehlerquelle zu beseitigen.

Übrigens kann nicht nur das Gesicht, sondern jeder Sinn sich unter bestimmten Umständen täuschen.

Das Ohr fällt einer Täuschung anheim bei dem bekannten Phänomen des Echos, die aber leicht festzustellen ist, indem man in geeigneter Weise den Platz wechselt.

Der Tastsinn selbst, in den wir das blindeste Vertrauen setzen, ist nicht frei von Fehlerquellen, die zum Glück nicht häufig auftreten. Es genügt an den überaus einfachen Versuch zu erinnern, der darin besteht, daß man die beiden Seiten einer kleinen Kugel mit gekreuzten Fingern berührt, man glaubt dann zwei Kugeln statt einer anzufassen.

## § 3. Das Kriterium der Wirklichkeit.

Die Analyse der Verfahrungsarten, die wir anwenden, wenn es sich darum handelt, über die Wirklichkeit zu entscheiden, zeigt uns, was zu unserem Glauben an ein



wirkliches Faktum vorausgesetzt wird. Sie hilft uns so die Eigenschaften des Wirklichen festzustellen und führt uns auf natürliche Weise zu einer *positiven Definition der Wirklichkeit.*

Es zeigt sich in jedem Falle, daß es sich nicht nur um Daten passiver Sinnesempfindungen handelt; es genügt nicht, zu *sehen*, man muß auch sehen, was von einem gewissen Platz aus oder unter den und den willkürlich hergestellten Bedingungen *erschaut wird;* es genügt nicht, zu *hören*, man muß auch hören, was auf die und die andere Weise, wie es uns beliebt, *erlauscht wird* usw. Und es müssen alle die erwarteten Gesichts-, Gehörs- oder Tastempfindungen unter gewissen wohlbekannten Umständen, in die wir uns versetzen, in vorhergesehener Weise nach einer festen Ordnung ablaufen. Wenn auch nur eine von ihnen, die wesentlich zu dem Faktum gehört, fehlt, so zeigt uns die getäuschte Erwartung, daß unser Glaube an das Faktum irrtümlich war.

D. h. *unser Glaube an die Realität eines Dinges setzt eine Gesamtheit von Empfindungen voraus, die aus gewissen, willkürlich hergestellten Bedingungen in unveränderlicher Weise folgen.*

Und da das Erfülltsein dieser Bedingungen selbst wieder den Gegenstand anderer Empfindungen bildet, so setzt der Glaube an die Wirklichkeit im letzten Grunde eine *assoziative Beziehung* zwischen Empfindungen voraus; sei es, daß es sich um eine jener festeren und gewohnteren Verknüpfungen handelt, die wir uns als *Gegenstände* vorstellen, sei es eine jener Verknüpfungen (zweiten Grades), die wir als *Beziehungen zwischen Gegenständen* denken.

Man muß sich dabei gegenwärtig halten, daß der Begriff „assoziative Beziehung zwischen Empfindungen" allgemeiner ist als der, den wir definieren wollen; immer besteht der wahre Charakter der Wirklichkeit in der

„Übereinstimmung der Empfindungen mit der gewollten Erwartung". Also finden wir hierin die positive Definition der Wirklichkeit.

Aber diese Art, sich die Sache vorzustellen, scheint auf den ersten Blick nicht mit der gewöhnlichen Darstellung übereinzustimmen.

Man faßt die Wirklichkeit auf als etwas, das unabhängig von aller Erfahrung sich außer uns befindet, und die Übereinstimmung zwischen gewissen subjektiven Bedingungen und den auf sie folgenden Empfindungen als einen *Beweis* der Realität, die trotzdem nicht aufhört, *an sich zu existieren*, wenn auch jede Verbindung zwischen unserem Geist und der Außenwelt abgebrochen würde.

Denkt man nun darüber nach, wie man ein Dasein *an sich* verstehen soll, so findet man, daß dieser Ausdruck gar keinen Sinn hat, es sei denn, daß man damit sagen will, daß es *dem Willen unmöglich ist, die Empfindungen, die wir auf die Wirklichkeit beziehen, zu ändern*, ohne zugleich die Bedingungen zu ändern, an die sie geknüpft sind.

Wir haben schon Gelegenheit gehabt, daran zu erinnern, daß die moderne Philosophie von dem Streit um das sogenannte Wirklichkeitsproblem erfüllt ist. Der Knoten der Schwierigkeit besteht in der Fragestellung selbst. Wenn man die Wirklichkeit in transzendenter Weise auffaßt und ihr eine absolute Bedeutung für sich zuschreibt, so verfällt man in einen skeptischen Idealismus, indem man vor unseren Augen das Gespenst des Unerkennbaren erstehen läßt. Wenn man diese Bedeutung als sinnlos verwirft, so nähert man sich dem Phänomenalismus Ernst Machs oder der Interpretation, die unser Landsmann G. Vailati dem Idealismus gegeben hat, zweien im wesentlichen gleichwertigen Ansichten. Der so interpretierte Idealismus verdient diesen



Namen gar nicht mehr, denn er schließt keine agnostische Behauptung mehr ein; er ist keine Negation der Wirklichkeit, sondern (wie Vailati sagt) eine *Definition* derselben.

Aber diese Stellungnahme beseitigt nicht die positive Bedeutung des Wirklichkeitsproblems, bei der es sich darum handelt „einen relativen Unterschied zwischen den wirklichen und den unwirklichen Dingen festzustellen".

Wenn man die Frage (die seit dem Beginn unserer Spekulationen uns als die notwendige Grundlage jeder positiven Konstruktion erschien) unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, so unterscheidet sich unsere Definition der Wirklichkeit von derjenigen Machs dadurch, daß das Kriterium der Wirklichkeit nicht einfach in die „Empfindung" sondern in die „Empfindung verbunden mit gewissen Willenshandlungen" gelegt wird.

Anderseits geht die wichtige Rolle des Willens gegenüber den passiven Vorstellungen auch aus Schopenhauers Metaphysik hervor und findet sich unter verschiedenen Gesichtspunkten auch im englischen Empirismus wieder.

Diese Anerkennung beruht auf dem Studium der Aufmerksamkeitserscheinungen und vorzüglich auf den von der physiologischen Psychologie entdeckten Tatsachen der Anpassung der Sinnesorgane und der Rolle der motorischen Nerven. So hat z. B. die physiologische Optik den Anteil aufgeklärt, den die Akkommodation des Auges und seine willkürlichen Bewegungen an dem Sehvorgang haben.

## § 4. Die Voraussetzungen im Begriff der Wirklichkeit.

Wir wollen versuchen, die Definition der Wirklichkeit noch genauer zu formulieren und von da zusehen, wie wir sie erweitern können.

Unser Kriterium betrachtet direkt die Feststellung der Realität in dem Akt, in dem sie sich vollzieht. Nun bleibt aber der Glaube an die einmal konstatierte Wirklichkeit eines Dinges wie an etwas *Invariantes* in unserem Geiste, handle es sich nun um ein materielles Objekt oder um eine Beziehung zwischen solchen. Darin liegt die *Annahme*, daß bei Wiederherstellung der erforderlichen Bedingungen auch die Empfindungen, die wir mit ihnen verknüpft fanden, sich in *unveränderter* Weise wieder einstellen werden.

Im einfachsten Fall läuft diese Annahme auf die Fiktion hinaus, daß wir die gegenwärtige Wirklichkeit *dauernd* von neuem konstatieren können. Es gibt jedoch andere reale Dinge, denen wir ein Dasein in der Zeit zuschreiben; z.B. eine Handlung, eine Bewegung usw., die sich unter bestimmten Umständen wiederholen können. Auch hier erkennen wir etwas Invariantes an, aber in einem weiteren Sinne.

Aber andere Überlegungen zwingen uns diesen Begriff der Wirklichkeit noch mehr zu erweitern.

Wenn es sich um eine Erscheinung handelt, die wir als in der Zeit abgelaufen betrachten, so stellen wir die Frage, ob, abgesehen von der Möglichkeit sie zu reproduzieren, sie in einem gewissen Momente *wirklich stattfand*. Das *historische* Stattfinden eines Ereignisses und die Invarianz einer darin erkannten Beziehung zwischen Bedingungen und Empfindungen scheinen zwei ganz verschiedene Fragen zu sein. Sollte der Unterschied wirklich nicht zu beseitigen sein?

Wir wollen das Urteil aufschieben und uns zu einer anderen Überlegung wenden.

Die Bedingungen eines Ereignisses können nicht immer nach Willkür reproduziert werden; die Schwierigkeiten, die sich dem entgegensetzen, gehen zuweilen bis zur praktischen Unmöglichkeit; manchmal muß man



Umstände abwarten, die gar nicht oder nur teilweise von uns abhängen. In diesen Fällen kann der Glaube an das Faktum nicht in jedem Augenblick in eine Erwartung umgesetzt werden; die Wirklichkeit ist sozusagen nicht immer disponibel. Welchen Wert hat dann aber die Annahme, daß sie zu der gegenwärtigen noch hinzukommt?

Wir wollen einmal überlegen. Die Tatsachen, die in der gegenwärtigen Wirklichkeit enthalten sind, werden von uns willkürlich beschränkt. So sehen wir z. B. Fenster, Türen usw. oder auch die Fassade eines Hauses; Bäume, Pflanzen, Alleen oder einen Garten usw. Kurz die Elemente, die zu verschiedenen Objekten zusammengefaßt werden, können, anders zusammengefaßt, andere Objekte bilden oder auch ein einziges. Und dasselbe läßt sich im allgemeinen über die Beziehungen zwischen den Objekten sagen. Nur eine kleine Anzahl verschiedener Geisteszustände kann sich abwickeln mit jener lebendigen Intensität, die dem „Gegenwart" genannten Zeitintervall zukommt; und innerhalb dieses Intervalls ist der einzelne Gegenstand nicht isoliert, sondern kann verschiedene Verbindungen eingehen. Die Existenz eines realen Dinges in der Gegenwart bringt gerade die Möglichkeit solcher Verbindungen mit sich.

Der Glaube an die Existenz von augenblicklich nicht wahrgenommenen Dingen hat nun folgende Bedeutung: er erlaubt neue *assoziative Beziehungen* zwischen den Elementen unserer Wahrnehmungen herzustellen.

Damit diese Beziehungen hergestellt werden, bedarf es durchaus nicht einer vorhergehenden direkten Konstatierung; sie können vielmehr auf Grund anderer gegebener Assoziationen *angenommen* werden, und sofern ihnen etwas als *unveränderlich* Gedachtes entspricht, bilden sie für uns noch eine *(angenommene) Realität.*

Nur die Art, wie die Erkenntnis erworben wird, ist eine andere für die wirklich angenommenen als für die wahrgenommenen Tatsachen: die Assoziation zwischen gewissen Empfindungen und der Vorstellung gewisser Willensakte entspringt hier unmittelbar aus der *Erinnerung*, in jenem Falle nur mehr oder weniger mittelbar vermittelst einer Verstandeshandlung, die in ihrer höchsten Form ein Raisonnement ist. Aber abgesehen von der Art der Aneignung bedeuten sowohl die wahrgenommene als die angenommene Realität für die Gegenwart und für die Zukunft die *Erwartung gewisser Empfindungen unter bestimmten Bedingungen*, die mehr oder weniger von unserem Willen abhängen.

Wenn es möglich ist, die erforderlichen Bedingungen herzustellen, so konstatieren wir unmittelbar die Empfindungen, die sich daran knüpfen, oder wir gestehen unseren Irrtum ein, wo uns die Erwartung getäuscht hat. Wenn das aber *im Augenblick* nicht möglich ist, so behält unsere Überzeugung ihren Wert, sei es im Hinblick auf eine zukünftige Möglichkeit, sei es insofern die vorausgesetzte Tatsache ihrerseits neue assoziative Beziehungen zur Folge hat, die festgestellt werden und zu einer *mittelbaren Bestätigung* unserer Annahme führen können.

Man muß die problematische Annahme im weitesten Sinne als wesentlich anerkennen für die Wirklichkeit, von der wir leben. Denn im Laufe unseres Lebens treten wir in Beziehungen zu neuen entlegenen, nie besuchten Ländern, zu nie gesehenen Personen, und diese Beziehungen werden ohne direkte Verifikation erschlossen.

## § 5. Die Wirklichkeit des Vergangenen.

Wir sind jetzt in der Lage, die Frage zu beantworten, „in welchem Sinne es möglich ist, in der geschichtlichen



Wirklichkeit eines vergangenen Ereignisses etwas Invariantes zu finden".

Die Erinnerung an das Ereignis, wenn es wahrgenommen wurde, bewirkt schon eine bestimmte assoziative Beziehung zwischen den in die Erinnerung zurückgerufenen Empfindungen. Aber abgesehen von der Wahrnehmung hat die Wirklichkeit des Ereignisses eine Bedeutung, die in die gegenwärtige und zukünftige Wirklichkeit hineinreicht und die (mittels indirekter Assoziationen) gewisse bestimmte Erwartungen nach sich zieht. Unter diesem Gesichtspunkt wird es möglich, für die Vergangenheit Wirkliches von Unwirklichem zu trennen, und die Erinnerungsfehler zu bewerten. Ein trügerischer Eindruck steht, sobald er vergessen ist, in keiner Verbindung mehr mit unserer Welt (abgesehen von gewissen psychischen Reflexen); anders eine Tatsache, diese lebt noch um uns in ihren Spuren durch Beziehungen mit der Gegenwart verknüpft.

In diesem Sinne besteht auch die historische Realität in einem Glauben an eine Folge von Invarianten, sie ist in einem weiten Sinne eine Annahme, ein assoziatives Bindeglied zwischen den gegenwärtigen und den künftigen Empfindungen.

Bisher haben wir auch bei der Betrachtung der Vergangenheit jenes *aktive* Verhalten des Geistes beobachtet, der die Augen auf die Gegenwart und auf die Zukunft gerichtet hält. Aber man darf nicht übersehen, daß ein anderes *kontemplatives* Verhalten gegenüber der Vergangenheit den Ablauf der Gedanken, Empfindungen und Willensregungen in anderer Weise betrachtet. Bei dieser wahrhaft *historischen Betrachtungsweise* werden die Erinnerungen hervorgerufen, um unser seelisches Leben in seinem zeitlichen Ablauf zu rekonstruieren und dadurch in einer *synthetischen Vor-*

*stellung* die Gefühle wieder zu erwecken, die damit verknüpft sind.

Nun ist diese historische Rekonstruktion für den Erkenntnistheoretiker von Interesse, insofern sie, wenn man sie wissenschaftlich verfolgt, eine genauere Analyse des Begriffs *reproduzierbarer* Empfindungen und Willensregungen gestattet.

In diesem Begriff liegt die Möglichkeit, diese elementaren Daten aus der Gegenwart und aus der Vergangenheit zu vergleichen, d. h. eine frühere Empfindung in einer gegenwärtigen *wiederzuerkennen*. Aber die erwähnte Rekonstruktion zeigt uns, daß dieses Wiedererkennen kein Identitätsurteil ist; daß zum mindesten die Intensität der Empfindungen und der sie begleitende Gefühlszustand in der Erinnerung verblassen; kurz, daß die Elemente unserer Bewußtseinszustände eine charakteristische zeitliche *Individualität* besitzen.

Es scheint, daß gewisse *wissenschaftsfeindliche* Geistesrichtungen in letzter Zeit mit dieser Bemerkung Mißbrauch getrieben haben. Der einzige berechtigte Schluß, den man aus ihr ziehen kann, ist der, daß die Empfindungen und Willensregungen, die als *gleich* betrachtet werden, bei genauerer Betrachtung Unterschiede aufweisen (wer will, mag sie nur *ähnlich* nennen), und daß sie daher als *abstrakte Elemente* in die Wirklichkeit eingehen, d. h. als Repräsentanten gewisser (wiedererkennbarer) Elemente, die *einander* in verschiedenen Komplexen von wirklichen Empfindungen und Willensregungen *entsprechen*.

Will man nun daraus schließen, daß die Erwartungen, die in der Erkenntnis des Wirklichen liegen, und die Bestätigungsproben selbst stets einen *approximativen Charakter* besitzen, weil bei dem Wiedererkennen *bekannter* Empfindungen jedesmal etwas Neues hinzukommt und etwas Früheres verloren geht, so spricht



man damit eine Erkenntnis aus, die weder neu ist noch der Ansicht von der Relativität der *Erkenntnis* widerspricht, die die positive Philosophie mit dem gemeinen Volke teilt.

## § 6. Die psychische Wirklichkeit.

Die *einzigartige* Natur der Annahme psychischer Wirklichkeit verdient beleuchtet zu werden.

Was bedeutet *für mich* die Annahme, daß die anderen Empfindungen, Gedanken, Willensregungen usw. haben? Und in welchem Sinne kann ich hier eine Wirklichkeit erkennen? Wenn wir an anderen gewisse Ausdrucksformen (Handlungen usw.) beobachten und sie mit den ähnlichen Ausdrucksformen eines unserer Bewußtseinszustände vergleichen, oder wenn wir versuchen, uns mit ihnen in eine gewisse *geistige Konsonanz* zu setzen, so daß wir auf ähnliche Reize ähnlich reagieren, so entsteht in uns eine besondere Empfindung oder Vorstellung von den Empfindungen, Gedanken, Willensregungen usw. anderer, die so mit den erwähnten Beobachtungsbedingungen verknüpft ist. Eine solche assoziative Verbindung bildet eine mittelbare Annahme, an die sich gewisse Erwartungen in bezug auf die Handlungen der Menschen und ihre verschiedenen Ausdrucksformen unter besonderen Umständen knüpfen.

Aber die Überzeugung, um die es sich handelt, enthält mehr als diese rein äußerliche Beziehung; es kommen einige Bestandteile hinzu, die die psychologische Supposition von anderen unterscheidet, nämlich:

1. ein besonderer Gefühlswert der „Wahrnehmung" eines fremden Bewußtseinszustandes, z. B. derjenige, der die Wahrnehmung fremden Schmerzes begleitet usw.;
2. eine daraus entspringende Bestimmung oder Beschränkung unseres Willens, vergleichbar derjenigen,

die aus der Unmöglichkeit entsteht, die auf die physische Wirklichkeit bezüglichen Empfindungen zu ändern (§ 3), aber von anderer Art.

Gerade durch diese Eigenschaften nähert sich der psychologische Glaube dem Typus des bereits betrachteten Wirklichkeitsglaubens; schließlich nimmt aber die Wirklichkeit von etwas Psychischem *an sich* eine besondere Bedeutung in Anspruch: die Empfindungen, Gedanken, Willensregungen anderer verändern unseren Willen ähnlich, wie die entsprechenden Elemente unserer eigenen psychischen Welt das tun.

In welcher Weise diese Veränderung zustande kommt, das ist ein Problem, dessen Lösung wir hier nicht unternehmen wollen, deshalb wollen wir auch davon absehen zu untersuchen, ob die gegenseitige Beziehung zwischen den psychischen Zuständen und ihrem äußeren Ausdruck (worauf sich neuere Untersuchungen beziehen) die geistige Konsonanz erklären kann; und ob außerdem eine unmittelbare Wechselwirkung der Seelen aufeinander anzunehmen ist, eine Hypothese, die sich in einigen Fällen von selbst aufdrängt.

## § 7. Die soziale Seite der Wirklichkeit.

Wir wollen die Empfindungen (Gedanken, Willensregungen usw.) anderer als fundamentale Voraussetzung annehmen. Dann erweitert sich der Begriff der Wirklichkeit; durch den „*consensus*" erhält ihr Kriterium, das wir auf den vorhergehenden Seiten vom individuellen Standpunkt aus anzugreifen gezwungen waren, eine *soziale* Bedeutung. So tritt zu dem Sehen eines erblickten Gegenstandes das Zeugnis anderer, daß sie unter denselben Bedingungen ihn gleichfalls sehen. Dieses Zeugnis setzt sich letzten Endes in das Hinzukommen anderer Empfindungen um, die je nach der Art, wie es



abgegeben wird, verschieden sind; jedenfalls hat es einen besonderen Wert, wenn es nach geeigneten Kriterien, die die Richtschnur der *historischen Kritik* bilden, bewertet wird.

Es ist nicht unsere Absicht, die Prinzipien dieser Kritik zu analysieren. Es genügt folgendes hervorzuheben: die Wirklichkeit, als soziale Gegebenheit aufgefaßt, bedeutet noch immer im letzten Grunde ein Zusammenstimmen von Empfindungen mit willkürlich hergestellten Bedingungen.

Für die menschliche Gesellschaft als Ganzes genommen erweitert sich das Gebiet der Empfindungen und der Gegenstände, auf welche diese sich beziehen; aber diese Mannigfaltigkeit liefert keinen besseren Beweis der Wirklichkeit, wenn der Wille nicht eifriger ist.

Aus diesem Grunde sehen wir, daß es zugleich leichter und schwerer ist, eine Gesellschaft zu täuschen als einen einzelnen Menschen; schwieriger, wenn, wie z. B. in einer wissenschaftlichen Gesellschaft, ein lebhaftes Interesse die Teilnehmer zum Aufpassen und Verstehen veranlaßt; leichter, wenn, wie in einer aufgeregten Menge, der Wille zu zweifeln fehlt und jeder kritiklos die ungenauere Empfindung des anderen als Bestätigung der eigenen ansieht.

## § 8. Halluzinationen.

Die allgemeine Zustimmung tritt zu dem individuellen Wirklichkeitskriterium hinzu und verstärkt die sich daran knüpfende Überzeugung, falls zwischen beiden *Übereinstimmung* stattfindet, zum mindesten bei geeigneter Kritik. Es gibt jedoch einen Ausnahmefall, der nicht mit Stillschweigen übergangen werden darf.

Das Vorkommen von Halluzinationen erschüttert trotz ihrer geringen Anzahl unser Vertrauen, besonders weil ein Analogieschluß uns die Möglichkeit vor Augen

führt, daß wir selbst das Opfer einer Halluzination werden. Es fragt sich, ob in diesem Falle das Kriterium, das wir als Prüfstein der Wirklichkeit betrachteten, geeignet ist, uns über den Irrtum, dem wir ausgesetzt sind, aufzuklären, oder ob und warum es versagt.

Die Frage birgt eine große Schwierigkeit, weil die ejektive Deutung der psychologischen Vorgänge, die sich in einem krankhaften Geisteszustand abspielen, schwer zu hebende Zweifel erweckt.

Jedenfalls kann man zwei Arten von Halluzinationen unterscheiden; die häufigeren, die sich nur auf eine Gruppe von Empfindungen erstrecken, und die vollständigen Halluzinationen, die glücklicherweise ziemlich selten zu sein scheinen.

Im ersten Falle fehlt die Übereinstimmung der Empfindungen untereinander und das Verhältnis des Subjekts zum Objekt der Halluzinationen ist deshalb nicht dasjenige, das der Existenz eines realen Objektes entspricht. Infolgedessen ist es leicht, den Irrtum der Sinne zu erkennen, wenn nicht aus anderen Gründen eine Gehirnaffektion die Möglichkeit zu urteilen ausschließt.

So sind z. B. Leute, die infolge von Alkoholvergiftung an *Delirium tremens* leiden, häufig Gesichtshalluzinationen ausgesetzt; sie sehen zuweilen Weingläser, aber wenn sie die Hand ausstrecken, um sie zu ergreifen, so bemerken sie, daß keine da sind.

In dem durch *Kokain* hervorgerufenen *Delirium* ergreifen die Halluzinationen den Tastsinn; bei den *Paranoikern* sind es mehr Gehörshalluzinationen, die die Kranken an ihre fixe Idee knüpfen, nach der sie dem Leben eine systematisch verfälschte Deutung geben.

Man darf jedoch nicht vergessen, daß im allgemeinen die Halluzinationen den Geist des Kranken hochgradig verwirren, indem sie Gefühle des Schreckens, des Aberglaubens, der Leidenschaft erregen. Diesem besonderen Umstande ist es anscheinend zu verdanken, daß die meisten Halluzinierenden, besonders *Hysterische* und *Epileptiker*, nicht imstande sind, eine Willensanstrengung zu machen, um die Aufmerksamkeit auf die Daten der verschiedenen Sinne zu lenken, deren Vergleichung die Täuschung, in der sie sich befinden, beseitigen müßte.



Diese Bemerkung läßt uns vermuten, daß die Tatsache der Halluzination, selbst wenn es sich um vollständige Halluzination handelt, sich zu dem gewöhnlich von uns bei der Beurteilung der Wirklichkeit angewandten Kriterium in eine derartige Beziehung setzen läßt, daß sie nicht mehr als wirkliche Ausnahme erscheint.

Es scheint in der Tat, daß die vollständige Halluzination, die sich in keiner Beziehung von dem Empfindungskomplex unterscheidet, dem ein wirklicher Gegenstand entspricht, einen Geisteszustand voraussetzt, in dem der Wille eingeschläfert oder gleichsam erloschen ist. Und wirklich kommen die charakteristischsten vollständigen Halluzinationen im *hypnotischen Schlaf* vor, wenn der Patient vollständig von dem Willen des Hypnotiseurs unterjocht ist.

Man kann also sagen, daß in solchen Fällen die Vorbedingung für die Kontrolle der Wirklichkeit fehlt. Es ist nicht möglich, zu *zweifeln* und die trügerischen Eindrücke einer *vom Willen angestellten Probe* zu unterwerfen.

Wir erheben nicht den Anspruch, die Fragen der Halluzination hiermit erschöpft zu haben. Dieses weite, der psychologischen Forschung immer noch offene Gebiet würde ein tieferes Studium erfordern, das wir hier nicht unternehmen können.

Es genügt auf die Schwierigkeiten hingewiesen zu haben, die sich von dieser Seite gegen unsere positive

Definition der Wirklichkeit erheben könnten, und zugleich angedeutet zu haben, daß diese Schwierigkeiten nicht unüberwindlich erscheinen.

Wenn es gelingt, nachzuweisen, daß der Halluzinierende, der einer vollständigen Halluzination unterliegt, nicht die Möglichkeit besitzt, seine trügerischen Eindrücke kontrollieren zu *wollen* (und gewisse Theorien, die das Faktum aus Vorgängen in der Hirnrinde erklären wollen, berechtigen zu diesem Schluß), so würde das oben definierte Kriterium der Wirklichkeit sich in diesem Falle zwar als unanwendbar, nicht aber als widerlegt erweisen. Damit wäre eine Ausnahme, die unsere Gedanken über die Wirklichkeit stören würde, beseitigt.

## § 9. Die biologische Bedeutung des Glaubens an die Wirklichkeit.

Wir haben gesehen, daß der Glaube an die Wirklichkeit irgendeines Dinges immer eine Annahme in sich schließt, auf die sich unsere *Erwartungen* oder *Voraussagen* stützen.

Der praktische Wert einer solchen Annahme liegt in der Regel, die sich daraus für den Willen ergibt, sofern er sich gewisse Zwecke setzt.

Unter diesem Gesichtspunkt erscheint jede Diskussion über ihre Zulässigkeit müßig, sofern sie sich nicht auf die Kriterien bezieht, die den einzelnen Voraussagen größere Sicherheit verschaffen können. In diesem Sinne belehrt uns die Erfahrung, daß wir, um die weitgehendsten Voraussagen zu verwirklichen, den Kreis der ersten Annahmen unbegrenzt ausdehnen können.

Außerhalb dieser wissenschaftlichen Erfahrung entbehrt eine vorgreifende Entscheidung jedes positiven Inhaltes. Die Schlüsse der skeptischen oder idealistischen Philosophie können uns nur so viel lehren, daß die Annahme von etwas Realem nicht aus einem höheren Prinzip abgeleitet werden kann. Aber anderseits würde das gar nichts ändern, denn kein Mensch wird diese Annahme im Ernste bezweifeln, d. h. seine Handlungen so einrichten, als ob er nicht an die Wirklichkeit glaubte. In der Tat ist dieser Glaube eine unentbehrliche Grundlage des Lebens selbst; deshalb kann man darauf, solange man lebt, nicht verzichten.



Es liegt hier also, wie die englische empiristische Schule richtig hervorgehoben hat, ein Ausdruck unserer Tatkraft vor.

Wohlgemerkt! Dies bedeutet nicht, daß der erwähnte Glaube, wie er gewollt wird, auch nicht gewollt werden kann; denn es handelt sich um eine Grundbedingung für jede Ausübung des Willens, deren Verneinung zu der widersinnigen Vorstellung eines sich selbst widersprechenden Willens, der sich selbst aufheben würde, führen müßte.

Nur in besonderen Fällen kann der Wille von Furcht oder Hoffnung getrieben auf die Überzeugung einwirken, indem er die Anwendung der Kriterien verhindert, an denen wir die Wirklichkeit oder Unwirklichkeit eines Dinges erkennen; und ein solcher Einfluß kann auch ein systematischer werden in gewissen Arten von Fragen, wo falsche Voraussagen schwerer Lügen zu strafen sind. Aber diese Fälle gehen uns nichts an. Bei unserem Studium, das nur das eine Ziel der Wahrheit kennt, werden wir so gut wie möglich alle Gelegenheiten vermeiden, wo erwünschte oder unerwünschte Konsequenzen das unbestochene Urteil trüben könnten, das sich für eine wissenschaftliche Philosophie geziemt.

## § 10. Das Postulat der Erkenntnis.

Wir haben in den vorangehenden Paragraphen den Begriff der Wirklichkeit zu analysieren und unter ver-

schiedenen Gesichtspunkten auf seine Bedeutung zu untersuchen versucht. Versuchen wir jetzt das Ergebnis der Kritik schematisch zusammenzufassen, indem wir den Inhalt unserer Überzeugung durch das folgende Postulat ausdrücken:

Es gibt feste und von uns unabhängige Zusammenhänge zwischen unseren wirklichen oder angenommenen Willensregungen und den auf sie folgenden Empfindungen, beide in einem gewissen abstrakten Sinne genommen; sie entsprechen dem, was wir „wirklich" nennen. Ein wirkliches Ding impliziert immer verschiedene assoziative Beziehungen zwischen Folgen von Empfindungen, die unter bestimmten Bedingungen eintreten. Vermöge einer solchen unbegrenzt ausdehnbaren Vielheit von Beziehungen erweitert sich die supponierte Wirklichkeit über die Grenzen der Welt hinaus, die unmittelbar unseren Sinnen zugänglich ist; insonderheit erhält die Wirklichkeit durch die psychologische Supposition eine *soziale* Bedeutung (gemäß der comtischen Ansicht).

Auf diese Weise wird die Wirklichkeit definiert als eine *Invariante in dem Verhältnis zwischen Willensregungen und Empfindungen.*

Das Wort „Invariante" ist zuerst in der *Algebra der linearen Substitutionen* eingeführt worden und hat in den geometrischen und analytischen Untersuchungen von F. Klein, S. Lie, H. Poincaré usw. eine allgemeinere Bedeutung in bezug auf beliebige *Transformationsgruppen* angenommen. Seit einiger Zeit ist der Ausdruck in einer weiteren Bedeutung in die Wissenschaft überhaupt eingeführt worden und wird jetzt häufig gebraucht; besonders Ostwald spricht von der *Energie* als von einer Invariante, die mit dem gleichen Rechte als Gegenstand der Erkenntnis angesehen werden kann, wie die *Materie.*



Aber die Ansicht, daß das Wirkliche eine Invariante ist, muß genauer bestimmt werden, indem man den *Bereich der Elemente* (Willensregungen und Empfindungen) und die *Gruppe oder die Gruppen von Transformationen* näher angibt, auf die sie sich bezieht. Dies ist der Gegenstand der vorstehenden Kritik und der Sinn der von uns gesuchten *Definition der Wirklichkeit.*

Das Postulat, das wir ausgesprochen haben, gehört ebensowohl der gewöhnlichen vom Leben erforderten Erkenntnis als der eigentlich wissenschaftlichen an. Die Bedeutung dieser letzteren wollen wir jetzt aufzuklären versuchen, indem wir von der Betrachtung der rohen Tatsache, auf die sich die vorangehenden Bemerkungen bezogen, übergehen zur Analyse desjenigen, was für die Wissenschaft eine Tatsache darstellt.

Durch eine weitere Anwendung des erwähnten Postulats wird es nicht nur gelingen, die gewöhnliche Erkenntnis zu *erweitern*, sondern auch jene *Annäherung* zu verschärfen, die wie wir sahen, ihr eigentümlich ist. Dadurch wird der Begriff der Wirklichkeit noch weiter präzisiert werden.

## § 11. Unbearbeitete und wissenschaftliche Tatsachen.

Wer darauf ausgeht, die Unterschiede zwischen der unbearbeiteten Tatsache im gewöhnlichen Sinne des Wortes und der wissenschaftlichen festzustellen, findet vor allem in letzterer einen viel ausgesprocheneren *Charakter der Bedingtheit.*

In der Tat haben wir gesehen, daß jede Erkenntnis Bedingungen einschließt für das Eintreten der ihr zugeordneten Empfindungen. Und dies trifft sogar zu für das Faktum, das als vergangenes Ereignis sozusagen ein individuelles Leben führt.

Aber man kann *subjektive* und *objektive Bedingungen* unterscheiden. Wenn es sich auch nicht um eine strenge Unterscheidung handelt, so ist es doch angemessen gemäß ihrer bezüglichen Bedeutung einen Unterschied zwischen ihnen zu machen.

Die gewöhnliche Erkenntnis hängt hauptsächlich von den subjektiven Bedingungen ab; sie lehrt uns, wie man *hinschauen* muß, um zu *sehen*, wie man *sich bewegen* muß, um zu *berühren* usw.

Allerdings findet auch in diesem Falle eine Vergleichung der betrachteten Tatsache mit der sie umgebenden Wirklichkeit statt; aber es scheint, als ob dabei alles vergessen wird, was nicht die Mittel angeht zur Herstellung der Bedingungen, für das Eintreten der erwarteten Empfindungen.

Das Gegenteil tritt bei der wissenschaftlichen Erkenntnis ein. Die Tatsache wird nicht mit Rücksicht auf uns selbst betrachtet, sondern in Beziehung zu den sie umgebenden Tatsachen; man vernachlässigt in diesem Falle, wenigstens wenn man das Resultat ausspricht, die subjektiven Bedingungen unter denen es sich den Sinnen enthüllt, und zieht nur die objektiven Bedingungen seines Zustandekommens in Betracht.

Eine solche Betrachtungsweise der Tatsachen bringt etwas zu ihnen hinzu, was die gewöhnliche Erkenntnis im dunkeln läßt. Daher erwächst eine wissenschaftliche Tatsache sozusagen aus einer Vielheit in ihr enthaltener unbearbeiteter Tatsachen; sie gewinnt an *Allgemeinheit*, indem sie neue und ausgedehntere Beziehungen in sich vereinigt.

## § 12. Die physikalischen Tatsachen.

Die vorstehenden Bemerkungen lassen sich leicht durch einige Beispiele erklären.



Wir schlagen mit einem Hammer auf eine Kupferplatte; darauf bemerken wir, indem wir sie anfassen, daß sie sich erwärmt hat.

Das sind zwei rohe Tatsachen, die sich nacheinander einstellen. Die genaue Beschreibung der Umstände, unter denen sie eintreten, und der dabei auftretenden Empfindungen bleibt noch im Gebiet der gewöhnlichen Erkenntnis. Dieselbe lehrt uns, wie der Hammer beim Schlagen gehandhabt werden muß oder wie man am besten die Platte anfaßt, um die Wärme zu empfinden. Dies sind subjektive Bedingungen, die in die wissenschaftliche Erkenntnis der Tatsache nicht eingehen.

Die Wissenschaft behält nur folgendes übrig: „Das mit dem Hammer geschlagene Kupfer erwärmt sich." Es verschwinden aus diesem Ausdruck die unbedeutenden Einzelheiten des Experiments, aber zu den beiden rohen Tatsachen tritt die Beziehung der Aufeinanderfolge, die als unveränderlich angesehen wird.

Die wissenschaftliche Tatsache besteht in dieser Beziehung. Sie lehrt uns folgendes: „Man kann die Empfindungen haben, die die Erwärmung des Kupfers anzeigen, wenn in irgendeiner Weise die Handlungen geschehen, die ein Schlagen desselben mit einem Hammer zur Folge haben." Wenn man jedoch bemerkt, daß andere Metalle oder auch irgendwelche anderen Körper sich beim Schlagen erwärmen, und daß die Erwärmung stattfindet, ob man sich zum Schlagen eines Hammers bedient oder irgendeines anderen Instrumentes, so gelangt man zu einer weiteren Auffassung der Tatsache und sagt: „die Körper erwärmen sich, wenn sie geschlagen werden."

Es ist so jede Bedingung eliminiert, die nichts mit der wahren das Faktum ausmachenden Beziehung zu tun hat, so daß man nur diese Beziehung zurückbehält, die dadurch eine allgemeinere Bedeutung erhält. Die

so verstandene wissenschaftliche Erkenntnis ist also lehrreicher. Wir erkennen als ihr Objekt eine Stufenfolge von Tatsachen, die zu immer höheren Graden der Allgemeinheit und Bedingtheit aufsteigt.

Was eine wissenschaftliche Tatsache ist, sieht man am besten aus der Physik. Der Fall schwerer Körper, die konstante Schmelz- und Siedetemperatur der Körper, die Reflexion, die Brechung, und die Polarisation des Lichtes, die elektromagnetische Induktion bieten ebensoviele Beispiele von zugleich allgemeinen und bedingten Tatsachen.

In ihnen enthüllt sich eine unveränderliche Beziehung der *Aufeinanderfolge* oder der *Koexistenz*, je nachdem es sich um *dynamische* oder *statische* Erscheinungen handelt.

Andere Wissenschaften werden uns Gelegenheit geben, die Frage zu erörtern, ob andere Tatsachen, die von diesem Typus abweichen, sich auf ihn zurückführen lassen.

## § 13. Tatsache und Gesetz.

Aber ehe wir dazu übergehen, müssen wir uns bei einer Wortfrage aufhalten, die einen ernsten philosophischen Streit veranlaßt hat.

Die bedingten Tatsachen, von denen oben die Rede war, werden gewöhnlich „Gesetze" genannt, besonders, wenn ihr Ausdruck einfach und allgemein ist.

Der Ausdruck „Gesetz" erweckt die Vorstellung einer willkürlich festgesetzten Beziehung, der die wirklichen oder möglichen Tatsachen genügen *sollen*. Dies ist die politische Bedeutung des Wortes. Und wenn auch der weise Gesetzgeber sich möglichst bemüht, nur Dinge zu befehlen, die schon in den Tatsachen eine Grundlage haben, so kann man sich doch jedenfalls ein Gesetz denken, das einer solchen Grundlage entbehrt; so erzählt man, daß ein orientalischer Herrscher strenge Vorschriften gegen das Duell erlassen habe, obgleich der Gebrauch desselben seinen Untertanen völlig unbekannt war.



Es ist leicht zu verstehen, wie die physikalischen Beziehungen unter diesen Gesetzesbegriff subsumiert werden konnten. Das ergibt sich in der Tat vollkommen klar aus der Vorstellung eines Chaos, aus dem Gott die gegenwärtige, nach einem vorher aufgestellten Plane geordnete Welt schuf.

Aber außer dieser theologischen Vorstellung bleibt mit dem Begriff eines *physikalischen Gesetzes* der Gedanke an etwas *Notwendiges* verknüpft, das statthaben *muß*, gleichgültig, ob die Tatsachen, deren Beziehung es ausdrückt, sich bestätigen oder nicht: wenn man z. B. die geometrischen und mechanischen Gesetze, die doch irgendeine Eigenschaft der Bewegung der Körper ausdrücken, als unabhängig vom Stattfinden derselben denkt.

„Notwendigkeit" ist ein Wort, dem von den Philosophen oft verschiedene Bedeutungen beigelegt werden und über das die disparatesten Werturteile gefällt werden. Was drückt dieses Wort aus?

Vor allem knüpft sich an jede Tatsache, sofern sie eine unveränderliche Beziehung der Gleichzeitigkeit oder der Aufeinanderfolge enthält, ein gewisses *Gefühl der Notwendigkeit*, das es unmöglich erscheinen läßt, willkürlich die Folge zu vermeiden, wenn die Voraussetzung gewollt wird.

Nun ist aber unser Einfluß auf die Verwirklichung der Voraussetzung um so größer in einem gewissen Sinne, je spezieller die Tatsache ist. In diesem Sinne entziehen sich die allgemeinen Tatsachen in höherem Grade dem Machtbereich unseres Willens und sind deshalb von einem stärkeren Gefühl der Notwendigkeit begleitet.

Aber das Gefühl der Notwendigkeit einer Tatsache hat nicht nur diese Bedeutung der Beschränkung unseres Willens. Es interessiert vor allem die Erkenntnistheorie, insofern sich daran die *Illusion* knüpft, daß gewisse *a posteriori* auf Grund von voraufgehenden Beobachtungen und Experimenten gebildete Vorstellungen eine *apriorische* Bedeutung hätten und infolgedessen über das Gebiet hinaus, auf das diese sich beziehen, unbegrenzt ausgedehnt werden dürften. Es ist deshalb wichtig, hervorzuheben, daß eine solche psychologische Notwendigkeit immer ein Gefühl bleibt, dessen Bedeutung lediglich subjektiv ist, d. h. nicht als Beweis für einen objektiven Tatbestand angeführt werden kann.

Die Geschichte der Wissenschaft bietet hierfür deutliche Belege.

Es genügt als Beispiel die Erklärung anzuführen, die man vor Torricelli für das Steigen des Wassers in den Pumpen gab, ein Vorgang, der demjenigen als notwendig erscheinen mußte, der der Natur einen horror vacui zuschrieb. Diese Notwendigkeit verschwand trotz dieses horrors, als der Mensch es unternahm, die Natur zu ermüden, indem er sie das Wasser höher als zehn Meter ziehen ließ!

Die Lehre, die sich aus ähnlichen Beispielen ergibt, kann man sich durch Induktion auch in bezug auf die allgemeineren Vorstellungen klar machen, obgleich hier eine starke Präsumtion zu bemerken ist, daß die Begriffe, die auf Grund vieler elementaren Beobachtungen und durch lange psychische Arbeit gebildet worden sind, der Gesamtheit der Tatsachen gut *angepaßt* sind, wenigstens innerhalb eines gewissen Gebietes. Dennoch kann man sagen, daß der objektive Wert der in solchen Begriffen enthaltenen Erkenntnisse letzten Endes nur durch Erfahrung festgestellt werden kann; diese muß



besonders ihr Anwendungsgebiet abgrenzen und ihren Genauigkeitsgrad feststellen mit Hilfe einer Vergleichung der Voraussagen, die sich auf sie stützen.

Indem wir für eine eingehendere Prüfung der Frage auf die Kapitel III, IV, V verweisen, genügt es hier, damit zu schließen, daß wir einen philosophischen Grund für die Unterscheidung von „Tatsachen" und „Gesetzen" nicht anerkennen können und uns daher nicht der Ansicht A. Navilles[1]) anschließen, nach der es Gesetzeswissenschaften gibt, die unabhängig von dem Inhalt den „canevas de la réalité" weben. Ein „vom Inhalt unabhängiges" Gesetz ist eine transzendentale Abstraktion, die dem Geiste unserer Kritik widerstreitet.

Kehren wir nun zur Analyse der wissenschaftlichen Tatsache zurück, um zu sehen, wie einige Tatsachen, die dem Anschein nach von dem in der Physik behandelten Typus abweichen, sich auf diesen zurückführen lassen.

## § 14. Die Tatsachen der Astronomie.

Wenn sich die wissenschaftlichen Tatsachen von den „rohen" durch einen höheren Grad von Bedingtheit und Allgemeinheit unterscheiden sollen, so ist es schwer, Entdeckungen, deren Zweck die einfache Konstatierung der Existenz neuer Objekte ist, als „wissenschaftliche" zu bezeichnen, obgleich sie ein unleugbares Interesse besitzen.

Wir brauchen, um lehrreiche Beispiele hierfür zu finden, das Gebiet der physikalischen Wissenschaften nicht zu verlassen; Astronomie und Chemie bieten uns solche.

Kann man die Wichtigkeit der Entdeckung eines Sternes verkennen, der bisher am Himmelsgewölbe

1) „Nouvelle classification des sciences", Paris. Alcan 1901. Vgl. die Kritik G. Vailatis in der „Rivista di Biologia generale" Juli 1902.

noch nicht gesehen worden ist? Und doch lehrt uns eine solche Entdeckung, wenn es sich um die Bestimmung der Koordination eines Sternes handelt, nicht viel mehr als die subjektiven Bedingungen für das Sehen eines neuen Gegenstandes.

Um zu verstehen, welche Stellung derartigen Tatsachen in der Wissenschaft zukommt, muß man bedenken, daß jede objektive Beziehung rohe Tatsachen voraussetzt, auf die sie sich bezieht. Die wissenschaftliche Erkenntnis erfordert also eine Grundlage von gewöhnlichen Erkenntnissen, die nur dann keiner ausdrücklichen Erwähnung bedürfen, wenn sie häufig in den Bereich der alltäglichen Erfahrung fallen wegen der Leichtigkeit ihrer Beobachtung. So braucht der Physiker, sintemalen viele eiserne Gegenstände zu seiner Verfügung stehen, kein Inventar von ihnen aufzustellen.

Wenn es sich aber um Objekte handelt, die wegen ihrer geringen Anzahl oder aus anderen Gründen besonders schwer zu beobachten sind, so hat es ein Interesse für die Wissenschaft, sie zur Wahrnehmung zu bringen. Die wissenschaftliche Untersuchung ist in diesem Falle gezwungen, auf eigene Rechnung eine vorbereitende Operation vorzunehmen, die sie in anderen Fällen schon ausreichend erledigt vorfindet.

Im Sinne dieser Erklärung müssen wir sagen, daß die Entdeckung eines neuen Sternes zwar für die Astronomie wirklich ein wichtiges Ergebnis ist, daß sie aber noch nicht eigentlich eine wissenschaftliche Erkenntnis bildet (sofern dies nur eine „graduelle" Bedeutung hat); daß ihre Bedeutung vielmehr darauf beruht, daß sie das Gebiet der rohen Tatsachen erweitert, deren Beziehungen im engeren Sinne das Objekt der Wissenschaft bilden.

Unter diesem Gesichtspunkt wird der Wert einer derartigen Entdeckung auf das richtige Maß zurückgeführt; und man sieht, daß er rasch abnimmt, in dem Maße, wie die Vervollkommnung der Instrumente die Erweiterung des Beobachtungsfeldes erleichtert.



Es ist daher hier der Ort, einen wichtigen Unterschied festzustellen zwischen der Entdeckung eines Sternes und der eines Planeten.

In letzterem Falle kann man an der Tatsache die Merkmale des wissenschaftlichen Typus erkennen.

Sehen wir z. B. zu, was uns Herschel durch die Entdeckung des *Uranus* gelehrt hat.

Verschiedene Beobachter hatten vor ihm dieses Gestirn im Felde ihres Teleskops gefunden, so daß er mehrmals als Fixstern katalogisiert wurde. Um ihn dem Planetensystem zuzuweisen, mußte Herschel seine Bewegung um die Sonne verfolgen und damit die objektiven Bedingungen bestimmen, unter denen seine Beobachtung wiederholt werden konnte.

Diese Bedingungen, oder wenn man will, die Lagebeziehungen, die das Gestirn mit der Sonne verbinden, bilden in Wahrheit die neue Tatsache, die durch die Entdeckung des Planeten festgestellt wurde.

Zu der Zeit, um die es sich handelt, verband sich mit der Entdeckung noch ein anderes Interesse, das sich auf die Bestätigung oder Modifikation bezog, die man für die Newtonsche Theorie davon erwarten durfte.

Die Astronomen, vertrauend auf das Gesetz, das die bekannten Tatsachen so genau erklärt hatte, sahen mit ungeheurem Erstaunen, daß der neue Planet die auf dasselbe gegründeten Voraussagen Lügen strafte. Man mußte entweder eine Ausnahme zugeben, die die Regel aufhob oder seine Zuflucht zu der Hypothese eines anderen unbekannten Planeten nehmen, dessen störende Wirkung die Abweichung des Uranus von der elliptischen Bahn erklärte.

Dieser von Arago vorgeschlagene Gedanke wurde von Le Verrier der Rechnung unterworfen. Die empirische

sogenannte Bodesche Regel (die sich hier als ziemlich ungenau erwies) erlaubte das Problem zu einem bestimmten zu machen. Und die Entdeckung des *Neptun*, der infolge eines glücklichen Zusammentreffens sich sehr nahe an dem Orte befand, den ihm Le Verrier a priori angewiesen hatte, wurde als ein Triumph der planetarischen Astronomie begrüßt, insofern sie die Realität der überaus einfachen im Newtonschen Gesetz enthaltenen Beziehungen glänzend bestätigte.

## § 15. Die chemischen Tatsachen.

Die irdischen Wissenschaften bieten gleichfalls Beispiele von Tatsachen, deren Erkennung nur die Entdeckung eines neuen Gegenstandes bedeutet.

Indem wir die Geographie übergehen, die uns zu keinen anderen als den vorstehenden Bemerkungen Anlaß gibt, wollen wir zusehen, welche Bedeutung für die Chemie das Hinzukommen eines neuen Körpers zu dem Verzeichnis ihrer Elemente besitzt.

Kein Zweifel, daß dies eine Tatsache von der höchsten Wichtigkeit ist. Aber man täte unrecht, in einer solchen Entdeckung nur die Erkenntnis einer einfachen rohen Tatsache zu erblicken und das Interesse daran nur auf die kleine Zahl der bekannten Elemente zurückzuführen.

Vor allem drückt eine solche Erkenntnis aus, daß gewisse Körper nicht über eine gewisse Grenze hinaus reduziert oder zerlegt werden konnten, sie schließt also eine Irreduzibilität des Elementes in bezug auf eine gewisse Gruppe von Reaktionen in sich; aber mehr noch, sie muß nicht nur in einem negativen, sondern ebenso in einem positiven Sinne aufgefaßt werden und zwar als das Substrat einer Reihe von Beziehungen zwischen den Verbindungen, die das besagte Element enthalten.

Wenn vollends die Entdeckung einer Voraussage entspricht, die auf Grund der Erkenntnis weiterer Beziehungen aufgestellt worden war, so liefert sie die Bestätigung einer allgemeineren Tatsache, der die Merkmale der wissenschaftlichen Tatsache in noch höherem Grade zukommen. Dies gilt teilweise (wenn man die Schwierigkeit, die neuen Körper in die Theorie einzuordnen, in Rechnung zieht) von der Entdeckung des *Scandiums*, des *Galliums* und des *Geraniums*, die eine Lücke im periodischen System Mendeleieffs ausfüllen.



## § 16. Die Tatsachen der Naturwissenschaften.

Man weist den (biologischen) Naturwissenschaften im engeren Sinne des Wortes die Aufgabe zu, die Tiere und Pflanzen auf der Erdoberfläche systematisch zu klassifizieren. Es kann also scheinen, als ob es einen ganzen Zweig der Wissenschaft gibt, in dem man über die Erkenntnis roher Tatsachen in keiner Weise hinauszugehen braucht.

Um die Falschheit dieser Auffassung einzusehen, muß man vor allem bemerken, daß die Entdeckung einer neuen Art vom Sammler und vom Gelehrten niemals unter dem gleichen Gesichtspunkt betrachtet wird.

Diesem kommt es wenig darauf an, dem schon so großen Verzeichnis der Tier- oder Pflanzenarten einen neuen Namen hinzuzufügen; er sucht vielmehr in jedem einzelnen Falle die konstante Verbindung von Merkmalen zu bestimmen, die den Typus einer Art ausmacht.

Daher wird der wahre Naturforscher, wenn er nicht spezielle Zwecke verfolgt, sich kaum die Mühe nehmen, die kleinen Einzelheiten zu beschreiben, durch die sich ein Individuum von den anderen seiner Art unterscheidet. Er wird auch der Unterscheidung von Varietäten und Untervarietäten, die man nach Belieben vermehren kann, kein allzu großes Gewicht beilegen.

Die Erkenntnis einer festen Verbindung von zoologischen oder botanischen Merkmalen ist eine wirklich

wissenschaftliche Erkenntnis eines sehr bedingten Faktums; zwischen diesem und dem physikalischen Faktum ist lediglich der Unterschied, daß im ersteren die Beziehungen der Gleichzeitigkeit, im letzteren die der Aufeinanderfolge vorwiegen.

Im übrigen ist auch hier eine Stufenfolge von solchen Tatsachen vorhanden, die zu immer höheren Graden der Allgemeinheit aufsteigt; so bildet man z. B. aus der genauen Beschreibung des Nervensystems der verschiedenen Arten der Gliederwürmer oder der Insekten den allgemeinen Begriff dieses aus dem Schlundring und der Ganglienkette bestehenden Systems, das den Typus des Nervensystems für den größten Teil der wirbellosen Tiere bildet.

Aber in den Naturwissenschaften auch im engeren Sinne des Wortes werden nicht nur feste Verbindungen von Merkmalen untersucht, d. h. statische Tatsachen, sondern auch wirkliche Beziehungen der Aufeinanderfolge ähnlich denen, mit denen sich die Physik häufiger beschäftigt. Und es ist kein Zweifel, daß derartige Erkenntnisse eine erhebliche Bedeutung haben.

Dynamischen Tatsachen begegnet man bereits in der Morphologie, selbst wenn man sich bei ihrem Studium auf die Zwecke der Systematik beschränkt. Will man z. B. in der Zoologie die verschiedenen Fälle von *unvollkommenem Hermaphroditismus (Dichogamie)* klassifizieren, so muß man neben der an anatomische Bedingungen geknüpften Dichogamie, wie sie bei den *Regenwürmern*, den *Blutegeln* oder den *Seehasen* auftritt, diejenige betrachten, die von zeitlichen Bedingungen abhängt, d. h. von der verschiedenen Zeit, in der die Eier und die Spermatozooen reifen (*proterogyne* Dichogamie der *Salpen* und *proterandrische* Dichogamie der *isopodischen Crustaceen*, die der Familie der *Fischasseln* angehören).



Übrigens kann man allgemein sagen, daß die systematische Klassifikation in den Naturwissenschaften nicht nur auf dem Studium der statischen Anatomie, sondern auch auf der dynamischen Anatomie (Beispiel: die *Metarmophose*) und im besonderen auf der Embryologie beruht. Es genügt, daran zu erinnern, daß die schärfste Unterscheidung zwischen höheren Tieren und höheren Pflanzen *(Metazoen* und *Metaphyten)* durch die Feststellung des *Gastrulastadiums* in der embryogenetischen Entwickelung der ersteren gegeben ist.

Es kommt hinzu, daß die Naturwissenschaften ihre Aufgabe nicht in der Klassifikation erschöpfen, gehen doch schon sehr viele wichtige Untersuchungen über diesen Zweck hinaus, z. B. die, welche mit den verschiedenen Arten der Zeugung bei den höheren Tieren, der zweigeschlechtigen, der parthenogenetischen, der ungeschlechtlichen zusammenhängen.

Die Entdeckung des Generationswechsels (später in *Metagenesis* und *Heterogonie* getrennt) erregte in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ein großes und berechtigtes Interesse bei den Naturforschern; und sie bildet sicher eine hohe wissenschaftliche Erkenntnis, die verschiedene Arten der Periodizität im Leben der Tiere ans Licht brachte.

Und jedes Ergebnis, das sich auf die Fortpflanzung bezieht, enthält eine Beziehung von allgemeinem Interesse, handle es sich nun um die jugendliche Fortpflanzung *(Neotenie* und *Pädogenese)* oder um die eigentümliche Erscheinung, die Chun bei den *Rippenquallen* beobachtet hat, bei denen zwei Perioden der Fruchtbarkeit durch die Metamorphose getrennt sind *(Dissogonie)*.

Endlich haben die Naturwissenschaften unter dem Einfluß der Entwickelungslehre die Erforschung der dynamischen Beziehungen ungeheuer erweitert, indem

sie sich das Ziel setzten, den Prozeß der Veränderung der Arten zu rekonstruieren.

Durch Beispiele aus der Zoologie haben wir versucht, die Eigenart der Tatsachen festzustellen, die in den Bereich der Naturwissenschaften im engeren Sinne des Wortes fallen. Aber das Bild dieser Wissenschaften würde unvollständig bleiben, wenn man sie nicht in ihrem Zusammenhange mit den anderen Zweigen der biologischen Wissenschaften betrachtete.

So entspringt z. B. die Trennung zwischen systematischer Zoologie und der Tierphysiologie lediglich aus dem Bedürfnis der Arbeitsteilung, so daß man sich von der einen keinen richtigen Begriff machen kann, ohne die andere in Betracht zu ziehen. Denn die beiden Arten von Tatsachen durchkreuzen sich; eine vorausgegangene Klassifikation erleichtert die physiologische Untersuchung, und ein physiologisches Studium liefert neue Kriterien, um die Klassifikation zu verbessern, wenn auch heute derartige Kriterien ein wenig vernachlässigt werden.

Trotz der unvermeidlichen Hindernisse, die in der Verschiedenheit der Beobachtungs- und Experimentiertechnik liegen, ist es doch ein und dieselbe Art von Tatsachen, die sich dem Blick des Forschers darbietet, der die biologischen Wissenschaften treibt, und je weiter die wissenschaftliche Untersuchung fortschreitet, um so deutlicher erkennt man in jener den Typus wieder, der uns bei der Betrachtung der Physik begegnete.

So vollzieht sich heute unter dem Einfluß des erweiterten Begriffs eine tiefgreifende Änderung in der Richtung der biologischen Arbeit, und die Wissenschaft wendet sich zur Erforschung allgemeinerer und bedingterer Beziehungen. Man darf sich einen großen Fortschritt davon versprechen, wenn die Forscher, die auf getrennten Gebieten arbeiten, im Geiste über die Probleme,



die ihnen ihre besondere Technik stellt, hinausblickend sich zu einem gemeinsamen Ziele vereinigen; von den Seestationen, wo eine so große Menge bisher noch wenig bekannter oder nur morphologisch beschriebener Wirbelloser zusammenkommt, erwartet die Physiologie die Antwort auf viele Fragen, die hier an einfacheren und zugleich mannigfacheren Organen studiert werden können.

## § 17. Geschichtliche Tatsachen.

Zwischen dem Tatsachentypus, wie ihn die Wissenschaft betrachtet, und dem, der der Geschichte angehört, wollen Einige einen unüberbrückbaren Unterschied sehen, den andere wiederum zu beseitigen suchen.

Auf jeden Fall muß man sich zunächst folgendes klarmachen:

Die Geschichte ist keine Sammlung von rohen Tatsachen, denn das einzelne zufällige Ereignis erhält in ihr nur Bedeutung durch seine Beziehungen zu anderen Ereignissen.

Aber wie wir schon bemerkten, kann diese Beziehung in zwei verschiedenen Richtungen gesucht werden: entweder in *geschichtlicher* oder in *wissenschaftlicher* Absicht. Daraus ergeben sich zwei Betrachtungsweisen der Erkenntnis der Vergangenheit, zwei Methoden, nach denen ihr Material geordnet werden kann, und die zweien nach unserer Ansicht gleichberechtigten Zielen entsprechen. Die Frage, über die gerade in letzter Zeit so viel gestritten worden ist, ob die Geschichte eine Kunst oder eine Wissenschaft ist, entspringt aus dieser Verschiedenheit der Gesichtspunkte und kann nicht anders als durch eine Wahl entschieden werden, die aber lediglich die Behauptung eines Interesses enthält und die Berechtigung eines anderen Interesses nicht ausschließen kann, das neben dem ersten aber nicht im Gegensatz zu ihm steht.

Nun können die vergangenen Ereignisse (besonders die, welche das soziale Leben der Menschen betreffen) in einer Synthese vereinigt werden, die eine um so vollkommnere Rekonstruktion des verflossenen Augenblicks liefern wird, je mehr sie von jener besonderen Note enthält, die dem Augenblicke selbst oder den Personen, die in ihm handeln, ihre charakteristische Physiognomie verleiht. In diesem Falle handelt es sich um eine *künstlerische Darstellung*, sei es zu einem rein kontemplativen Zweck, sei es um damit die Gefühle der Menschen zu beeinflussen.

Wir haben denen nichts zu erwidern, die (wie unser Landsmann B. Croce) behaupten, daß dies der eigentliche Sinn der Geschichtsschreibung sei; und es scheint uns klar, daß diesem künstlerischen Begriff die Forderung der *Wahrheit* der geschichtlichen Tatsachen nicht widerspricht; diese erscheint einerseits als Bedingung für eine widerspruchsfreie Ausdehnung der beabsichtigten Darstellung, anderseits als besondere Bedingung für ein *Interesse* an ihr, d. h. als Bestandteil ihrer Wirkung auf das Gefühl. Während der Dichter, von Zweifeln nicht angefochten, der Stimme lauscht, die aus dem finsteren Kerker des estischen Kastells in Ferrara heraufklingt und von Parisina und Hugo erzählt, befragt der Geschichtsschreiber skeptisch die Urkunden, ob er in ihnen eine Spur finde, die die rührende Sage bestätigen oder widerlegen kann.

Aber neben dem Wert, den die geschichtliche Rekonstruktion als Kunst beanspruchen kann, bleibt Raum für den Begriff einer wissenschaftlichen Geschichtsschreibung, die alle Tatsachen der Vergangenheit (auch die, welche, wie z. B. die geologischen, aus dem menschlichen Gebiet heraustreten) umfaßt und ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht, um so eine Voraussage zu erleichtern.



Der besondere Charakter dieser Ansicht muß erklärt werden, indem man die Grenzen und das Wesen der erwähnten Voraussagungen bestimmt, besonders mit Rücksicht auf die menschliche Geschichte. Wenn es sich z. B. darum handelt, die Aufgabe der Geschichtsschreibung auf die bloße Vorbereitung gewisser Wissenschaften, wie der Sprachforschung oder der Nationalökonomie usw. zu beschränken, oder wenn man sie geradezu in eine soziologische Wissenschaft verwandeln will, die vermöge des Studiums der Vergangenheit der zukünftigen Gesellschaft das Horoskop stellt, so werden die Jünger der Geschichtsforschung gegen diese Art, die Dinge zu betrachten, Einspruch erheben.

Sie werden z. B. sagen, daß die Erkenntnis einiger allgemeiner Gesetze, die den Gegenstand der Sprachforschung bilden, keinen Ersatz bieten kann für die Untersuchung der besonderen Bedingungen, nach denen die Veränderung oder Entwickelung einer gegebenen Sprache sich in Wirklichkeit vollzogen hat. Und in ähnlicher Weise ist die abstrakte Kenntnis einiger allgemeiner wirtschaftlicher Beziehungen weit davon entfernt an die Stelle der historischen Erkenntnis einer Art von sozialen Tatsachen treten zu können, in denen man vielmehr eine Erklärung jener Beziehungen findet. Noch weniger können uns die soziologischen Gesetze, falls man deren Existenz zugibt, etwas Bestimmtes über eine Zeit oder ein Milieu lehren, denn gewisse sehr allgemeine Verknüpfungen in Raum und Zeit sind weit davon entfernt, die Vielgestaltigkeit der Wirklichkeit zu erschöpfen.

Wenn man also der Geschichtsforschung einen wissenschaftlichen Wert für Voraussagen zuschreibt, so kann es sich wenigstens in der Regel nicht um eine hinreichend bestimmte Voraussage der geschichtlichen Zukunft handeln.

Aber die Erforscher der Vergangenheit verstehen die Aufgabe der durch Vergleichung der auf eine Periode oder ein Milieu bezüglichen Urkunden erhaltenen relativ allgemeinen Erkenntnisse anders; sie bedienen sich ihrer als Mittel der Deutung und Korrektur dieser Urkunden selbst und werden so in den Stand gesetzt, die bereits erkannten rohen Tatsachen durch geeignete Hypothesen zu vervollständigen und sie ihrer Bedeutung nach zu verstehen. Die geschichtliche Erkenntnis hat also insoweit wissenschaftlichen Wert, als sie in einem gewissen Sinne dazu dient vorauszusagen, welches Resultat andere Untersuchungen haben werden, die sich auf dieselbe Vergangenheit beziehen, d. h. soweit sie imstande ist, die fernere Geschichtsforschung zu leiten.

Was auch der letzte Zweck sein mag, um dessentwillen eine solche Untersuchung unternommen werden kann, das Ziel, die vergangene Wirklichkeit schrittweise zu rekonstruieren, reicht für sich schon aus, den Gegenstand einer als Wissenschaft aufgefaßten Geschichtsschreibung auszumachen, in der die Bedeutung einer jeden Erkenntnis nach ihrem heuristischen Wert bemessen wird, und wo folglich die relativ allgemeine Beziehung (in den Grenzen hinreichender Bestimmtheit) mehr interessiert als das einzelne Faktum und unabhängig von den daran sich knüpfenden Gefühlswerten. So erforscht man in der Geschichte der Architektur, mehr als die besonderen Merkmale der einzelnen Werke, systematisch diejenigen, an denen man eine Schule, z. B. die byzantinische oder die französische Gotik erkennt und von anderen unterscheidet. So werden in der politischen Geschichte Roms neben den einzelnen Ereignissen und kriegerischen Wechselfällen, durch die aus der Republik das Kaiserreich wurde, durch eine tiefer gehende Untersuchung Faktoren allgemeinerer Art aufgedeckt, die diese Umwandlung, abgesehen von ihrer



besonderen Erscheinungsform, erklären und sie als das Produkt allgemeiner Ursachen erscheinen lassen; z. B. die Übertragung des römischen Bürgerrechtes auf die italischen Verbündeten im Jahre 89 (unter dem Konsulat des Lucius Cäsar), durch die ein auf die direkte Teilnahme der Bürger gegründetes Staatsregiment unmöglich geworden war. Und in der modernen Geschichte Englands werden die stufenweisen Fortschritte der liberalen und demokratischen Entwickelung im Vergleich zu den anderen Ländern durch die Bemerkung erleuchtet und erklärt, daß in England Volk und Aristokratie traditionell dem Monarchen gegenüber die gleiche Haltung einnahmen.

Neben der künstlerischen Entwickelung und unabhängig von ihr schreitet die Geschichte als Wissenschaft in unseren Tagen fort und lenkt die Untersuchung auf immer tiefere und allgemeinere Zusammenhänge. Die heute systematisch betriebene Untersuchung der wirtschaftlichen Faktoren ist ein Ausdruck dieser Tendenz, über das mehr offen Liegende und künstlerisch Interessante zu den inneren Ursachen der Ereignisse vorzudringen, die diese in ein neues Licht setzen und eine vollkommnere Rekonstruktion der Vergangenheit ermöglichen.

In diesem Sinne nähert sich der Typus des historischen Faktums dem des wissenschaftlichen; die historische Wirklichkeit erweitert sich wie die physikalische und entfernt sich von uns durch Hypothesen, sie hat die Tendenz, sich als eine Kette von Zusammenhängen darzustellen, gewissermaßen als eine Reihe von *Invarianten der Quellen*, die zum Abstrakteren fortschreitet.

Wer aber den Parallelismus bis in seine äußersten Konsequenzen verfolgen will, dem stellt sich eine besondere Schwierigkeit entgegen, die der menschlichen Geschichte eigentümlich ist und in den anderen Zweigen der Geschichtswissenschaft, z. B. der Geologie, fehlt.

In der physikalischen Untersuchung haben wir das Vertrauen, den kausalen Determinismus ohne notwendige Grenze immer weiter ausdehnen zu können. Diese Ansicht läßt sich nicht ohne weiteres auf das historische Gebiet übertragen; denn wenn man auch den Determinismus im weitesten Sinne zugibt, so folgt daraus noch nicht der *historische Determinismus* in dem Sinne, daß alle Tatsachen des sozialen Lebens der Menschen aufgefaßt werden können als Folgen von sozialen Ursachen, die durch eine tiefer gehende Untersuchung aufgedeckt werden könnten. Eine *historische Erklärung* in diesem Sinne kann offenbar scheitern an Umständen wie dem Tod eines Menschen oder einem Unwetter, das eine Schlacht entscheidet, die in bezug auf die Geschichte der Gesellschaft zufällig sind; daher ist die *Zufallstheorie* Cournots, die aus ähnlichen Bemerkungen eine Beschränkung des historischen Determinismus ableitet, unwiderlegbar.

Die Abschätzung der Bedeutung derartiger zufälliger Ereignisse, kurz die Bestimmung der Grenzen des erwähnten Determinismus erscheint noch heute als das große Problem der Geschichtsphilosophie.

## § 18. Die der wissenschaftlichen Erkenntnis zugrunde liegenden Annahmen.

Wir waren gezwungen, neben dem Typus der wissenschaftlichen Tatsache, wie ihn die Physik darbietet, einige Arten von Tatsachen zu besprechen, die ziemlich weit von ihm abzuliegen scheinen. Kehren wir jetzt zu ihm selbst, wenn man will zu seinem vollkommensten Ausdruck zurück, um an ihn einige Überlegungen allgemeinen Charakters zu knüpfen.

Vor allem erscheint die wissenschaftliche Tatsache, deren Physiognomie wir gezeichnet haben, in einem steten



Fortschritt begriffen, indem sie zu immer größerer Bedingtheit und Allgemeinheit aufsteigt und so immer mehr rohe Tatsachen in sich zusammenfaßt.

Aber ein anderer Umstand zieht unsere Aufmerksamkeit auf sich. Bei diesem Fortschritt entfernt sie sich immer mehr von der Wirklichkeit, die unmittelbar unter das Urteil der Sinne fällt; der Kreis der Hypothesen erweitert sich weit über die gewöhnlichen Bedürfnisse des Lebens hinaus; der Bereich der Erkenntnis dehnt sich über eine Vielheit von Tatsachen aus, deren Bestätigung praktisch unmöglich wird und die sich dennoch untereinander stützen, wie die Glieder einer Kette, deren Enden in unseren Händen sind.

Nur die Gewohnheit verhindert uns zu sehen, wieviel Hypothetisches einige Tatsachen enthalten, die wir für Gegenstände unmittelbarer Beobachtung halten.

Man kann sich nichts Evidenteres denken als die Existenz einer aus glühender Masse bestehenden Sonne. Und doch setzt diese Behauptung der Astronomie eine ganze Reihe unverifizierbarer Empfindungen voraus. Ja, die Tatsache, die man heute als der Beobachtung jedermanns zugänglich betrachtet, wurde in der unsrigen ziemlich nahen Kulturperioden nicht angenommen. So empörte sich das hellenische Volk, das wir doch als ein Vorbild hoher Kultur betrachten, über den Philosophen, der den göttlichen Apollo in unerhörter Weise materialisierte und in der Sonne einen brennenden Körper *größer als der Peloponnes* zu sehen wagte!

Prüfen wir die Bedeutung der in der wissenschaftlichen Erkenntnis enthaltenen Annahmen.

Eine Tatsache annehmen bedeutet:

1. Gegebene Empfindungen unter gewissen zukünftigen Bedingungen erwarten (oder voraussehen);
2. Zwischen die augenblicklichen oder herstellbaren Empfindungskomplexe andere einschalten, die ihre

Verknüpfung zu gegebenen Voraussichten ermöglichen.

Die erste Bedeutung bezieht sich auf das Gebiet der *Erfahrungen*, die als *möglich* angesehen werden. Die Feststellung der Grenzen dieses Gebietes ist schwierig und hängt, wenigstens teilweise, von dem Stande der Kenntnisse ab, denn die Verwirklichung gewisser schwieriger Bedingungen, die heute unmöglich scheint, kann morgen gelingen.

Jedenfalls schreibt man unabhängig von der *konkreten* Möglichkeit denjenigen Annahmen eine *begriffliche* Möglichkeit zu, die lediglich eine *Erweiterung* der *Bedingungen*, unter denen zurzeit das Experiment angestellt werden kann, und der ihm entsprechenden *bekannten Empfindungen* enthalten. So spricht man von *entfernten Tatsachen* ähnlich wie von naheliegenden, und von *sehr großen* oder *sehr kleinen* Gegenständen, wo nur eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Sinnesdaten ohne Änderung ihres eigentlichen Charakters erfordert wird; gewisse Instrumente, wie das Teleskop oder das Mikroskop usw., geben dieser Erweiterung der Wahrnehmung eine konkrete Bedeutung.

In bezug auf die zweite Bedeutung ist die Möglichkeit von Annahmen in keiner Weise durch die Unmöglichkeit, die erforderlichen Bedingungen zu realisieren, beschränkt; an Stelle der *direkten* Bestätigung tritt dann eine unbegrenzt ausdehnbare *indirekte;* in dieser Fortsetzbarkeit liegt eine Eigenschaft der *Tatsachenhypothesen*, denen eine Vorstellung entspricht, die in jeder Beziehung und ohne notwendige Beschränkung vervollständigt werden kann.

Nur bei dem Prozeß der Erwerbung der Erkenntnis, nicht in der fertigen positiven Wissenschaft, begegnen wir neben diesen noch anderen *(vorstellungsmäßigen)* Hypothesen, bei denen die Bedingungen und die mit



ihnen verknüpften Empfindungen nicht nur über die augenblicklich durch die Praxis gezogenen Grenzen hinausgehen, sondern wo sie *unnatürlich* sind, insofern sie uns zwingen, von gewissen Daten zu abstrahieren, die in ähnlichen Fällen das Experiment liefert, und so die Vorstellung der angenommenen Tatsache beschränken. Die Gegenstände, die diesen Vorstellungen entsprechen, können folglich nicht als *wirkliche* Dinge gedacht werden, sondern nur als *Scheinwesen*, die eine (etwas unbestimmte) Vermittlerrolle zwischen den Tatsachen spielen; so z. B. die *Bilder* des Atoms, des Äthers usw.

## § 19. Der Wert der wissenschaftlichen Erkenntnis.

Eine andere Überlegung von allgemeinem Charakter betrifft die Frage, die sich wiederholt wenigstens implizite bei der Analyse des „Faktums" einstellte, nämlich die nach dem *Wert* der wissenschaftlichen Erkenntnis.

Eine tiefer gehende Untersuchung dieser Frage würde notwendig das Gebiet der Wissenschaft verlassen, denn die wissenschaftliche Tatsache stellt sich letzten Endes dar als eine Summe von rohen Tatsachen und ihr Interesse hängt daher ab von dem Interesse an jenen und ist folglich Gegenstand von *Werturteilen*, die von verschiedenen Kriterien abhängen können, je nach den Zwecken, die man sich setzt.

Aber innerhalb der Grenzen der Wissenschaft fällt das Urteil über den Wert der allgemeinen und abstrakten Beziehungen, das ihre Fähigkeit, die Tatsachen zusammenzufassen und darzustellen, mißt und ihre *Unterschiede* und *Ähnlichkeiten* untersucht in einer schon als interessant gegebenen Beziehung, nämlich in Hinsicht auf den Erkenntniszweck. Unter diesem Gesichtspunkt bildet die *Anzahl* der in einer wissenschaftlichen Tatsache vereinigten rohen Tatsachen, d. h. ihre Allgemeinheit, nicht das einzige Maß ihres Wertes; vielmehr ist

daneben noch ein subjektives Element zu berücksichtigen, nämlich die *Art der Zusammenfassung* derselben rohen Tatsachen, von der die Leichtigkeit konkreter Voraussicht und die Möglichkeit weiteren Fortschreitens der Wissenschaft abhängen.

## § 20. Die Erkenntnis durch Begriffe.

Sehen wir uns diese subjektive Seite der wissenschaftlichen Erkenntnisse etwas näher an!

Während ihr wirklicher Gehalt an Tatsachen wächst, die sozusagen zu allgemeineren Invarianten summiert werden, paßt sich die Form der Voraussicht immer mehr der Mannigfaltigkeit der Fälle an, indem sie immer unbestimmter wird.

Daher bilden die allgemeinen Beziehungen, für sich genommen, nicht lediglich „Summen von rohen Tatsachen", sondern sie enthalten, wie wir bereits sahen, eine *Abstraktion* oder Elimination von Gegebenem. Die wissenschaftliche Tatsache hat die Form einer *vereinfachten Tatsache*, den *Typus einer Reihe von möglichen Tatsachen;* und die konkrete Voraussicht kommt zustande, indem man zu dem Typus die Erkenntnis der als *zufällig* angesehenen *Elemente* hinzunimmt, die eine bestimmte reale Tatsache in der Reihe charakterisieren.

Nun nennt man einen solchen Typus *Begriff*, und man kann daher sagen, daß *die wissenschaftliche Erkenntnis das Bestreben hat, sich in Begriffen zu vollziehen;* hierin spricht sich ein Umstand von größter Wichtigkeit aus, den man bis auf Aristoteles zurückverfolgen kann, und den Kant seiner „transzendentalen Logik" zugrunde gelegt hat; es scheint aber jederzeit möglich, aus ihr neue und für die Theorie der Wissenschaft fruchtbare Folgerungen zu ziehen.

Die Tatsachen in Begriffen wiedergeben, heißt, wie gesagt, verknüpfen und abstrahieren, die rohen Daten



vereinigen und sie dann wieder trennen, indem diejenigen Bestandteile *ausgewählt* werden, die als *wesentliche* konstitutive Merkmale den Begriff ausmachen werden, und die *zufälligen* beiseite gelassen werden.

Eine ähnliche Auswahl trifft man, wie bemerkt (§ 5), schon in der gewöhnlichen Erkenntnis, und man kann sagen, daß sie zu der willkürlichen Disposition der Empfindungen gehört, die der erkannten Tatsache entsprechen, man kann diesen Parallelismus noch weiter verfolgen; die *Begriffsbildung* bildet nämlich die *willkürliche Voraussetzung* der wissenschaftlichen Tatsache, insofern sie eine Auswahl von Daten und damit eine *Disposition von Experimenten* erfordert.

Die Wichtigkeit dieses willkürlichen Elementes erhellt aus der Vergleichung *verschiedener Begriffe*, unter die eine gewisse Gruppe von Erfahrungen in gleicher Weise untergeordnet werden kann; dann entsteht nämlich eine gewisse *Willkürlichkeit* der wissenschaftlichen Erkenntnis, die nur verschwindet, wenn man die Begriffe unter dem Gesichtspunkt der *Erleichterung der Voraussicht* und ihrer *extensiven Ausdehnung* betrachtet.

Aber um diese Fragen zu diskutieren, muß man die Wissenschaft nicht als etwas Fertiges betrachten, sondern in ihrer Entwickelung, wo dann an die Stelle von *feststehenden Tatsachen Hypothesen und Theorien* treten.

Gehen wir also dazu über, die Erwerbung der Erkenntnisse zu behandeln, indem wir zuerst die historische Stellung des Problems auseinandersetzen und dann zeigen, wie seine Lösung sich an die oben ausgesprochene Lehre von der begrifflichen Erkenntnis knüpft.

## § 21. Empirismus und Rationalismus.

Bei der kritischen Prüfung der Erkenntnis, die, beim Zweifel beginnend, zu immer festerem und befriedigenderem Vertrauen führt, müssen wir auch von den Mitteln

der wissenschaftlichen Forschung sprechen. Es sind dies *Beobachtung*, *Experiment* und *Reflexion*.

Ohne in eine nähere Erörterung einzutreten, wollen wir nur bemerken, daß die beiden ersten häufig dem rationellen Verfahren entgegengesetzt werden. Der Streit zwischen *Empirismus* und *Rationalismus* entsteht gerade aus dieser falschen Art, sich die Dinge vorzustellen.

Aber der Streit ist heutzutage abgeschlossen für denjenigen, der verstanden hat, welche Stellung die verschiedenen Forschungsmethoden in der modernen Wissenschaft einnehmen. Und es ist bekannt, daß ganz verschieden erzogene Menschen auf verschiedenen Wegen zu dem gleichen Ergebnis gelangt sind. Besonders glücklich scheint mir die Art, wie Claude Bernard in seiner klassischen „Introduction à la Médecine expérimentale" die Frage behandelt.

Heutzutage verweist man den Anspruch, den Geheimnissen des Weltalls durch Überlegung auf die Spur zu kommen, ihre Enthüllung in den Gesetzen unseres Geistes zu finden, unter die Hirngespinste.

Aber anderseits ist klar, daß keine Beobachtung und kein Experiment irgendwelchen Wert hat, wenn es sich nicht auf ein Raisonnement stützt; andernfalls sind wir darauf angewiesen abzuwarten, ob die Natur so liebenswürdig ist, uns zu unterrichten, indem sie uns durch Zufall Fragen beantwortet, die wir nicht zu deuten vermögen.

Man braucht sich übrigens nur daran zu erinnern, wie wir den Kreis der Annahmen sich erweitern sahen, die immer tiefer in das Gebiet der wissenschaftlichen Realität eindringen, um einzusehen, wie weit wir von jenem beschränkten Empirismus entfernt sind, der nach dem Grundsatz des Apostels St. Thomas nur der unmittelbaren Sinneswahrnehmung Glauben schenkt.



Der Prozeß der Forschung erscheint uns heute als eine Geistestätigkeit, die, von den Empfindungen ausgehend, durch eine mehr oder weniger lange Schlußkette zu ihnen zurückkehrt.

Die verschiedenen Etappen dieses Prozesses werden von den verschiedenen Autoren, z. B. von Bernard und von Stanley Jevons, in ähnlicher Weise beschrieben; der letztere unterscheidet die *vorläufige Beobachtung*, die *Hypothese*, die *Deduktion* und die *Verifikation*. Diese letzte kann gleichfalls ein Experiment oder eine Beobachtung sein, je nachdem es sich darum handelt, vorausgesehene Empfindungen einfach *abzuwarten* oder sie *hervorzurufen*, indem man an den Erscheinungen, die den Gegenstand der Untersuchung bilden, willkürliche Änderungen vornimmt.

## § 22. Die Erwerbung der Erkenntnis.

Die Untersuchung Jevons ist unwiderleglich vom Standpunkt der Logik und besonders hinsichtlich der Stellung, die der Hypothese in der Wissenschaft angewiesen wird; von ihr hat E. Naville in einer interessanten Monographie über „la logique de l'hypothèse" gezeigt, daß die klarsten unter den wissenschaftlichen und philosophischen Geistern ihre Bedeutung erkannt haben.

Allerdings wird in der Praxis des Denkens die Hypothese oft stillschweigend hinzugedacht, so daß der tatsächliche Prozeß der Erwerbung der Erkenntnisse dem Anscheine nach von dem oben angegebenen logischen Schema abweicht. Jedenfalls gibt dieses Schema keine Rechenschaft von der Entstehung der Hypothese, denn dieser psychologische Vorgang beruht auf der Divinationsgabe des Genies.

Wir wollen an ein von Jevons erwähntes Beispiel erinnern: Torricelli entdeckt den Luftdruck, indem er

von der Beobachtung ausgeht, daß das Wasser in den Pumpen bis zu einer Höhe von zehn Metern steigt, und indem er durch Überlegung auf das Experiment mit dem Barometer geführt wird.

Hier ist deutlich die Hypothese vor dem Versuch erdacht. Aber in anderen Fällen, und dies sind vielleicht die häufigeren, bleibt sie verborgen und ist schwer aufzudecken.

Man erinnert sich z. B. des Raisonnements, das GALILEI erlaubte, das Versuchsergebnis vorauszusehen, nach dem die schweren Körper mit gleicher Geschwindigkeit zu Boden fallen, ein Ergebnis, das die irrtümliche Annahme einer der Masse proportionalen Geschwindigkeit zerstörte. GALILEI dachte sich zwei gleiche Massen, die nebeneinander fallen: sie werden gleiche Geschwindigkeiten annehmen. Vereinigen wir nun, sagt er, die beiden Massen; keine von beiden wird die Geschwindigkeit der anderen erhöhen können, so daß die Gesamtmasse, die Summe der beiden, sich noch immer mit derselben Geschwindigkeit bewegen wird.

Der Versuch, der dieses Ergebnis verifizierte, war in GALILEIS Augen eine einfache Bestätigung, deren er für seinen Teil vielleicht nicht einmal zu bedürfen glaubte, da die einfache eben wiedergegebene Überlegung ihm a priori darüber Gewißheit verschaffte.

Aber diese Überlegung setzt voraus, daß der Fall der schweren Körper von einer Kraft bewirkt wird, die auf jeden Körper so wirkt, als ob er von allen anderen isoliert wäre, und diese Hypothese ist wesentlich äquivalent einer Verallgemeinerung der Tatsache selbst, die bewiesen werden sollte. Allerdings erscheint sie am meisten dem Ursachenbegriff zu entsprechen, der aus der anorganischen Natur entnommen ist, wo die Ursachen sich im allgemeinen summieren, ohne aufeinander einzuwirken.



Man übertrage jedoch denselben Gedankengang auf das Gebiet des Lebens! Man wende ihn z. B., wie man es für zulässig gehalten hat, auf psychologische Erscheinungen an. Man wird dadurch dazu geführt, den Willen und die Handlungen einer Menge einfach als die Resultante der Motive aufzufassen, welche auf die sie zusammensetzenden Individuen einwirken, und man stellt infolgedessen Voraussagen auf, die durch die Erfahrung Lügen gestraft werden. Der erwähnte Ursachenbegriff ist nämlich auf dieses Tatsachengebiet nicht anwendbar, wie die neueren Forschungen über Kollektivpsychologie deutlich gezeigt haben.

Die Theorie, nach der die Erkenntnis das Bestreben hat, sich in Begriffen zu vollziehen, ist geeignet, die erwähnten erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten zu beseitigen.

In Wirklichkeit nämlich ist die Etappe des induktiven Raisonnements, die der Deduktion voraufgeht, nicht die Hypothese, die in mystischer Vorahnung der Tatsachen ausgesprochen wird, sondern der Begriff, durch den die Tatsachen selbst vorgestellt werden sollen und der aus den vorläufigen Beobachtungen durch eine (oft unbewußte) Assoziations- und Abstraktionsarbeit gewonnen wird. Jeder so gebildete Begriff enthält Hypothesen, aber diese müssen erst von einer Kritik herausgestellt werden, die die Ergebnisse der darauf bezüglichen Anschauung ausspricht.

Im ersten Beispiel hat TORRICELLI das Steigen des Wassers in den Pumpen dem Begriff des Gleichgewichts zweier Flüssigkeiten in kommunizierenden Gefäßen untergeordnet, einem Begriffe, der eine Messung des Druckes voraussetzt, der von einer der Flüssigkeiten proportional der Höhe und der Dichtigkeit der anderen auf die Flächeneinheit ausgeübt wird.

Im zweiten Beispiele hat GALILEI, wie wir schon hervorgehoben haben, seine Hypothese dem allgemeinen

Begriffe einer Kraft untergeordnet, die den Fall der Körper hervorruft, und deren Wirkung auf diese von ihren Verbindungen unabhängig ist.

Wir stellen also dem von JEVONS entworfenen logischen Schema des Induktionsverfahrens ein psychologisches gegenüber, das folgende Stadien umfaßt: die *vorläufige Beobachtung*, den *Begriff, der sie hypothetisch wiedergibt*, die *Deduktion* und die *Verifikation*.

Wir lernen so den Vorgang der Erkenntnis in seiner Realität zu begreifen und uns die geheimnisvollen Kräfte des Genies zu erklären, dem man die göttliche Gabe der Prophetie zuschreibt. Und es wird in der Tat verständlich, daß die Untersuchung des Ursprungs der Begriffe zeigen kann, daß eine feinere Empfindung und eine weiter ausgebreitete Assoziation gestatten, aus einer kleinen Zahl von Beobachtungen Begriffe zu abstrahieren, die geeignet sind, die Tatsachen adäquat darzustellen. Anderseits erinnert uns die Bemerkung, daß ein erster Teil des Raisonnements oft in einer unbewußten Arbeit besteht, an die vielen Fehlerquellen, die solchen Voraussagen anhaften.

Es sei hier bemerkt, daß die neuen degenerativen Theorien des Genies (über die wir uns kein Urteil erlauben wollen) dem erwähnten Begriff von einer genialen Fähigkeit nicht zu widerstreiten scheinen, zeigt sich doch die Hyperästhesie gewisser Assoziationsbahnen des Gehirns häufig verbunden mit einer geringeren Ausbildung anderer Gehirnfunktionen.

## § 23. Wissenschaftliche Theorien.

Der oben beschriebene Vorgang, der, objektiv betrachtet, die Erkenntnis der *wissenschaftlichen Tatsache* bildet, stellt sich von der subjektiven Seite als eine *Theorie* dar. Als wissenschaftliche Theorie bezeichnet man also jeden Begriff oder jedes System von solchen, das durch



Induktion aus vorhergegangenen Beobachtungen gewonnen ist, und dem vermittels einer deduktiven Entwickelung mehr oder weniger vollkommen verifizierte angenommene Tatsachen untergeordnet werden.

Es kommt zuweilen vor, daß die induktive und die deduktive Phase sich in der wirklichen Entwickelung durchkreuzen, so daß die Theorie nur dadurch auf den oben beschriebenen Vorgang zurückgeführt werden kann, daß man sie in eine Reihe von Theorien zerlegt, die in der Weise untereinander verkettet sind, daß die Folgen der einen als Voraussetzungen der folgenden an Stelle von Beobachtungen angenommen werden.

## § 24. Die Theorie der Gravitation.

Wir wollen an ein klassisches Beispiel anknüpfen, indem wir uns bemühen, die Erfindung der NEWTONschen Gravitationstheorie psychologisch zu rekonstruieren.

Die vorangehenden astronomischen Beobachtungen, ergänzt durch Interpolation, finden ihren Ausdruck in den KEPLERschen Gesetzen:

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Die von den radii vectores beschriebenen Flächen sind den Zeiten, in denen sie beschrieben werden, proportional.
3. Die Quadrate der Umlaufszeiten sind den Kuben der großen Achsen proportional.

Dieselben Gesetze gelten für die relative Bewegung der Satelliten des Jupiter und der anderen Planeten, abgesehen davon, daß das dritte nur im Falle mehrerer Satelliten Anwendung findet; die beiden ersten Gesetze gelten im besonderen auch für die Bewegung des Mondes um die Erde.

Der erste Schritt der Analyse NEWTONS besteht einfach in der Ersetzung des KEPLERschen Begriffs

eines Systems von elliptischen Bahnen mit gemeinsamem Brennpunkt durch den Begriff eines Attraktionszentrums, um das herum sich die Planeten (oder die Satelliten eines Planeten), die als Punkte betrachtet werden, bewegen. Und die Idee ist offenbar durch eine grandiose Assoziation hervorgerufen, durch die der Gedanke auf die von HUYGHENS untersuchten Fälle gelenkt wurde, wo aus der Bewegung eines Punktes in einer geschlossenen Bahn auf eine nach innen gerichtete Kraft geschlossen wurde, die der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht hält. Im Falle eines mit einem Faden an einem Mittelpunkt befestigten Massenpunktes, der einen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt, ist ja die (durch die Spannung des Fadens gemessene) Anziehungskraft gegen den Mittelpunkt gerichtet, und ihre Größe ist dem Quadrate des Radius umgekehrt proportional.

Nun ist dies aber ein besonderes Beispiel, in dem die beiden ersten KEPLERschen Gesetze erfüllt sind. Eine wohlbekannte Deduktion führt dazu, den Schluß (mit HUYGHENS) auf den allgemeinen Fall auszudehnen: ein Punkt, der sich in einer geschlossenen Bahn so um ein Zentrum bewegt, daß das zweite KEPLERsche Gesetz erfüllt ist, besitzt eine nach diesem Zentrum gerichtete Beschleunigung; und wenn die Bahn eine Ellipse und das Rotationszentrum einer ihrer Brennpunkte ist, so wird die Beschleunigung dem radius vector umgekehrt proportional.

Die Bewegung läßt sich also erklären durch die Annahme einer Kraft, die der Entfernung umgekehrt proportional ist, ihren Sitz im Zentrum hat und sich mit einem dem Körper in einem gewissen Augenblick erteilten Impuls vereinigt, der einer gewissen Ungleichung genügt.

Man hat zunächst den Vorteil, die KEPLERsche Hypothese in zwei andere zerlegt zu haben: in eine Anziehungskraft und einen einer Ungleichung unterworfenen Anfangsimpuls. Lassen wir diese letzte Bedingung fallen; wir erhalten dann mögliche Bewegungen in hyperbolischen und parabolischen Bahnen, die unter den NEWTONschen Begriff fallen und eine unmittelbare Verallgemeinerung der Bewegung der Planeten um die Sonne darstellen. Die Bewegungen in fast parabolischen (und vielleicht auch hyperbolischen) Bahnen finden sich bei den Kometen annäherungsweise verwirklicht. Und zu den Kometen sind neuerdings die Sternschnuppen hinzugetreten (SCHIAPARELLI).



Sehen wir jetzt von dieser Verallgemeinerung ab und nehmen wir an, die beiden KEPLERschen Gesetze seien in etwas größerer Allgemeinheit ausgesprochen als gewöhnlich; wir nehmen ferner das dritte hinzu, nach dem die von der Sonne auf die Planeten und vom Jupiter auf seine Satelliten ausgeübte Anziehungskraft der angezogenen Masse proportional ist. Kann man dann sagen, daß die Begriffe, durch die bei KEPLER und bei NEWTON die Tatsachen den Theorien untergeordnet werden, gleichwertig sind?

Gewiß, wenn die Entwickelung der NEWTONschen Theorie bei der logischen Umformung der KEPLERschen Hypothesen stehen bleibt, muß die Äquivalenz eine vollständige sein. Es kann dabei nichts herauskommen, was nicht in den Prämissen steckt, und vor allem nichts, was ihnen widerspricht.

Aber der Wert dieser Umformung beruht auf den folgenden Umständen:

1. fallen unter den NEWTONschen Begriff noch andere Tatsachen als die ursprünglich betrachteten astronomischen.
2. zweitens ruft er vermöge einiger Analogien und einer gewissen Einfachheit und Symmetrie *neue Hypothesen* hervor, die diejenigen korrigieren, von denen man ausgegangen war.

Die Sage berichtet, daß das Fallen eines Apfels NEWTON auf den Gedanken brachte, die Bewegung der auf der Erdoberfläche fallenden Körper mit der des Mondes zu vergleichen. Wenn die Anziehungskraft der Erde nicht nur auf den Mond, sondern auf alle Körper im umgekehrten Verhältnis des Quadrates ihrer Entfernung wirkt, so daß die gewöhnliche Schwere als Spezialfall darunter fällt, so muß es möglich sein, den Wert der GALILEIschen Konstanten $g$ (der Beschleunigung durch die Schwerkraft) aus der Beschleunigung zu berechnen, die der Mond erfahren würde, wenn man ihn sich auf die Erdoberfläche gebracht denkt. Man erhält eine erste Annäherung, wenn man die Beschleunigung des Mondes mit $60^2$ multipliziert, unter der Annahme, daß die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde das 60fache des Erdhalbmessers beträgt; dadurch bekommt man schon ziemlich genau den Wert von $g$!

Hier entstehen nun vermöge suggestiver Assoziationen aus der so erhaltenen Darstellung der Tatsachen die neuen Hypothesen, die das KEPLERsche System korrigieren.

Die Sonne zieht die Planeten an, die Planeten die Satelliten; speziell zieht die Erde den Mond an, aber ihre Anziehung wirkt nicht nur auf diesen, sondern auf alle Körper, die sie umgeben, und erscheint an ihrer Oberfläche als Schwerkraft. Der Schritt, der noch zu tun ist, ist eine einfache Erweiterung der Hypothese; vor allem: Jeder Himmelskörper zieht jeden anderen an, und zwar stets mit einer Kraft, die dem Produkte der Massen proportional und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Abgesehen davon, daß diese Erweiterung Einschränkungen beseitigt, für die a priori kein Grund einzusehen ist, ergibt sie sich zum Teil schon aus der Verfolgung der Analogie mit dem an ein Zentrum gebundenen



Massenpunkt, wo der zentripetalen Wirkung eine gleiche und entgegengesetzte zentrifugale Gegenwirkung entspricht. Zunächst sah sich NEWTON veranlaßt, das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung allgemein auszusprechen, und leitete sofort daraus ab, daß auch die Planeten die Sonne anziehen; daraus folgt noch keine eigentliche Korrektion der KEPLERschen Gesetze, solange sie als Ausdruck der relativen Bewegung betrachtet werden. Warum sollen nun aber die Planeten sich nicht ebenso untereinander gegenseitig anziehen? Wenn die Wirkung dieser Anziehung sehr beträchtlich wäre, so wären die KEPLERschen Gesetze merklich falsch; da es sich aber um ziemlich kleine *Störungen* handelt, die nur kurze Zeit dauern, so kann man davon ausgehen, daß die Hypothesen KEPLERS nur eine erste Annäherung darstellen, und daß man eine schärfere Annäherung erhält, wenn man die erweiterte Attraktionshypothese hinzunimmt.

Es ist allgemein bekannt, daß dies tatsächlich zutrifft, hatten wir doch schon Gelegenheit, unter den Bestätigungen der NEWTONschen Theorie die glänzende Entdeckung des *Neptun* zu erwähnen.

Der letzte Schritt besteht in der Ausdehnung der Attraktionshypothese auf beliebige materielle Körper; die Anziehung der Himmelskörper wird dann nicht als eine Kraft betrachtet, die ihren Sitz in den Schwerpunkten hat, sondern als Resultante von Kräften, die von den einzelnen Teilen ausgehen.

Hier wird eine ganz neue Tatsache angenommen, die unmittelbar durch die Versuche von CAWENDISH bestätigt wird, die von vielen Experimentatoren weiter verfolgt und verbessert worden sind: dazu kommen die mittelbaren Bestätigungen durch AIRY, der die Variation der Schwerkraft im Erdinnern maß, durch CARLINI, der den Einfluß gemessen hat, welchen nahe gelegene Berge auf die Schwerkraft üben, usw. Anderseits

führt die so erweiterte Hypothese auf astronomischem Gebiete zu einer Verbesserung der Theorie, insofern die *Form* der Himmelskörper berücksichtigt wird; speziell entspricht der Abplattung der Erde an den Polen tatsächlich eine charakteristische Störung der Mondbewegung, die von LAPLACE bestimmt wurde.

Die nach der allgemeinen Gravitation benannte Theorie, die das Problem der Bewegung im Planetensystem mit einem Grade von Genauigkeit löst, der von keiner anderen physikalischen Theorie übertroffen wird[1]), erweitert sich in wunderbarem Fortschritt nach mehreren Richtungen. Die relativen Bewegungen der *Doppelsterne*, die seither von HERSCHELL in den entferntesten Himmelsgegenden beobachtet wurden, passen sich der NEWTONschen Erklärung an.[2]) Ja sogar die *Form* der Himmelskörper und der Erde im besonderen konnten befriedigend erklärt werden durch die gegenseitige Anziehung der verschiedenen Teile unter der Annahme eines flüssigen Urzustandes der Körper (MACLAURINS Ellipsoide); die Hypothese CLAIRAUTS, daß die Dichtigkeit der Erde nach konzentrischen Ellipsoiden variiert, gestattet eine Berechnung a priori der Verkürzung der Polarachse der Erde; man findet den Wert:

$$E = \frac{1}{292{,}4},$$

was gut übereinstimmt mit dem Ergebnis der geodätischen Messungen, die (nach CLARKE) ergeben:

$$E = \frac{1}{293{,}5}.$$

Es kam auf der Erde die Bestimmung der Gezeiten hinzu, die schon NEWTON mit der Anziehung des Mondes

1) Vgl. besonders das letzte Kapitel des „Traité de Mécanique céleste" von TISSERAND (Gauthier et Villars, Paris 1889—1896).

2) Vgl. besonders die Note von Darboux und Halphen in den „Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris" Bd. 84.



in Verbindung gebracht hatte, und für die LAPLACE bestimmte für die Seefahrer nützliche Voraussagen aufgestellt hat.

Wo wird diese Entwickelung enden?

Die Erscheinungen der *Adhäsion* und der *Kapillarität* zeigen, daß bei sehr kleinen Entfernungen die Kräfte größer sind als die NEWTONsche. Das führte daher zu einer neuen Erweiterung der Hypothese: Zentralkräfte, deren Abhängigkeit von der Entfernung sich durch eine Reihenentwickelung nach negativen Potenzen darstellen läßt; alle Glieder der Entwickelung jenseits der Potenz $-2$ könnten dann vernachlässigt werden, wenn es sich um merkliche Entfernungen handelt.

Wir wollen die Diskussion der hier entstehenden Fragen nicht weiter fortsetzen, sondern für einige derselben auf Kapitel VI verweisen.

Nur folgendes wollen wir bemerken: Da die NEWTONsche und jene allgemeinere, die wir erwähnten, sich für astronomische Approximationen als *gleichwertig* herausstellen, so steht uns hier die Wahl frei, und wir entscheiden uns für die erste Formel auf astronomischem Gebiete, weil sie ein *leichter zu handhabendes Werkzeug der Voraussage* ist.

## § 25. Kritik der Theorien.

Das Beispiel der NEWTONschen Theorie, die wir in ihren aufeinanderfolgenden Entwickelungsstadien betrachteten, beleuchtet vor allem folgende Umstände:

1. Die Bildung der Begriffe und die daraus folgende Entwickelung der Hypothesen aus der Verbindung verschiedener Beobachtungen.
2. Die Abstraktion von einem Teil des Gehalts und die daraus sich ergebende wachsende Unbestimmtheit der Theorien. In der Tat werden beim Übergang von den KEPLERschen zum NEWTONschen Gesetz

zunächst gewisse zufällige Konstanten eliminiert (Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit), die für die verschiedenen Fälle durch die verifikatorischen Beobachtungen bestimmt werden.

3. Die Unterordnung neuer Beziehungen unter eine allgemeine Theorie durch *Hilfshypothesen*.
4. Die *Gleichwertigkeit* verschiedener Systeme von Begriffen in bezug auf eine gewisse Gruppe von darzustellenden Tatsachen und die Entwickelung *verschiedener Hypothesen für ein erweitertes Gebiet von Beziehungen* aus diesen Begriffen.
5. Die *Gleichwertigkeit verschiedener Hypothesen* in bezug auf eine Reihe von Beobachtungen und Experimenten unter Voraussetzung *eines bestimmten Genauigkeitsgrades*.

Aus den Umständen 4. und 5. ergeben sich verschiedene Arten, *innerhalb eines bestimmten Bereichs von Voraussagen die Theorien zu vereinfachen;* und im zweiten Falle kann die Vereinfachung quantitativ abgeschätzt werden.

Nun kann sich der Prozeß der Begriffsbildung ungeheuer erweitern, wenn man zu den wirklichen Gegenständen *Phantasiegebilde* hinzunimmt (vgl. § 18), um so gewisse Assoziationen noch weiter zu verfolgen und ihnen durch die Einbildungskraft zu Hilfe zu kommen.

Derartigen Fiktionen läßt sich a priori keine Grenze setzen; aber man muß verlangen, daß neben der Entwickelung der Theorien in dieser Richtung eine angemessene Kritik einhergeht.

Die so erweiterte theoretische Erkenntnis bezieht sich nicht mehr auf eine Gesamtheit von realen Beziehungen, die durch die Erfahrung bestätigt werden können; neben der *physikalischen* Welt dieser letzteren schafft sie eine eingebildete *metaphysische* jenseits aller möglichen Experimente und denkt beide als nicht



unterschiedene Teile (wenn auch die eine als *sichtbar* die andere als *unsichtbar*) einer und derselben Wirklichkeit. Es ist nun Aufgabe der Kritik, die Hypothesen und die Folgerungen, die sich auf diese beiden Teile beziehen, zu trennen; schließlich hat doch nur das, was sich auf den ersten Teil bezieht, eine *reale Bedeutung*, d. h. bildet eine wirkliche Erkenntnis, während das, was an der Theorie imaginär ist, lediglich als *Mittel der Erkenntnis* betrachtet werden darf. Dieses Mittel ist nur deshalb wirksam, weil das System der Bilder mit dem der Tatsachen verkettet ist, aber dieser Wirksamkeit entspricht die Schwierigkeit, den Wert der erhaltenen Ergebnisse zu beurteilen. Daher muß die Kritik einer Theorie zu einer Umformung der in ihr angenommenen *Hypothesen* führen in der Weise, daß die in ihr enthaltenen *physikalischen Hypothesen* getrennt werden von den *indifferenten* (metaphysischen), die sich nur auf die Phantasiegebilde beziehen und *Bilder* ergeben, die zwar *verschieden*, aber in bezug auf eine *bestimmte Gruppe von Tatsachen gleichwertig* sind.

Es muß hier hervorgehoben werden, daß die Äquivalenz zweier Systeme von Bildern in bezug auf die Wirklichkeit von den Verknüpfungen abhängt, die man zwischen den Phantasiegebilden und den physikalischen Objekten annimmt, und daß daher *indifferente Hypothesen eine physikalische Bedeutung gewinnen können, wenn die Theorie ausgedehnt* und demselben System von Bildern eine umfassendere Gruppe von Tatsachen untergeordnet wird.

Wir wollen das Gesagte an einigen Beispielen erläutern.

## § 26. Poissons elektrostatische Theorie.

Bekanntlich ist es Poisson gelungen, die elektrostatischen Erscheinungen einer Theorie unterzuordnen, die mit der Newtonschen eng verwandt ist.

Das Wort „*Elektrizität*" erweckt die Vorstellung einer bestimmten Nervenerschütterung, die die Erscheinungen der elektrischen Entladung begleitet (Funken usw.).

Wenn man die Umstände beobachtet, die dieser Tatsache vorausgehen oder sie bestimmen, so konstatiert man das Vorhandensein von Anziehungs- und Abstoßungskräften zwischen den Körpern, die in einen gewissen Zustand versetzt (elektrisiert) worden sind; dabei handelt es sich in jedem Falle um Kräfte von höherer Größenordnung als bei der Gravitation.

Die Erscheinungen der elektrischen Entladung und Anziehung passen zu dem Bilde zweier *einander anziehenden Flüssigkeiten*, deren Träger die elektrisierten Körper sind, die aber oberhalb einer gewissen Grenze den Widerstand überwinden, den diese Körper ihrem Ausströmen entgegensetzen. Um die beiden Wirkungsarten, die anziehende und die abstoßende, zu erklären, hat Poisson *zwei Flüssigkeiten* erdacht: *die positive* und *die negative Elektrizität*.

Wir können die *Hypothesen* folgendermaßen aussprechen:

1. Es existieren in den Körpern zwei elektrische Fluida, ein *positives* und ein *negatives*, die unter bestimmten Bedingungen *(statische Erscheinungen)* in den Körpern festgehalten werden, die sich in einem nicht leitenden Medium befinden, z. B. im Vakuum.
2. Es gibt *gute* und *schlechte Leiter (Nichtleiter);* bei den ersten erreicht die Verteilung der elektrischen Fluida fast augenblicklich einen Gleichgewichtszustand, der nicht von der Art der Ladung, sondern nur von der Form des Körpers und der Menge des in ihm enthaltenen Fluidums abhängt; in den zweiten zirkulieren die Fluida sehr langsam und können deshalb als von den Teilchen der Materie aufgehalten angesehen werden.



3. Jeder *nicht elektrisierte* Leiter enthält *gleiche* Mengen oder *Massen* der beiden Fluida (die einander *neutralisieren*). In einem elektrisierten Leiter befindet sich ein Überschuß des einen über das andere.
4. Gleichnamige Fluida ziehen sich an, ungleichnamige stoßen sich ab[1]), und die Wirkung (zwischen zwei Elementen) ist dem Produkt der Massen proportional.
5. Die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Fluida zwischen zwei Volumelementen verhält sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung.

Diese Hypothesen stellen sich dar als Beziehungen, die z. T. zwischen den fiktiven Flüssigkeiten selbst, z. T. zwischen diesen und den Körpern stattfinden; man kann aus ihnen jedoch leicht *physikalische Hypothesen* herausschälen, die einige elementare Tatsachen ausdrücken.

Nr. 1 drückt nämlich die Beharrlichkeit des elektrischen Zustandes aus; Nr. 2 gewisse fundamentale Umstände der Elektrisierung durch Berührung oder durch Induktion; 5. drückt das *Gesetz von* Coulomb aus, und 3. und 4. die anderen experimentellen Bedingungen der elektrischen Wirkung:

a) Die von der Vereinigung zweier elektrisierter Elementarkörper ausgehende Kraft ist gleich der algebraischen Summe ihrer Einzelkräfte.
b) Wenn zwei elektrisierte Elementarkörper zur Berührung gebracht und darauf von neuem getrennt werden, so nimmt die Anziehungskraft des einen um denselben algebraischen Betrag zu, um den die des anderen abnimmt.

Es bleibt in den erwähnten Hypothesen 3. und 4. die *indifferente Annahme*, daß *bei gleicher Masse* die Wir-

1) Muß umgekehrt lauten (Anm. d. Übers.).

kung des positiven Fluidums gleich der des negativen ist. In der Tat kann, in Ermangelung einer Methode, die Massen unmittelbar zu vergleichen, das Verhältnis der sich neutralisierenden Massen als willkürliche Konstante betrachtet werden, der man auch einen von der Einheit verschiedenen Wert beilegen kann.

Was bleibt nach dieser Übersetzung noch übrig von der Grundhypothese? Welche physikalischen Folgen zieht die fiktive Existenz der elektrischen Fluida sonst noch nach sich?

Der Wert der vorerwähnten Hypothese bleibt unbestimmt, solange man den fiktiven Flüssigkeiten nicht irgendwelche Eigenschaften der wirklichen zuschreibt; es ist klar, daß der näheren Bestimmung des Systems von Bildern nach dieser Richtung a priori keine Grenzen gezogen sind. Man wende auf die elektrischen Fluida die Gesetze der Mechanik an und setze z. B. mit GAUSS voraus, daß

6. die Gleichgewichtsbedingung erhalten wird, wenn man das Potential der elektrischen Massen auf sich selbst zu einem Minimum oder Maximum macht.

Man kann die Verteilung des Fluidums in einem elektrischen Leiter durch Rechnung bestimmen. Daraus folgt dann:

Die Elektrizität verteilt sich in einem Leiter nur auf der Oberfläche und nicht im Inneren, und die Oberflächenverteilung hängt in einer analytisch wohldefinierten Weise von der Elektrizitätsmenge (Masse) und der Form der Oberfläche ab. Dieses *Verteilungsgesetz* bildet die physikalische Grundtatsache, zu der die Theorie führt; es gibt dafür verschiedene Bestätigungen in den *Versuchen* FARADAYS, die die Nichtexistenz von Elektrizität im Innern der Leiter beweisen, in dem *Dispersionsvermögen der Spitzen* usw.



Man kann sogar in einem gewissen Sinne sagen, daß dieses Verteilungsgesetz mit der POISSONschen Theorie *äquivalent* ist; d. h. daß darin ihr ganzer *positiver Gehalt* zusammengefaßt wird; und mehr noch der erste Teil des Gesetzes ist für sich allein der Gesamtheit der übrigen Hypothesen äquivalent, sozusagen der mechanischen Vorstellung der elektrischen Fluida. Aus der Nichtexistenz von Elektrizität im Innern eines Leiters (Versuche FARADAYS) kann man nämlich ihrerseits die Gesetze der elektrischen Anziehung herleiten, und besonders das COULOMBsche, das dadurch einen höheren Grad von Genauigkeit erhält als durch das direkte Experiment (BERTRAND).

Es ist nun zu beachten, daß die Vorstellung, die der elektrostatischen Theorie POISSONS zugrunde liegt, in einer in weiten Grenzen willkürlichen Weise abgeändert werden kann, indem man eine Reihe einander *äquivalenter Theorien* aufstellt.

Wir erwähnen nur die *Hypothese einer einzigen Flüssigkeit* und die von MAXWELL, die an die Stelle von sich anziehenden und abstoßenden Massen ein elastisches Zwischenmedium setzt, das auf die elektrisierten Körper *Druck-* und *Zugkräfte* ausübt (vgl. Kap. VI).

Es ist schwer, diese Theorien zu vergleichen unter dem Gesichtspunkt der Leichtigkeit der Voraussage oder der Ökonomie in der Beschreibung der Tatsachen, die gleichermaßen in ihnen enthalten sind. Daher wird die Wahl durch andere Kriterien bestimmt, nämlich durch die Anpassungsfähigkeit an ein weiteres Gebiet von Beziehungen. In der Tat sind im Hinblick auf eine *Ausdehnung des Anwendungsgebietes der Theorie* die repräsentativen Hypothesen nicht mehr als indifferent zu betrachten; so ist z. B. die Theorie einer einzigen Flüssigkeit geeignet, gewisse Unterschiede zwischen den

beiden elektrischen Zuständen, dem positiven und dem negativen, zu erklären, die fürder nicht mehr symmetrisch behandelt werden können.

Aber vor allem in zwei Fällen bieten sich Probleme dar, die von den erwähnten repräsentativen Hypothesen abhängen:

a) Wenn man die Theorie auf die Erklärung der elektrischen Erscheinungen in bewegten Körpern ausdehnen will (Ausbreitungszeit der elektrischen Wirkung usw.).

b) Wenn man, ohne das Gebiet der Elektrostatik zu verlassen, die *Abhängigkeit der elektrischen Wirkung von dem umgebenden Medium* erklären will.

Wenn man sich z. B. die Anziehung zwischen zwei elektrisierten Punkten längs ihrer Verbindungsgeraden übertragen denkt (Vorstellung des elastischen Fadens), so muß man annehmen, daß diese Anziehung durch Änderungen nicht beeinflußt wird, die in einem Teile des Mediums vorgehen, der von dieser Geraden nicht getroffen wird; diese Annahme ist nun *falsch* und zeigt somit, daß die erwähnte theoretische Vorstellung nicht mit den Tatsachen übereinstimmt.

Solche Betrachtungen sind der Grund für eine Bevorzugung der Maxwellschen Theorie (vgl. Kap. VI); aber es genügt uns, hier gezeigt zu haben, wie die Bestimmung der Phantasiegebilde, die zur Darstellung der Tatsachen herangezogen werden, sich verändert und fortschreitend vervollkommnet, um mit der Erweiterung der Erkenntnis Schritt zu halten.

## § 27. Die Theorie der Lösungen.

Ein anderes interessantes Beispiel bietet die von Van' t' Hoff aufgestellte *Theorie der Lösungen*.

Die Grundlage der Theorie bildet die intime Verwandtschaft, die durch den Begriff der *diffundiblen Substanz* zwischen den Lösungen und den Gasen hergestellt wird.



Die Diffusion der Gase hat ein adäquates Bild in dem *kinetischen System* gefunden, wo das Gas selbst als eine Gesamtheit von Teilchen vorgestellt wird, die frei beweglich sind, und deren Stöße den Druck bewirken. Dieselbe Darstellung ist auf die Lösungen anwendbar, stellt sich doch die Auflösung eines Stoffes in einer Flüssigkeit als eine allmähliche Disgregation dar; es liegt nahe, diese Art der Auflösung mit der Diffusion gewisser Dämpfe in der Atmosphäre zu vergleichen.

Die kinetische Gastheorie (vgl. Kap. V) führt vor allem in erster Annäherung zu den folgenden *Gesetzen der vollkommenen Gase:*

1. Die Proportionalität zwischen der *Masse* und dem Produkt aus *Volumen* und *Druck* (Boylesches *Gesetz*).
2. Die Proportionalität zwischen Volumen und *Temperatur (Gesetz* von Gay Lussac).

Die Masse, das Volumen und die Temperatur eines Gases entsprechen unmittelbar der Menge der gelösten Substanz, dem Volumen des Lösungsmittels und seiner Temperatur *(Dichte = Konzentration)*.

Wie zeigt sich der *Druck einer Lösung?*

Wenn wir ein Gas in einem Gefäß haben, das in ein Vakuum gebracht ist, so zeigt sich der Druck auf die Oberfläche leicht, da er in einer Kraft besteht, die senkrecht zur Oberfläche selbst von innen nach außen gerichtet ist. Wenn aber in dem Gefäß zwei Gase gemischt sind, so stellt sich diese Kraft als Summe der Drucke jedes einzelnen dar, die wir in diesem Falle nicht trennen könnten. Nehmen wir jedoch an, daß die Wand des Gefäßes das eine der beiden Gase durchläßt, aber nicht das andere; das erste wird sich mit der äußeren Umgebung ins Gleichgewicht setzen, und die Kraft, die von

innen nach außen auf die Wand ausgeübt wird, gibt uns den Druck des zweiten.

Dies Bedingung kann in analoger Weise auf eine Lösung übertragen werden. Wir wollen zu diesem Zweck ein Gedankenexperiment anstellen.

Wir haben zwei kommunizierende Gefäße, in denen sich eine Flüssigkeit, z. B. Wasser, befindet; dieses wird sich in beiden gleich hoch einstellen, gemäß dem Gesetze des hydrostatischen Gleichgewichts. Dieses Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn die beiden Gefäße durch eine für Wasser durchlässige Scheidewand getrennt wer en.

Nun gibt es unter den für Wasser durchlässigen Membranen solche, die eine gelöste Substanz nicht durchlassen. Wenn wir also zwei kommunizierende Gefäße haben, die mit Wasser gefüllt sind und in deren einem sich eine Lösung befindet, wenn ferner die beiden Gefäße durch eine solche semipermeable Membran getrennt sind, so wird die Lösung auf die Membran einen Druck ausüben, der von den Stößen der beweglichen Teilchen herrührt, aus denen sie besteht. Wie können wir ihn messen?

Denken wir uns, daß die Membran in einem der beiden (zylindrisch geformten) Gefäße nach Art eines Kolbens beweglich ist. Sie wird ihre Lage dann so verändern, daß das Volumen der Lösung vergrößert wird. Um diese Verschiebung zu verhindern, muß man auf die Membran in entgegengesetzter Richtung eine Kraft ausüben, die genau den zu bestimmenden Druck mißt.

Seien *A* und *B* die beiden Gefäße; *A* enthalte die Lösung; sei *s* die Membran, mit der eine Stange verbunden ist, die einen festen Zylinder *b* trägt, dessen Durchmesser (wie die Figur zeigt) fast gleich dem von *B* ist, und dessen Dichte gleich der des Wassers ist,



in das er eintaucht. Der Zylinder *b* wird mit einem Teile über das gemeinsame Wasserniveau in den Gefäßen *A* und *B* hinaussteigen, und das Gewicht des herausragenden Teils ergibt den Druck, den die Lösung auf *s* ausübt, sobald man eine Gleichgewichtsbedingung hat.

Aber das Gleichgewicht unseres Systems, auf das *äußere* und *innere* Kräfte wirken, erfordert, daß diese und jene für sich im Gleichgewicht stehen.

Das Hinausragen des Zylinders *b* bewirkt das Gleichgewicht der inneren Kräfte. Damit dasselbe auch zwischen

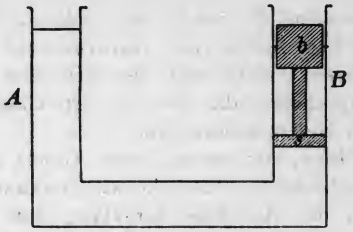



Fig. 2.

den äußeren Kräften besteht, muß die durch das *Archimedische Prinzip* ausgedrückte Bedingung erfüllt sein: das Wasser muß in dem Gefäße *A* bis zu derselben Höhe gestiegen sein, in der sich die obere (herausragende) Grundfläche des Zylinders *b* befindet. Nachdem dies festgestellt ist, ist es klar, daß das Gleichgewicht des ganzen Systems nicht gestört wird, wenn man die Membran an dem Gefäße *B befestigt* und das aus dem Wasser ragende Gewicht des Körpers *b* entfernt, so daß dieser überflüssig wird.

Wir kommen also zu folgendem Schluß:

Wenn zwei kommunizierende Gefäße gegeben sind, die die gleiche Flüssigkeit enthalten, in deren einem sich

eine Lösung befindet, und die durch eine semipermeable Membran getrennt sind, so wird der Druck der Lösung, sofern man diese selbst als ein Gas betrachtet, gemessen durch den Niveauunterschied des Lösungsmittels in den beiden Gefäßen.

Die Existenz eines Druckes in diesem Sinne wird also zu einem hypothetischen Faktum, das von PFEFFER experimentell nachgewiesen wurde; der erwähnte Druck wird *osmotisch* genannt.

„Der osmotische Druck einer Lösung ist proportional der Konzentration und umgekehrt proportional dem Volumen."

Diese Tatsache, die sich bei den verdünnten Lösungen mit ziemlicher Annäherung experimentell bestätigt findet (PFEFFER), entspricht also denselben repräsentativen Hypothesen, die sich bei den Gasen in dem BOYLEschen Gesetz ausdrücken.

VAN' T' HOFF, der gerade dieses Gesetz in der von PFEFFER beobachteten Tatsache wiedererkannte, wurde dadurch zu der Annahme veranlaßt, daß auch das GAY LUSSACsche Gesetz für die Lösungen gilt, das hier folgende Form annimmt:

„Der osmotische Druck einer Lösung ist der Temperatur proportional."

Und das wurde durch die Erfahrung hinreichend bestätigt.

In den vorhergehenden Entwickelungen haben wir die mechanische Darstellung dazu benutzt festzustellen, was in der zwischen Gasen und Lösungen hergestellten Analogie dem Druck eines Gases entspricht. Von nun an kann die kinetische Hypothese bis zu einem gewissen Punkte als indifferent angesehen werden, indem man ihre Anwendung auf die Prinzipien der Energetik beschränkt. Gerade auf Grund des Prinzips der Äquivalenz zwischen Arbeit und Wärme ist es VAN' T' HOFF



gelungen, die Tatsachen der *Erniedrigung der Schmelz-* und der *Erhöhung der Siedetemperatur*, die bei verdünnten Lösungen der Konzentration proportional sind (Versuche von RAOULT), zu *erklären*. In der Tat genügt es z. B. in bezug auf den zweiten Fall zu bemerken, daß, um eine Flüssigkeit zum Sieden zu bringen, die eine Substanz gelöst enthält, außer der Verdampfungswärme auch noch eine Wärmemenge nötig ist, die der bei der *Kompression der Lösung geleisteten Arbeit* äquivalent ist.

Auch im weiteren Fortschritt der Theorie der Lösungen nimmt die kinetische Vorstellung nur eine nebensächliche Stellung ein. Das chemische Gesetz DALTONS (bezüglich der Volumina der Gasverbindungen) überträgt sich auf die Lösungen auf Grund der Atomtheorie (AVOGADROS *Hypothese*) und wird auf dieselbe Weise korrigiert durch die Annahme des Zerfalls der Moleküle in *Ionen*.

Aber wenn es sich darum handelt, gewisse Unterschiede zwischen Gasen und Lösungen zu erklären, ist ein Zurückgehen auf die kinetischen Hypothesen wieder von Nutzen; führte doch die Annahme eines Einflusses des Lösungsmittels auf die Bewegung der Teilchen der Lösung JAHN zu einer Korrektur der Gesetze der Lösungen in der Richtung einer größeren Genauigkeit.

## § 28. Die Ökonomie und psychologische Entwickelung der Theorien.

Die Beispiele, die wir aus einigen bestimmten physikalischen Theorien ausgewählt haben, illustrieren das, was wir vorher in allgemeiner Form ausgeführt haben, und veranlassen uns, unsere Kritik der Theorien mit einer neuen *Problemstellung* zu schließen.

Wir erwähnten schon, daß eine wissenschaftliche Theorie entweder als etwas Fertiges von einem *aktualen* Gesichtspunkt oder in ihrer Entwickelung, d. h. vom *genetischen* Gesichtspunkt betrachtet werden kann.

Vom aktualen Gesichtspunkt stellt sich die Theorie dar als eine Gesamtheit von Tatsachen und folglich von Voraussichten; aber diese Voraussichten können mehr oder weniger leicht sein je nach der Bildung der Begriffe.

Die Leichtigkeit der Voraussicht wird von MACH als der *Zweck* der Wahl angesehen, die in jedem Stadium der wissenschaftlichen Entwickelung zwischen gleichwertigen Theorien stattfindet; genauer drückt MACH diesen Zweck aus, wenn er sagt, daß die Erkenntnis die *ökonomischste* Form anzunehmen strebt. Das *Gesetz der Ökonomie* wird als ein *Prinzip der natürlichen Auswahl* betrachtet in dem Kampfe, der zwischen den verschiedenen Darstellungen derselben Tatsachen auf individuellem und sozialem Gebiete stattfindet.

Dieser großartigen Anschauung kann man nur die Bemerkung hinzufügen (die durch die vorstehenden Beispiele erläutert wird), daß dem Kriterium der Ökonomie in verschiedenen Fällen ein verschiedener Entscheidungswert zukommt; während es oft die Wahl innerhalb eines gewissen Systems von Begriffen oder Bildern offen läßt, führt es häufiger zur Entscheidung der Frage des Vorzugs zwischen verschiedenen Darstellungen. Wenn man aber der aktualen Ansicht der Wissenschaft die genetische gegenüberstellt, so kommt die Willkürlichkeit der repräsentativen Hypothesen in Verbindung mit der Möglichkeit der *Erweiterung des Anwendungsgebietes der Theorien;* und daraus ergibt sich oft ein Kriterium, das den Streit entscheidet.

Nun erscheint von diesem Gesichtspunkt aus die wissenschaftliche Theorie als eine *psychologische Entwickelung*, die sich auf einem *induktiven* Wege vollzieht; d. h. aus neuen Assoziationen neue Hypothesen zieht und aus der Bestätigung derselben sich zu weiteren und genaueren Assoziationen und Hypothesen erhebt.



Indem wir die biologische Vergleichung wieder aufnehmen, in der das *Leben der Theorien* mit dem der organischen Wesen verglichen wird, können wir sagen, daß das Gesetz der Ökonomie lediglich dieser Entwickelung eine Grenze setzt, wie die natürliche Zuchtwahl eine Elimination der nicht an das Leben angepaßten Geschöpfe bewirkt. Aber die positiven Ursachen der Entwickelung sind in der psychischen Aktivität zu suchen, sie muß deshalb aus den Gesetzen erklärt werden, die diese beherrschen. Die *historischen Ursachen* (die der biologischen *Vererbung* vergleichbar sind) bilden einen ersten Erklärungsgrund. Aber zu der historischen Betrachtung kann sich eine *Kritik der geistigen Prozesse* gesellen, die besonders geeignet ist, die *Bildung* und *Veränderung* der Begriffe aufzuklären.

Hieraus ergeben sich demnach zwei Gruppen von Problemen.

An erster Stelle die Probleme, die sich beziehen auf die *deduktive Entwickelung* der Wissenschaft, d. h. auf die *logischen Prozesse* der Umformung von Begriffen und Hypothesen, die man sowohl von rein psychologischen Gesichtspunkten als auch in ihrer eigentlichen wissenschaftlichen Anwendung betrachten kann. Aus der Prüfung dieser Probleme wird sich besonders die notwendige Schranke einer jeden deduktiven Entwickelung ergeben; derart, daß sich das Abwechseln zwischen einer induktiven und einer deduktiven Phase, das wir in den theoretischen Konstruktionen fanden, unter einem allgemeineren Gesichtspunkt als Gesetz der Entwickelung der Wissenschaften herausstellen wird.

An die *induktive Entwickelung* der Wissenschaft knüpft sich die zweite der eben erwähnten Problemgruppen: es handelt sich darum, die reale Bedeutung und die Quelle der *allgemeinsten und abstraktesten Begriffe* der Geometrie, der Mechanik usw. zu bestimmen, auf die die mannigfachen Vorstellungen hinauslaufen, die den Gegenstand der einzelnen Theorien bilden.

Auf diese Weise stellt uns die Kritik der Wissenschaft vor wohldefinierte erkenntnistheoretische Fragestellungen.

## Kapitel III.

# Die Probleme der Logik.

## A. Die reine Logik.

### § 1. Reale und formale Logik.

Wenn im gewöhnlichen Leben jemand in einer Diskussion seinem Gegner zur Evidenz beweist, daß die Konsequenzen seines Räsonnements *falsch* sind, so zögert er nicht zu behaupten, daß der ihn des *unlogischen* Denkens überführt habe.

Die Richtigkeit dieses Kriteriums bezweifeln hieße so viel wie die paradoxe Behauptung aufstellen, „daß ein *richtiges* Räsonnement zu falschen Schlüssen führen könne". Ein verständiger Mensch würde wahrscheinlich, um seine Ansicht über diese Frage zu erklären, sagen, es sei der *Zweck* des Räsonnements über Wahrheit und Falschheit zu urteilen, sein *Wert* sei deshalb nach dem erreichten Resultat zu bemessen.

Wie so häufig hat der gesunde Menschenverstand von seinem Standpunkte aus recht; da für ihn außerhalb des Lebens keine Probleme existieren, so gehen seine Antworten immer auf den praktischen Zweck. Und sie nähern sich ihm auch in roher Annäherung, wie eine Gerade zwischen zwei Punkten sich einer komplizierteren Linie nähert, deren Endpunkte in diesen Punkten liegen.

Dennoch läßt das Kriterium des gesunden Menschenverstandes in diesem Falle leicht einzusehende Ausnahmen zu. Titius und Caius sind in einer Frage uneins; nachdem sie lange diskutiert und sich gegenseitig *Denkunfähigkeit* vorgeworfen haben, stellt es sich heraus,

daß der eine die Dinge in einer gewissen Weise *gesehen* zu haben glaubt, während der andere sich entsinnt, das Gegenteil gesehen zu haben. Nunmehr wird keiner von beiden mehr daran denken, dem Freunde *Mangel an Logik* vorzuwerfen, vielmehr wird jeder im Inneren denken, der andere sei *blind;* und um den Streit zu beenden, begeben sie sich zusammen an Ort und Stelle, um durch den Anblick zu konstatieren, was vorher vielleicht keiner von beiden gesehen hatte.

Titius und Caius sind also gezwungen anzuerkennen, daß auch eine *richtige* Überlegung *ungeeignet* sein kann, die Wahrheit oder Falschheit einer Tatsache festzustellen, wenn nämlich der Betreffende, obgleich er richtig denkt, schlecht gesehen hat.

Dennoch hat der gesunde Menschenverstand nicht an eine derartige *Ausnahme* gedacht oder erinnert sich dessen nicht . . . . und bezeichnet denjenigen, der durch Überlegung zu falschen Schlüssen kommt, geradezu als *unlogisch.*

Der synthetischen Betrachtungsweise der Erkenntnis, wie sie dem auf ihre *Ziele* gerichteten gesunden Menschenverstand zukommt, steht häufig die analytische der Wissenschaft gegenüber, die das Ganze in seine Teile zerlegt und dann so darüber urteilt, als ob sie isoliert wären. In der Tat erscheint das Ergebnis der Wissenschaft nur insofern paradox, als es unvollständig ist.

Derjenige, der sich für den Hausgebrauch einer elektrischen Klingelanlage bedient, wünscht, daß die Glocke töne; wenn sie nicht tönt, ist die Leitung in *Unordnung;* es müssen irgendwo Drähte gerissen oder in Berührung gekommen sein, Ursachen, die auch sonst das Funktionieren der Klingel verhindert haben. Der Techniker kommt und prüft die Drähte, die er schon sorgfältig isoliert hatte, und konstatiert, daß weder ein



Bruch noch ein Kontakt stattgefunden hat. Was kommt darauf an? Die Glocke tönt nicht.

Aber es fehlt Wasser im Element; der Techniker braucht nur so viel, wie nötig ist, hineinzugießen, und die Glocke beginnt wieder zu tönen. Es war also *wichtig* für den Techniker, den Grund des *Schadens*, den er reparieren wollte, zu finden.

Der Vergleich ist ziemlich durchsichtig. Der Erkenntnisprozeß, der die Wahrheit zum Ziele hat, ist ein verwickelter Vorgang; das Denken ist nur ein Teil davon; es genügt also nicht, richtig zu denken, um die Wahrheit zu finden, sondern man muß zu gleicher Zeit auch noch anderen Bedingungen genügen. Die Erkenntnistheorie hat die Aufgabe, diese Bedingungen zu analysieren; ehe man zu einer synthetischen Betrachtung derselben gelangt, muß man sie soviel wie möglich getrennt untersuchen.

Kann man das Denken von seinem Inhalt *trennen?*

Wir berühren hiermit eine fundamentale Frage, über die zwischen den Philosophen Streit besteht: „Bezieht sich die Logik nur auf die *Form* oder auch auf den *Inhalt* des Denkens?"; und folglich „hat sie einen *realen* oder nur einen *formalen* Wert?".

Um die ganze Bedeutung der Frage vom praktischen Gesichtspunkt zu verstehen, genügt es, sich daran zu erinnern, welche Rolle die Logik in der scholastischen Philosophie gespielt hat; obgleich sie auf die formalen Regeln der Deduktion (oder der vollständigen Induktion) beschränkt war, galt sie doch als eine Kunst, die zur Erforschung der Wahrheit geeignet sei.

Dieser Grundirrtum, dessen Keim einige schon bei Aristoteles finden wollen, indem sie den Grund dafür in den Quellen suchen, aus denen er die „Kunst der Dialektik" schöpfte, dieser Irrtum findet auf zwei Wegen, auf denen der moderne Gedanke vorgegangen ist, seine Korrektur.

Einerseits hat man, indem man das Ziel festhielt, das Gebiet der Logik erweitert, indem man unter Denken auch die Interpretation der empirischen Daten versteht und indem man die allgemeinen Regeln festzustellen versucht, von denen die induktiven Prozesse abhängen. Alle diejenigen, die sich auf diesen Weg begeben haben, von BACON bis STUART MILL, haben die Notwendigkeit eingesehen, den *realen Inhalt* des Denkens zu berücksichtigen, und haben sich so von den alten Formeln entfernt, in denen sich das Falsche ebensogut wie das Wahre unterbringen läßt.

Wenn die neue *induktive Logik*, obgleich sie allgemeine Grundsätze besitzt, weit entfernt ist von der Bestimmtheit und Genauigkeit der Kriterien, wie sie der alten eigen waren, so entspricht sie doch weit mehr dem Begriffe einer Kunst, die Wahrheit festzustellen.

Von anderer Seite (KANT, HERBART usw.) wird das Denken in seiner *strengen Form* als Gegenstand der *Logik* festgehalten, und man sucht den rein *analytischen* Charakter dieser *formalen Strenge* ins Licht zu setzen, indem man dem Denken den Wert eines Mittels zur Umformung der begrifflichen Daten der Erkenntnis zuerkennt, das diese aber wahr oder falsch läßt, je nachdem was darüber die Prüfung mit anderen Mitteln ergibt, und das zwischen ihnen nur eine Verbindung herstellt, vermöge deren die Wahrheit oder Falschheit der einen die Wahrheit oder Falschheit der anderen nach sich zieht.

Damit das so verstandene Denken streng und von der wirklichen empirischen Prüfung völlig unabhängig wird, müssen seine Gesetze als rein formal erkannt werden, so daß sie überall da angewendet werden können, wo ungeachtet des Inhalts gewisse Bedingungen der inneren Übereinstimmung der Gedanken erfüllt sind.

In der Tat enthalten die Daten der Beobachtungen und des Experimentes eine gewisse Unbestimmtheit,



die in dem Begriff, dem sie untergeordnet werden, verschwindet; daher kann die Kontrolle, die über das Denken in Rücksicht auf die seinen Gegenstand bildende Wirklichkeit ausgeübt wird, nicht auf die gleiche Genauigkeit Anspruch machen, wie sie dem Urteil über seine formale Übereinstimmung mit sich selbst zukommt.

Diese Gedankenbewegung, die, wie gesagt, zwei entgegengesetzte Richtungen eingeschlagen hat, läuft letzten Endes auf die *Unterscheidung* einer *realen induktiven* und einer *formalen* (wie man vielfach meint) *deduktiven Logik* hinaus, die beide dasselbe Erkenntnisziel haben.

Man muß den Wert dieser Unterscheidung mit Rücksicht auf den klassischen Unterschied von *Deduktion* und *Induktion* bestimmen.

Das, was für die strenge formale Logik charakteristisch ist, ist nicht das Fortschreiten *vom Allgemeinen zum Besonderen*, denn die Prozesse der vollständigen Induktion bilden einen wesentlichen Teil von ihr. Will man also von einer formalen Logik als von einer „deduktiven" sprechen, so muß man sich gegenwärtig halten, daß man damit dem Worte „*Deduktion*" eine weitere Bedeutung als die traditionelle gibt, entsprechend dem Gebrauch des Wortes bei den Mathematikern.

Die Beziehung von Deduktion und Induktion in diesem Sinne und ihr Verhältnis zum Erkenntnisprozeß geht aus dem logischen Schema von JEVONS (Kap. II § 21) klar hervor. Die Aufgabe des deduktiven Räsonnements in diesem Prozeß ist „die der Erfahrung unzugänglichen Hypothesen in andere, ihnen *äquivalente*, umzuformen, die experimentell bestätigt oder widerlegt werden können".

Daraus geht hervor, welche Bedeutung einem streng logischen Instrument zukommt, dessen Kontrolle nicht abhängt von den verifikatorischen Experimenten und

von der Wahrheit oder Falschheit der Hypothesen, folglich auch nicht von ihrem Gehalt an Tatsächlichem, d. h. von der realen Bedeutung des Räsonnements.

Wir wollen im folgenden das Wort „*Logik*" immer *in der formalen Bedeutung* gebrauchen, die diesem streng logischen Umformungsmittel entspricht; später werden wir Gelegenheit haben, die Unzuträglichkeiten kennen zu lernen, die entstehen, wenn man die Bedeutung des Wortes auf die Untersuchung der wissenschaftlichen Induktion in ihrem weitesten Sinne ausdehnt. Um Verwechslungen zu vermeiden, wollen wir diese Untersuchung als *angewandte Logik* der *reinen* gegenüberstellen. Und bei der Behandlung jener werden wir den realen Wert der formalen Denkgesetze und die Bedingungen, unter denen sie Beweiskriterien in bezug auf die Tatsachen werden, untersuchen.

## § 2. Wortschemata und Zeichen.

Wir haben allerdings erst die Nützlichkeit einer formalen Logik erkannt, die die Denkgesetze unabhängig vom Inhalt liefert. Es bleibt uns noch zu untersuchen, ob in diesem Sinne die Unabhängigkeit auch wirklich streng durchgeführt werden kann. Diese Prüfung ist um so notwendiger, als diese Möglichkeit von den berühmtesten Anhängern der kritischen Philosophie bestritten wird.

Es gibt zwei Wege, die Möglichkeit einer rein formalen Logik zu beweisen.

Derjenige Weg, den man als klassisch bezeichnen kann, besteht darin, die *sprachlichen Schemata* aufzustellen, die den idealen Formen des exakten Gedankens entsprechen.

Wenn es gelingt, diesen Schemata eine strenge und abstrakte Allgemeinheit zu geben, so ist die Behauptung



bewiesen. Aber im Falle des Mißerfolges darf man daraus nicht den entgegengesetzten Schluß ziehen, denn das Versagen des Schemas kann auf einer unvollkommenen Anpassung der Sprache beruhen, die den Prozessen des exakten Denkens nicht immer genau folgt.

Man betrachte z. B. die aristotelischen Regeln für die Konversion der Urteile; auf die sich einige scharfsinnige Bemerkungen unseres Landsmanns Tocco beziehen.

Das allgemeine bejahende Urteil kehrt sich *per accidens* (nach dem Ausdruck des Boetius) in das partikulär bejahende um; so folgt z. B. aus dem Urteil „Alle Quadrate sind Parallelogramme" das andere „Einige Parallelogramme sind Quadrate". Nun zeigt sich als eine Lücke in dieser Regel der Fall, wo das Prädikat für das Subjekt wesentlich ist. Z. B. erhielte man aus dem Satz „Alle Dreiecke sind Polygone, deren Winkelsumme zwei Rechte beträgt", durch Umkehrung den anderen „Einige Polygone, deren Winkelsumme zwei Rechte beträgt, sind Dreiecke", der fälschlich den Glauben an die Existenz von Polygonen mit mehr als drei Seiten, deren Winkelsumme zwei Rechte beträgt, erweckt.

Aber was beweist diese Lücke? Lediglich, daß das Wort „Einige" vieldeutig ist. Ein Mathematiker wird es stets in dem (positiven) Sinne verstehen, der die Allheit nicht ausschließt, wird also zugeben, daß das Urteil „*Alle A* sind *B*" als *Spezialfall* unter das andere fällt „*Einige A* sind *B*"; aber nach dem grammatischen Sprachgebrauch verbindet sich mit dem erwähnten Wort eine negative Bedeutung, für die der Gedanke von „einigen" denjenigen von „allen" ausschließt, so daß danach die beiden oben erwähnten Sätze sich auszuschließen scheinen.

Die formale Konversionsregel, die wir als Beispiel anführten, bleibt also streng in Geltung, wenn man durch geeignete Verabredung die Bedeutung des Wortes „einige" festlegt, wobei man sich von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch der Grammatik entfernt, gemäß den von den Mathematikern in allen ähnlichen Fällen akzeptierten Kriterien.

Dem eben angeführten Beispiel ließen sich noch zahlreiche andere hinzufügen, wo aus ähnlichen mit dem Sprachgebrauch zusammenhängenden Gründen die in Worten ausgedrückte logische Regel versagt oder zu irrtümlichen Anwendungen Anlaß gibt. Besonders bildet die Doppelsinnigkeit der Worte die gemeinsame Quelle der bekanntesten Trugschlüsse, z. B. derjenigen, bei denen der Mittelbegriff in den beiden Prämissen eines Schlusses mit verschiedenem Umfang gebraucht wird.

Es ist bekannt, wie viel die Logiker sich mit diesen Denkfehlern beschäftigt haben und wie tief ihre Studien in diesen grammatischen Teil der Logik eingedrungen sind, der sozusagen auf eine Verbesserung der Sprache ausgeht. Aber die Sprache ist von dem Ideal der Logiker ach noch immer so weit entfernt!

Das Wort, das dem Bedürfnis nach Darstellung der Dinge voraneilt und sich unter dem Einfluß der Assoziationen und der durch die Wirklichkeit gebotenen Analogien entwickelt, dieses Wort faßt in einen fast unveränderlichen Klang einen Inhalt, der sich in der Zeit erweitert und verändert, so daß in jedem Augenblick zu jedem Klang eine Mehrzahl einander nur teilweise deckender Bilder existiert. Und dies ist anderseits eine wesentliche Bedingung des Fortschritts.

Angesichts dieser Feststellung macht die grammatikalische Logik Halt, indem sie anzuerkennen gezwungen ist, daß die sprachlichen Formen des Denkens keine sichere Gewähr für seine Richtigkeit geben, daß sie,



kurz gesagt, den weitestgehenden Anforderungen an formale Strenge nicht genügen. Hieraus entstand eine neue Disziplin, in der die Untersuchung der sprachlichen Schemata durch diejenige von *verabredeten Zeichen* ersetzt wurde. So entstand eine dem algebraischen Algorithmus nachgebildete *symbolische Logik*, die die Namen *mathematische Ideographie*, *Pasigraphie* oder *Logik* erhielt.

Ihre ersten Anfänge gehen auf Leibniz zurück (gegen 1700) und Lambert hat sie um 1750 vervollkommnet. Aber diese Arbeiten blieben fast ein Jahrhundert lang unterbrochen und wurden erst wieder teilweise unabhängig aufgenommen, einerseits von der englischen geometrischen Schule (Peacock, De Morgan, Boole), anderseits von H. Grassmann und W. R. Hamilton, welcher letztere nicht mit dem Erfinder der Quantifikation des Prädikats verwechselt werden darf (einer Lehre, die einen ziemlich geringen Fortschritt in der Richtung der symbolischen Logik bedeutet).

Peirce und Schroeder (1877), Peano (1888—89) und Frege (1891) haben den logischen Algorithmus derart erweitert und verbessert, daß man mit ihm ganze mathematische Theorien ausdrücken kann[1]).

Welches auch der Wert des Systems als Mittel der mathematischen Kritik sei (und wir hatten schon Gelegenheit, auf die Mangelhaftigkeit der rein formalen Kriterien hinzuweisen, die einige Forscher für das Studium der Prinzipien der Geometrie daraus zu entnehmen scheinen), so muß man doch anerkennen, daß es unter verschiedenen Gesichtspunkten einen Fortschritt gegenüber der scholastischen Logik bedeutet,

1) S. das „Formulaire de Mathématiques", das in Turin unter der Leitung Peanos erscheint und an dem Padoa, Pieri, Vacca, Vailati usw. mitarbeiten.

und daß es das Problem, Schemata für das exakte Denken aufzustellen, besser löst.

Um diesen Zweck zu erreichen, verläßt die mathematische Logik den Gebrauch der gewöhnlichen Wortformen und schafft *ex novo* ein Zeichenlexikon, in dem jedem Zeichen ohne Vieldeutigkeit ein Gegenstand zugeordnet wird. Man abstrahiert jedoch von der konkreten Bedeutung der Gegenstände, um ihre logischen Beziehungen darzustellen, deren Fixierung und Zurückführung auf wenige allgemeine selbst wieder symbolisch dargestellte Typen einer tieferen Untersuchung gelingt; so findet das Denken seinen Ausdruck in einem, wie gesagt, dem algebraischen ähnlichen logischen Kalkül.

Vor allem die mathematischen Logiker aus der Schule Peanos haben diese Analogien weit getrieben, indem sie die Deduktion *logischer Lehrsätze* verfolgten, die durch Kombination weniger Grundsätze des Denkens entstehen.

Daher beginnt die symbolische Logik, die nach dem Muster der Arithmetik oder der Geometrie aufgebaut ist, ein Mittel zu werden, das gewisse Entwickelungen abzukürzen und zu kontrollieren gestattet, und dessen Gebrauch in den verschiedenen Zweigen der Wissenschaft daher häufiger werden kann.

## § 3. Symbolische und psychologische Logik.

Der zweite Weg, den man einschlagen kann, um die Möglichkeit einer formalen Logik festzustellen, besteht in der Untersuchung des Denkprozesses, der unmittelbar aus seinen wissenschaftlichen Ergebnissen rekonstruiert wird, ohne den Umweg über irgend welchen besonderen Ausdruck durch Worte oder Zeichen. Und man muß gerade auf jene neueren Entwickelungen der Mathematik zurückgehen, aus der die algorithmische Logik (die darum mathematische genannt wird) entsprungen ist.



Wir stellen also der grammatikalischen oder allgemeiner der symbolischen Logik eine *psychologische* gegenüber, die in den Schemen und Zeichen weniger die geschriebenen Formeln sieht als die Verabredungen und Normen, die nicht auf dem Papier stehen (und die anders als durch psychologische Überlegung nicht verstanden werden können), und die die Verbindungsweisen jener Formeln beherrschen.

Die Logik in diesem Sinne bildet nicht mehr eine deduktive Theorie als Hilfsmittel wissenschaftlicher Entwickelungen, sondern eine Wissenschaft der Beobachtung und Vergleichung, deren eigentlicher Inhalt die Kritik der elementaren Denkvorgänge bildet, die sich in den Grundsätzen des Denkens widerspiegeln; diese Vorgänge will sie als psychische Realitäten *erklären*.

Wir müssen zunächst im voraus einen Einwand widerlegen, der häufig gegen den oben aufgestellten Begriff der Logik erhoben wird, indem wir die Beziehungen zwischen Logik und Psychologie näher bestimmen.

Um sie voneinander zu trennen, sagt man gewöhnlich, daß die eine *in bezug auf das Wahre normativen Charakter* hat, während die andere lediglich eine Beschreibung von Denkvorgängen ist, die *richtig* oder *falsch* sein können.

Gemäß unserem (streng formalen) Gesichtspunkt müssen wir vor allem der Meinung entgegentreten, daß die logischen Normen einen apriorischen Wert in bezug auf die Wahrheit haben; aber für die Diskussion darüber verweisen wir auf den zweiten Teil dieses Kapitels.

Wir geben zu, daß die Logik als ein System von Normen angesehen werden kann, die beachtet werden *müssen, wenn man* Widersprüche vermeiden *will*. Das kann man aber auch ausdrücken, indem man sagt: innerhalb der verschiedenen Denkvorgänge zeichnen

sich einige dadurch aus, daß in ihnen gewisse Bedingungen der Widerspruchslosigkeit willkürlich erfüllt sind, diese nennt man logisch.

*In diesem Sinne kann man die Logik als einen Teil der Psychologie betrachten.*

## § 4. Die Möglichkeit der formalen Logik gefolgert aus der Entwickelung der Mathematik.

Wir wollen von diesem psychologischen Gesichtspunkt aus die neuere Entwickelung der Mathematik prüfen, auf die wir oben hingewiesen haben. Das Ergebnis wird sein:

1. Die Erkenntnis a posteriori der Möglichkeit einer formalen Logik.
2. Eine Definition dessen, „was logisch ist", im Gegensatz zu den Denkvorgängen, wo die logische Entwickelung nicht unabhängig ist von der Vorstellung der in ihr verarbeiteten Bilder.

Die Möglichkeit einer formalen Logik geht vor allem aus folgendem hervor: Die gleiche Strenge, die gleiche unabänderliche Widerspruchslosigkeit herrscht in den Gedankenentwickelungen der verschiedenen Gebiete der Mathematik, sowohl in denen, die einer physikalischen Anwendung näher liegen, als in den entferntesten und abstraktesten, z. B. in der *mehrdimensionalen*, oder in der *nichteuklidischen* oder der *nichtarchimedischen* Geometrie usw.; und diese abstrakten Theorien haben für sich eine analytische Existenz (als logische Gebäude), wenn auch kein reales Objekt existiert, auf das sie sich beziehen.

Aber noch mehr, durch Plücker ist in die Geometrie eine äußerst fruchtbare Betrachtungsweise eingeführt worden, die ein Prinzip für die Transformation von Theorien liefert, das gerade auf ihrer formalen Bedeutung beruht.



Man betrachtet eine geometrische Theorie als ein System von logischen Beziehungen, die zwischen gewissen durch die Worte „Punkt", „Linie" usw. bezeichneten Begriffen statthaben. Man kann sich mit einer abstrakten und unbestimmten Bedeutung für diese Begriffe begnügen, indem man sie also als Zeichen für Begriffe betrachtet, die zwar unbekannt sind, die aber formal den Grundsätzen genügen, welche die geometrischen Beziehungen ausdrücken. Es ist also erlaubt, die Bedeutung der Zeichen nach Belieben durch Verabredung festzusetzen, wenn nur die erwähnten formalen Bedingungen erfüllt sind; man erhält so eine unendliche Mannigfaltigkeit von möglichen *konkreten Interpretationen* der abstrakten geometrischen Theorie.

Es ist hier nicht der Ort, auf die mathematischen Folgerungen aus diesem fruchtbaren Prinzip hinzuweisen; wir wollen nur sagen, daß es in den kritischen Geistern den Sinn für formale Logik entwickelt und den schlagendsten Beweis *a posteriori* für ihre Möglichkeit geliefert hat.

Diese Ansicht findet sich klar ausgesprochen in den neuesten strengen Darstellungen der Prinzipien der Geometrie (Pasch, Peano, Veronese, Enriques, Hilbert), deren erstes Vorbild Pasch in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882)[1]) geliefert zu haben scheint.

Aber die oben erwähnte geometrische Kritik und besonders die Vergleichung der erwähnten Arbeiten ergibt nicht nur einen *Beweis* der Möglichkeit einer formalen Logik, sondern erlaubt auch eine genaue *Definition* des Sinnes, in dem diese formale Logik aufgefaßt werden muß.

---

1) S. den Artikel von F. Enriques „Prinzipien der Geometrie" in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", herausgegeben bei B. G. Teubner, Leipzig.

Es handelt sich also darum, die Anforderungen zu erkennen (und das kann auch ohne jede besondere grammatikalische oder symbolische Darstellung geschehen), die sie an die Form der Definitionen und Postulate stellt, und was man unter einem *streng logischen* Aufbau einer Theorie zu verstehen hat, oder welche Behandlungsweisen im Gegensatz dazu als *unstreng* betrachtet werden.

## § 5. Kritik der Definition.

Der Gedanke, die Logik aus der Entwickelung der Mathematik und speziell der Geometrie zu abstrahieren, ist alles andere als modern.

Schon ARISTOTELES ging bei seiner Untersuchung von der Geometrie und der Rhetorik aus.

Nun vervollständigen die früher erwähnten kritischen Fortschritte nicht nur die aristotelischen Regeln der *Deduktion*, sondern sie begründen vor allem die neue Lehre von der *Definition*, die als eine wirklich moderne Errungenschaft betrachtet werden kann, zu der verschiedene Denker in verschiedener Weise und teilweise unabhängig voneinander in den letzten zwanzig Jahren gelangt sind.

Um in die Analyse des logischen Gedankenprozesses einzudringen, tut man am besten von dieser Kritik der Definition auszugehen.

Im gewöhnlichen Verstande werden dem Worte „Definition" zwei einander widersprechende Bedeutungen zugeschrieben. Einerseits wird sie als ein Reduktionsverfahren betrachtet, das, wenn gewisse Begriffe gegeben sind, daraus neue zu bilden gestattet. Anderseits nimmt man an, wenn auch ohne es ausdrücklich zu sagen, daß sie die reale Bedeutung irgendeines Begriffes feststellen kann. In der Praxis werden die zusammengesetzteren Begriffe auf die einfacheren zurückgeführt, für die eine jede Erläuterung überflüssig erscheint.



Wenn aber nach einer Definition dieser letzteren gefragt wird, so scheut man sich nicht, sie durch die ersten zu erklären.

Auf diese Weise bewegt man sich offenbar in einem circulus vitiosus; wer sich vornimmt, das Lexikon irgendeiner Sprache zu redigieren, wird dies leicht verstehen.

Man kann den Widerspruch nicht anders fortschaffen, als indem man einen Unterschied zwischen Definitionen und Definitionen macht, je nachdem es sich um einen wirklichen logischen Reduktionsprozeß oder um die Aufstellung jener ersten und einfachsten Begriffe handelt, aus denen die komplizierteren erzeugt werden.

Dieser Unterschied zeigt sich deutlich demjenigen, der ein geometrisches Lehrbuch vom kritischen Gesichtspunkt aus prüft.

In den elementaren Schullehrbüchern wird erklärt, was die fundamentalen Figuren sind, indem man mit Hilfe einer Zeichnung ein geeignetes Bild von ihnen zeigt. So wird von den ersten Ausdrücken der geometrischen Sprache eine *konkrete Definition* gegeben.

Aber dieses Verfahren gefällt dem Lehrer nicht mehr, der dieselben Dinge reiferen Schülern erklären soll. Für ihn ist die konkrete Definition der idealen Figuren der Geometrie nur ein Mittel, gewisse Vorstellungen im Bewußtsein des Schülers zu erwecken; hat also nur einen psychologischen Charakter, mit dem er nicht zufrieden ist. Und in dem vollen Bewußtsein, daß zwischen der rationalen und der empirischen Geometrie ein klarer Unterschied besteht, wobei die letztere mit tiefer Verachtung angesehen wird, meint er, daß in seiner Darstellung alles rein logisch definiert wird.

Nehmen wir als Beispiel die Definition der geraden Linie, die noch immer einige Lehrbücher nach LEGENDRE geben: „Die Gerade ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte."

Es ist interessant, einen Augenblick bei der Untersuchung dessen stehen zu bleiben, was diese Definition uns lehrt und dessen, was sie uns nicht lehrt.

Es soll sich nach der Annahme um eine logische Definition handeln. In diesem Sinne sagt sie aus, daß der Begriff der Geraden sich aus zwei anderen allgemeineren zusammensetzt, nämlich aus dem der *Linie* und dem ihrer *Länge*. Wenn man die wirkliche Bedeutung von diesen streng bestimmen wollte, so würde man in große Verlegenheit geraten; aber es ist bequemer, nicht auf dieser Forderung zu bestehen. Wir wollen uns bei diesem Punkte nicht aufhalten und in unserer Prüfung fortfahren.

Man wäre zum mindesten berechtigt, zu verlangen, daß aus der Definition die Eigenschaften der Geraden logisch abgeleitet werden, indem man irgend welche allgemeinen Eigenschaften der Linien und ihrer Längen benutzt. Aber schon die einfachste Eigenschaft, nach der zwei Geraden nicht mehr als einen Punkt gemein haben können, bildet eine Aussage, die auf diesem Wege unmöglich bewiesen werden kann[1]), und die man sich deshalb gezwungen sieht als Postulat zu der Definition hinzuzufügen.

In den weiteren Entwickelungen, die sich auf kompliziertere Figuren beziehen, hat man Gelegenheit, sich auf dieses Postulat und auf andere ähnliche, die die einfachsten Eigenschaften der Geraden zum Ausdruck bringen, zu berufen, niemals aber braucht man die Eigenschaft, durch die sie angeblich definiert ist.

Wenn man also den gewöhnlichen Sinn des Wortes nicht ändern will, so muß man zugeben, daß die angeb-

1) Die Unmöglichkeit läßt sich mathematisch zeigen, sobald man die Begriffe „Linie" und „Länge einer Linie" durch geeignete der gewöhnlichen Anschauung entsprechende Postulate festgelegt hat.



liche Definition von Legendre vom logischen Standpunkt aus keine Definition ist, oder daß sie wenigstens nicht deren Stelle in dem erwähnten logischen Aufbau der Elementargeometrie einnimmt.

Aber wenn auch die erwähnte Definition uns nicht die elementaren Eigenschaften der Geraden lehrt, von denen man in der logischen Entwickelung der Geometrie Gebrauch macht, so kann man doch nicht leugnen, daß sie uns jedenfalls irgend etwas lehrt. In der Tat finden die Schüler sie vollkommen klar und geben gerne zu, daß sie ihnen eine genaue Vorstellung von der Geraden liefert.

In welcher Weise wird dieser unleugbare Erfolg erreicht?

Das ist leicht zu begreifen. Da der allgemeine Begriff einer Linie die Vorstellung eine Fadens erweckt, so tritt einem, wenn von der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten gesprochen wird, das Bild eines gespannten Fadens vor Augen, was eine gute sinnliche Vorstellung einer Geraden ist.

Dann aber ist die angebliche Definition der Geraden nicht besser geeignet sie zu bestimmen als irgendeine andere Erklärung mit Hilfe eines konkreten Modells; daher befindet sich der Lehrer im Irrtum, der sie heranzieht in der Meinung, damit etwas wesentlich Verschiedenes zu tun.

Wir haben als Beispiel die Definition gewählt, die Legendre von der Geraden gibt; allerdings hat ihr die Kritik schon längst das Urteil gesprochen, und doch ist sie noch an einigen unserer Schulen in Gebrauch. Ähnliche Überlegungen könnte man über alle Definitionen anstellen, die von alten und neuen Geometern von Euklid bis auf unsere Tage aufgestellt worden sind (ausgenommen sind nur die neuesten kritischen Autoren). Man muß den Definitionen mißtrauen, die sich am Anfang eines geometrischen Lehrbuches finden;

es sind keine Definitionen im logischen Sinne des Wortes, sondern einfache *Beschreibungen* oder Definitionen im psychologischen Sinne.

Übrigens ist leicht der Unterschied zu erkennen, der sie von den eigentlichen Definitionen trennt, die sich in demselben Lehrbuch nach den ersten Seiten finden. Diese letzteren kann man, wenn man will, fortlassen und den definierten Ausdruck durch eine Umschreibung ersetzen; man probiere aber einmal dasselbe bei den ersteren! Das Unternehmen erweist sich mit einemmal als sinnlos. Wie sollte man auch eine Geometrie entwickeln, nachdem man aus der Sprache nacheinander alle Worte entfernt hat, die geometrische Vorstellungen bezeichnen?

Auf welche Weise auch immer man die Schwierigkeit zu beseitigen sucht, man entgeht nicht der fundamentalen Schlußfolgerung, die aus den vorstehenden Bemerkungen folgt:

Es besteht in der Geometrie ein deutlicher Unterschied zwischen Definitionen und Definitionen, je nachdem ob es sich um Grundbegriffe handelt oder um solche, die erst in der Entwickelung der Wissenschaft gebildet werden. Nur die letzteren Definitionen sind vollkommen, so daß es gestattet ist, den definierten Ausdruck durch die Ausdrücke zu ersetzen, die zu seiner Definition verwandt worden sind, d. h. ihre Bedeutung ist streng bestimmend.

Nur diese Definitionen also dürfen als wirklich *logische Definitionen* angesehen werden. Dagegen können die üblichen Definitionen der geometrischen Grundbegriffe nur in einem erweiterten Sinne des Wortes als wirkliche Definitionen betrachtet werden; man hat sie in diesem Sinne als *psychologische Definitionen* zu bezeichnen; dieser Name bringt ihre Aufgabe zum Ausdruck, gewisse *Vorstellungen* zu erwecken und ihre Beziehungen anschaulich zu machen.



## § 6. Real- und Nominaldefinitionen.

Diese an der Geometrie entwickelten Überlegungen finden natürlich auf jede beliebige Wissenschaft oder deduktive Theorie Anwendung.

So ist es leicht, in einem Gesetzbuch den klaren Unterschied zu zeigen, der zwischen den Definitionen der juristischen Grundbegriffe wie z. B. des *Eigentums*, des *Vertrags* usw., und denjenigen bestimmter möglicher Eigentumsobjekte, z. B. eines *Schatzes* oder besonderer Verträge, wie z. B. eines *Pfandes* oder einer *Antichresis* besteht.

Die ersten haben so wenig die Bedeutung von vollkommenen und strengen Definitionen, daß man sie nicht verstehen kann, ohne die Gesamtheit der folgenden Bestimmungen des Gesetzbuches sich vor Augen zu halten; auf sie paßt gut der kluge Ausspruch des Digest (leg. 202, 50, 17): „Omnis definitio in jure civili periculosa est; parum est enim ut non subverti possit."

In jeder deduktiven Theorie finden sich im allgemeinen zwei Arten von Definitionen: diejenigen, die zur Feststellung der Grundbegriffe dienen, werden als *Realdefinitionen* betrachtet, diejenigen, die im Laufe der Untersuchung eingeführt werden, nennt man *Nominaldefinitionen.*

Nun ist es die Aufgabe der Realdefinitionen, durch eine knappe Formel einige der bekannten oder angenommenen Merkmale, der Begriffe ins Gedächtnis zu rufen, an die man nachher am häufigsten andere Hypothesen und Behauptungen knüpfen muß; und in diesem Sinne kann man ihre Wichtigkeit nicht verkennen. Wenn man aber, anstatt ihnen die Bedeutung von einfachen Beschreibungen zuzusprechen, sie als Definitionen bezeichnet, so besteht die Gefahr, daß man die Aufmerksamkeit bei einer formalen Verbindung der von

einem besonderen Gesichtspunkt angesehenen Vorstellungen statt bei ihrer wirklichen Bedeutung festhält, und daß man die Täuschung aufrecht erhält, daß eine Worterklärung eine Gesamtheit von Beobachtungen und Experimenten ersetzen könne, die die Bestimmung dieser Bedeutung bezwecken.

Wir möchten also sagen, daß die *Realdefinition keine logische*, sondern nur eine *psychologische Definition* ist, d. h. ein Mittel, um in dem Geiste von anderen eine gewisse Vorstellung zu erwecken mit Hilfe von Bildern, die in geeigneter Weise wachgerufen und assoziiert werden.

Deswegen ist die genaueste und typischste Realdefinition die *konkrete Definition*, die man von dem Namen eines Gegenstandes gibt, wenn man den Gegenstand selbst vorzeigt und dabei das Wort ausspricht, das ihn bezeichnet. Wenn es sich darum handelt, einen etwas allgemeineren Ausdruck zu definieren und sich dabei immer noch auf konkrete Gegenstände zu beziehen, so kann man eine Anzahl von solchen zeigen und die Aufmerksamkeit auf ihre gemeinsamen Merkmale lenken.

Wenn auch diese Fälle einfacher sind als diejenigen, die man oft zu betrachten hat, so liegt doch der konkreten Definition immer die Herstellung einer Assoziation zwischen einem Wort und einem gewissen Empfindungskomplex zugrunde.

Die Definition gehört, von diesem Gesichtspunkt betrachtet, eher in das Gebiet der Beobachtungen und Experimente als in die Logik. Z. B. ist es Sache der in das Gebiet der Zoologie fallenden anatomischen und physiologischen Beobachtung, die Merkmale der Tiere genau festzustellen, die derselben Art angehören sollen.

Indessen ist die konkrete Definition nicht geeignet zur Fixierung von etwas abstrakten Vorstellungen und von denjenigen Begriffen, die durch eine längere assoziative und abstraktive Gedankenarbeit gebildet worden



sind. In diesen Fällen genügt die Wahrnehmung irgendeines Gegenstandes nicht immer, um in dem Geiste anderer dieselbe Arbeit sich vollziehen zu lassen, die in unserem stattgefunden hat. Und gerade hier greift man im allgemeinen zu einer Beschreibung, die dadurch, daß sie den Anstoß zu dieser Arbeit gibt, die Aufgabe einer psychologischen Definition erfüllt.

Wenn wir sicher sein können, daß die Bildung des Begriffs sich in dem Geiste des anderen ebenso vollzogen hat, wie in dem unsrigen, so ist die ursprüngliche Bedeutung des Wortes, durch das wir ihn bezeichnen, dadurch festgelegt. So kommt es in der Elementargeometrie vor, daß der Anblick irgendeines rohen Modells oder irgendeine einfache Beschreibung ausreichen, um die Erinnerung an den Prozeß zu erwecken, der in dem Geiste eines jeden bereits stattgefunden hat, und so eine klare Vorstellung von dem Dinge hervorzurufen, das man definieren will (Punkt, Linie, Oberfläche .....).

Aber im allgemeinen findet hier eine gewisse Unbestimmtheit statt, die sich in der Bedeutung von Worten, die allgemeine oder abstrakte Dinge bezeichnen, widerspiegelt. Die Beschreibung gibt uns dann nicht mehr eine genaue Bestimmung, sondern erklärt den realen Sinn der Begriffe nur in unvollständiger und unstrenger Weise.

## § 7. Die implizite Definition.

Die Schwierigkeit, die sich hier herausstellt, ist außerordentlich ernst, denn jede Unbestimmtheit in der Bedeutung der Grundbegriffe drückt sich in einer Unbestimmtheit der sie betreffenden deduktiven Theorie aus; und der Schaden wird um so größer, je weiter die Theorie sich von ihrem Ausgangspunkt entfernt.

Eine Deduktion, die von Daten ausgeht, die nicht streng feststehen, kann im besten Falle nur subjektiven

Wert erlangen; das sollten die Philosophen immer vor Augen haben. ... In der Wissenschaft, und habe sie auch bloß hypothetischen und analytischen Charakter, kann ein solcher Mangel an Bestimmtheit in den zugrunde liegenden Daten nicht geduldet werden oder wenigstens nicht über einen gewissen Grad hinaus, der durch das Maß der *praktischen Genauigkeit* gegeben wird, das nach vorsichtiger Erwägung aus den Fehlern der Beobachtung und des Experimentes zu bestimmen ist.

Aber logisch gesprochen kann man eine deduktive Theorie nicht für befriedigend erklären, wenn nicht alle Unbestimmtheit der Daten streng daraus entfernt ist.

Diese Vollkommenheit ist, wenigstens theoretisch, *unter dem formalen Gesichtspunkt*, da zu erreichen, wo man die Grundbegriffe nicht explizite, sondern *implizite* mit Hilfe eines *Systems von Postulaten* definiert. Diesen Weg haben die Geometer eingeschlagen, um der Geometrie eine logische Verfassung zu geben.

Demnach besteht eine deduktive Theorie aus den Symbolen *A*, *B*, *C* ..., die die nicht definierten Grundbegriffe vertreten und einer gewissen Anzahl *logischer Beziehungen* zwischen ihnen, die als Grundsätze oder *Postulate* aufgestellt werden, und aus denen alle anderen Sätze als *Lehrsätze* abgeleitet werden. Man betrachtet dabei *die Gesamtheit der Postulate als die implizite Definition der gegebenen Grundbegriffe*, soweit das für die auf sie gegründete Theorie nötig ist.

Wenn man sagt, daß die Postulate logische Beziehungen zwischen den Grundbegriffen *A*, *B*, *C* ... enthalten, so meint man, daß sie eine allgemeine oder abstrakte Form haben, so daß sie verständlich bleiben, auch wenn man von jeder bildlichen Vorstellung der Begriffe absieht und nur festhält, daß *A*, *B*, *C* ... z. B. aus der Vereinigung gewisser (nicht definierter) Elemente entstehen, usw.



Nicht alle Beziehungen zwischen *A*, *B*, *C* ... können auf diese logische Form zurückgeführt werden, es sei denn, daß man zu den gegebenen *neue undefinierte Begriffe hinzufügt.*

Die Analyse des Gedankenvorgangs wird uns später dahin führen, die logischen Beziehungen psychologisch zu erklären als Ausdruck angenommener Assoziationen und Dissoziationen von Gegenständen. Vorläufig wollen wir einige Beispiele geben, die geeignet sind, die vorstehenden Unterscheidungen zu erklären.

Die Postulate:

1. Zwei Punkte liegen auf einer und nur auf einer Geraden.
2. Eine Gerade und ein Punkt außerhalb von ihr bestimmen eine Ebene.
3. Wenn irgend zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene liegen, so liegt die ganze Gerade in ihr.

drücken logische Beziehungen aus zwischen den Punkten, den Geraden und den Ebenen, die als „Klassen von Punkten" aufgefaßt werden.

Die Sätze hingegen, in denen von *Bewegungen* von Figuren (die aus Punkten, Geraden und Ebenen bestehen) oder von ihrer *Kongruenz* (Gleichheit) die Rede ist, drücken nicht logische Beziehungen zwischen den genannten Begriffen aus, da ihr Verständnis von der Anschauung der Figuren abhängig ist; diese kann man nur entbehren, wenn man unter die undefinierten Objekte noch einen neuen Begriff aufnimmt, der aus der Analyse von über die Bewegung angestellten Gedankenexperimenten hervorgeht, z. B. den einer gewissen Gruppe von Zuordnungen zwischen Punkten usw.[1]).

---

1) Vgl. die Sammlung von F. ENRIQUES „Questioni riguardanti la Geometria elementare" Bologna — Zanichelli 1900 — an verschiedenen Stellen und speziell den monographischen Artikel von A. GUARDUCCI

Es kommt darauf an, sich den Erkenntniswert der impliziten Definition klar zu machen. Wenn z. B. in einem Lehrbuch der Geometrie der Punkt, die Gerade usw. durch Postulate definiert werden, so kann man daraus entscheiden, ob gewisse logische Beziehungen zwischen diesen Begriffen bestehen oder nicht; ob aber das mit dem Worte „Punkt" bezeichnete Objekt etwas ist, das sich einem kleinen physischen Körper nähert, oder irgendein anderer Gegenstand (z. B. ein Kreis, der als Element des Systems der Kreise in einer Ebene gedacht wird), das ist eine Frage, deren Lösung uns durch die Postulate in keiner Weise erleichtert wird, denn verschiedene Gegenstände können, sofern sie eine mit gewissen abstrakten Merkmalen ausgestattete Klasse bilden, geometrisch ganz gleich behandelt werden.

Mit anderen Worten: die *implizite Definition* fungiert in einer Theorie nicht als *Realdefinition*, die die Grundbegriffe oder die Grundsymbole bestimmt, sondern als ein *Ersatz* für dieselbe in bezug auf die formale Deduktion der Theorie selbst; kurz sie läßt unendlich viele verschiedene Deutungen der Symbole zu, die nur an die Bedingung gebunden sind, daß sie die Grundpostulate formal erfüllen müssen.

Demnach muß man in der wirklichen Entwickelung der Wissenschaft die implizite Definition durch eine *konkrete Deutung* ergänzen, indem man mit Hilfe geeigneter Beobachtungen und Experimente die Bedeutung der nicht definierten Ausdrücke feststellt, durch die man konkrete Objekte oder Beziehungen zwischen solchen darstellen will, und indem man so feststellt, welche Tatsachen (oder Annahmen von solchen) durch die Postulate ausgedrückt werden sollen, so daß schließlich der wirkliche Inhalt der übrigbleibenden noch nicht definierten Begriffe sich aus den angesetzten Beziehungen ergibt.



Wir müssen bemerken, daß die Unvollständigkeit unter dem realen Gesichtspunkt keinen *Mangel* der logisch impliziten Definition bildet, angesichts der wissenschaftlichen Aufgabe der deduktiven Theorie, der sie zugrunde liegt. Es handelt sich in der Tat darum, ein gewisses System von Hypothesen der experimentellen Prüfung zu unterwerfen mit Hilfe einer angemessenen Umformung, und darum ist es *wichtig*, daß *diese Hypothesen in ihrer Gesamtheit isoliert von jeder anderen durch die Tatsachen suggerierten Hypothese betrachtet werden;* offenbar wird dieser Zweck am strengsten erreicht, wenn man eine Umformung anwendet, die diese Tatsachen für den Augenblick in Vergessenheit geraten läßt.

## § 8. Beispiele: physikalisch gegebene Begriffe.

Um das Vorstehende zu erläutern, wollen wir an einigen Beispielen das kritische Verfahren zeigen, das nötig ist, um die implizite Definition eines Begriffs oder eines Systems von Begriffen zu erhalten.

Vor allem muß man *zwei Arten* unterscheiden, wie der *Begriff gegeben* sein kann:

1. entweder handelt es sich um Begriffe, die bestimmt sind, eine gewisse physikalische Wirklichkeit darzustellen;
2. oder aber es handelt sich um solche, die in ihrer psychischen Realität betrachtet werden, ganz abgesehen von irgendeinem äußeren Gegenstand, der durch sie dargestellt werden soll.

Der erste Fall tritt bei den physikomathematischen Theorien ein, deren Begriffe implizite durch *Gleichungen* zwischen Größen definiert werden, die man durch geeignete *Messungen* erhält; die Größen sind hier die undefinierten Objekte und die Gleichungen sind die Postulate, die die zwischen ihnen stattfindenden logischen Beziehungen ausdrücken; die Messung ist das Deutungs-

mittel, das dazu dient, der deduktiven Theorie ihre physikalische Bedeutung zuzuordnen.

Nun verändert die an der Hand der Erfahrung fortschreitende Entwickelung der Theorie die erwähnten Gleichungen und *verbessert* so allmählich die implizite Definition, die infolgedessen *in jedem Augenblick die höchste Synthese der erhaltenen Resultate ausdrückt.*

Die Entwickelung einer Theorie, die Vergleichung der Messungen, die die Fundamentalgrößen liefern, verändern zuweilen indirekt die Gleichungen, indem sie die konkrete Bedeutung der durch sie verknüpften Größen verändern.

Ein einfacheres Beispiel für diesen Umstand liefert die Entwickelung des Begriffs der *Temperatur*, die man schematisch als die Aufeinanderfolge von drei Definitionen bezeichnen kann, die experimentellen Kenntnissen von steigender Genauigkeit entsprechen.

1. Erkenntnis, daß die Wärmeempfindungen mit der Ausdehnung der Körper verbunden sind, und demgemäß Definition des Temperaturzuwachses als proportional dem des Volumens.
2. Erkenntnis, daß die Ausdehnungen der Körper zwischen *gleichen Temperaturen* nicht immer proportional sind, daher *Relativität* der Temperatur in bezug auf das *Thermometer*. Abgrenzung der *Gasthermometer*, die merklich übereinstimmen, zur Definition der „Temperatur".
3. Erkenntnis der Nichtübereinstimmung der Gasthermometer bei genauerer Messung und infolgedessen Konstruktion eines idealen Maßstabes, der der Gesamtheit der Thermometer entspricht, d. h. der *absoluten Temperatur* (vgl. Kap. VI).

## § 9. Psychologisch gegebene Begriffe.

Die Analyse eines Begriffes, die dazu dient, eine implizite Definition von ihm zu liefern, stellt sich in



anderem Lichte dar, wenn es sich darum handelt, einen Begriff zu bestimmen oder zu rekonstruieren, der in irgendeiner Weise in der Entwickelung der Gedanken entstanden ist und der als dessen Gegenstand angesehen wird. Wir befinden uns dann in dem Gebiete der *psychologischen* oder *historischen Kritik.*

Unter diese Art Kritik fällt wenigstens teilweise die Untersuchung des Inhaltes eines juristischen Begriffs in einem System des positiven Rechtes.

Wenn man sich z. B. das Problem stellt, in diesem Sinne den Begriff des *Eigentums* nach unserem geltenden Rechte zu erklären, so kann man der Kritik zwei verschiedene Aufgaben zuweisen: entweder

1. die einfache Deutung des ausdrücklichen Willens des Gesetzgebers, oder
2. zu untersuchen, welcher Begriff des Rechtsinstituts aus dem Komplex aller tatsächlichen Bedingungen hervorgeht, die ein Recht implizite enthalten.

Im ersten Falle handelt es sich eigentlich darum, einen psychologisch gegebenen Begriff zu definieren; im zweiten hat das Problem Anteil an den beiden Gesichtspunkten der Untersuchung, an der psychologischen und an der realistischen, insofern gewisse tatsächliche soziale Verhältnisse mit der Darstellung verglichen werden, die im Gesetz und in der Rechtswissenschaft von ihnen gegeben wird.

Wenn wir einen Augenblick bei dem oben erwähnten Problem verweilen, so zeigt sich, auch wenn wir es in seiner beschränkteren Bedeutung nehmen, dennoch sofort die eigentümliche Schwierigkeit derartiger Fragen.

Vor allem ist klar, daß der Art. 436 des bürgerlichen Gesetzbuches[1]) in keiner Weise als eine Definition des

1) „Das Eigentum ist das Recht der uneingeschränktesten Nutznießung der Sachen und Verfügung über dieselben, sofern kein durch Gesetze oder Verfügungen verbotener Gebrauch von ihnen gemacht wird."

Eigentums betrachtet werden kann, einerseits weil er dessen Begriff auf den allgemeinen des „Rechtes" zurückführt, anderseits weil er auf vollkommenes (uneingeschränktes) Eigentum geht und daher nicht für die Begrenzungen und Verringerungen ausreicht, die das Recht in den verschiedenen Fällen erfährt.

Anderseits kann, wie wir schon bemerkten, eine wirkliche logische Definition des Eigentums überhaupt nicht gegeben werden, da sie notwendig auf Begriffen beruhen müßte, die dem zu erklärenden äquivalent sind; eher kann man verlangen, daß in geeigneten Ausdrücken die „dem Eigentümer durch das Gesetz garantierten willkürlichen an der Sache vorzunehmenden Handlungen" festgelegt werden.

Bei dieser Festlegung wäre folgendes zu berücksichtigen:

1. die physische Natur der Sache, die Gegenstand des Eigentums ist (bewegliche und unbewegliche Sachen, immaterielle Sachen, wie Kredite, Urheberrechte, Patente usw.);
2. der Rechtszustand der Sache selbst, d. h. die an sie geknüpften realen Rechte;
3. die Beziehung des Eigentümers zur Sache (ob er in ihrem Besitz ist, usw.).

## § 10. Das logische Verfahren: die Problemstellung.

In den vorhergehenden Entwickelungen haben wir erst die formale Logik in einem psychologischen Sinne charakterisiert und sodann ihre Möglichkeit aus der Entwickelung der Mathematik abgeleitet. Weiter sind wir hierdurch dazu geführt worden, eine Kritik der Definition anzustellen, und haben insonderheit in der impliziten Definition der Begriffe das logisch Erste erkannt; einige auf die Art ihrer Aufstellung bezüglichen Fragen haben uns in den beiden letzten Paragraphen beschäftigt, deren Inhalt aus dem Gebiete der reinen Logik herausfällt.



Wie auch immer die wissenschaftliche Kritik zu einer impliziten Definition der einer deduktiven Theorie zugrunde liegenden Begriffe gelangt sein mag, für die logische Entwickelung dieser Theorie kommt nur in Betracht, daß folgendes als *gegeben angesehen wird:*

1. Gegenstände,
2. logische Beziehungen zwischen ihnen, die einigen Bedingungen unterworfen sind, die wir später einer Kritik unterziehen müssen.

Und die Entwickelung besteht aus:

1. der Schaffung neuer Gegenstände durch (Nominal-) Definitionen,
2. Deduktionen (im weiteren Sinne des Wortes), die zu den ursprünglichen neue Beziehungen zwischen den gegebenen und den neugebildeten Gegenständen hinzufügen.

Jeder gibt die Wichtigkeit der Deduktion zu, aber die Aufgabe der logischen (expliziten) Definition wird nicht in gleichem Maße anerkannt; schon die Bezeichnung „nominal" läßt an die einfache Einführung eines Namens, also an eine Wortersparnis für die Verfasser von Lehrbüchern denken. Es muß demnach hervorgehoben werden, daß der Name oder die verkürzte Ausdrucksweise einen konstruktiven Gedankenvorgang besiegeln, in dem der eigentliche Wert der Definition beruht.

So könnte man z. B. in einer geometrischen Abhandlung die Wörter „Polygon", „Polyeder", „Kreis", „Kugel", durch längere Ausdrucksweisen ersetzen, in denen nur von den Grundelementen Punkt, Strecke, Ebene, Entfernung, die in die Definitionen der genannten Figuren eingehen, die Rede wäre; dennoch

müßte man weiter gewisse Gruppen von Worten oder Zeichen festhalten, die gewissen Verbindungsweisen der Elemente entsprechen; und der ausdrückliche Vorsatz, sich mit diesen Gruppen, die sich in der Entwickelung der Wissenschaft gebildet haben, zu beschäftigen, ist mit der Definition, um die es sich handelt, gleichbedeutend.

Ähnliche Beispiele kann man aus der Physik anführen, wo einige Begriffe wie der der „Potentialfunktion", obgleich durch andere bereits gegebene nominal definierbar doch eine Errungenschaft von allerhöchster Bedeutung bilden.

Die Definitionen und Deduktionen, aus denen die Entwickelung jeder Theorie besteht, müssen nach unserer Betrachtungsweise als *psychische Operationen* betrachtet werden; ihre Gesamtheit wird als *„logischer Prozeß"* bezeichnet.

Es entsteht also die Aufgabe, diesen Prozeß *psychologisch zu erklären.*

Zu diesem Ende werden wir vor allem die *logischen Grundoperationen*, die den Definitionen entsprechen, untersuchen; einen Augenblick wollen wir dabei verweilen, zu zeigen, daß sie die Bildung der *rein logischen Begriffe* erlauben, und daß ihre Klassifikation sich in einer Untersuchung der *Grundtypen der Definition* widerspiegelt. Wir werden weiter sehen, wie durch diese Operationen nicht nur Begriffe *gebildet* werden, sondern auch gewisse *logische Beziehungen* zwischen diesen, so daß wir uns vor die Frage gestellt sehen, ob diejenigen *logischen Beziehungen*, die wir als *gegeben* ansehen (z. B. die Postulate einer Theorie) als Erzeugnisse eines ähnlichen Prozesses aufgefaßt werden können: diese Frage werden wir positiv beantworten können, sofern man den Begriff dieses Prozesses in geeigneter Weise erweitert in bezug auf die *Annahme* von Gegenständen des Denkens.



Endlich werden wir die *Bedingungen der Möglichkeit* dieses Prozesses einer Prüfung unterwerfen und die *Grundsätze der Logik* behandeln sowohl mit Rücksicht auf die als Gegenstände des Gedankens genommenen Objekte als auch auf die Begriffe, und wir werden die sich daran knüpfenden Fragen der *Vereinbarkeit* der Postulate diskutieren.

## § 11. Die logischen Operationen.

Wir betrachten als *gegeben* Gegenstände des Denkens, die wir als Elemente oder Individuen ansehen, die imstande sind, gewisse Verbindungen einzugehen, die aber gewissen *Bedingungen der Unveränderlichkeit*, die durch die logischen Grundsätze ausgedrückt werden, genügen.

Die psychologischen *Verbindungen* und *Trennungen*, die in das Gebiet des klaren Bewußtseins und des Willens fallen, bilden die *logischen Grundoperationen* und erlauben aus den gegebenen neue Gegenstände des Denkens zu bilden.

Man kann mehrere Gegenstände miteinander verbinden, indem man sie *nacheinander* oder *zugleich* vorstellt, und man gelangt so dazu

sie in eine *Reihe* zu *ordnen* (geordnete Gruppe)

oder

sie zu einer *Klasse* (Gruppe, Menge usw.) zu *vereinigen.*

Unter gewissen Bedingungen kann man mehrere Reihen in eine *zusammengesetzte Reihe* ordnen (Reihe von Reihen).

Und immer kann man irgend mehrere Klassen zu einer *zusammengesetzten Klasse* vereinigen (Klasse von Klassen).

Durch Ordnen zweier Klassen oder durch Konjunktion zweier Reihen gelingt es unter gewissen Be-

dingungen, die Elemente einer Klasse vermöge einer *Zuordnung* auf die der anderen zu *beziehen*, usw.

Außer der *Umkehrung* der Ordnung einer Reihe oder einer Zuordnung kann man als den vorstehenden entgegengesetzt eigentlich trennende Prozesse betrachten, die dazu führen,

die Klassen, die eine zusammengesetzte Klasse bilden, *zum Durchschnitt zu bringen*, d. h. die Gesamtheit der ihnen gemeinsamen Elemente (Durchschnitt), sofern sie existiert, zu bestimmen,

oder dazu,

von den Unterschieden der Elemente einer Klasse zu *abstrahieren*, d. h. ein neues Objekt, den *abstrakten Begriff* „Element der Klasse" zu bilden, der durch irgendeines ihrer Elemente repräsentiert werden kann, das als jedem anderen *substituierbar (gleich)* gedacht wird.

## § 12. Rein logische Begriffe.

Das Resultat der logischen Operationen ist die Bildung neuer Denkobjekte aus den alten.

Rufen wir uns alle vollzogenen Vereinigungen ins Gedächtnis zurück und vereinigen wir die so erhaltenen Klassen: durch fortgesetzte Abstraktion erheben wir uns dann zu dem allgemeinen Begriff der *Klasse* oder *Menge*.

In ähnlicher Weise kann man die abstrakten Begriffe der *Reihe*, der *Zuordnung*, des *Durchschnitts von Klassen* usw. bilden; da diese rein durch Ausübung der logischen Tätigkeit, wenn diese sich auf wirklich gedachte Objekte bezieht, entstehen, so verdienen sie den Namen *rein logischer Begriffe*.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß die Bildung dieser Begriffe, da sie lediglich die wirklich gedachten Dinge (deren Zahl endlich ist) benutzt, keinerlei transzendentes



Verfahren einschließt. Lediglich in bezug auf die Supposition wird es später nötig sein, die Bedeutung der erwähnten Begriffe zu erweitern.

## § 13. Elementare Typen der Definition.

Verweilen wir einmal dabei, zuzusehen, wie die Einteilung der logischen Operationen sich in einer Unterscheidung der Grunddefinitionstypen, die den rein logischen Begriffen untergeordnet sind, widerspiegelt.

Wir werden besonders drei Grundtypen betrachten: die *Definitionen durch Vereinigung, durch Durchschnittsbildung und durch Abstraktion*.

Die Definition der ersten Art ist diejenige, durch die ein Gegenstand als die *Gesamtheit* mehrerer gegebener Elemente oder als die aus mehreren geordneten Gegenständen gebildete *Reihe* eingeführt wird.

Beispiele: der *Umfang* eines Polygons ist die „Gesamtheit seiner Seiten"; eine *Menge* ist „die Gesamtheit der Menschen, die an einem Orte vereinigt sind", usw. Eine *Baumreihe*, eine *Folge* von Ereignissen sind Reihen von Elementen, die in einer bestimmten Reihenfolge betrachtet werden.

Die Definition durch Durchschnittsbildung ist im wesentlichen jene scholastische, von der es heißt: „definitio fit per genus proximum et differentiam specificam." Sie besteht in der Bestimmung einer Klasse von Dingen als gemeinsamem Teil zweier (oder mehrerer) gegebener Klassen.

Nehmen wir als Beispiel aus Fiorentino die Definition der Erbschaft, die Cicero in der Topica gibt: Erbschaft ist ein kraft eines Rechtes durch jemandes Tod erlangtes Vermögen.

Hier werden zwei Klassen von Vermögen als gegeben betrachtet, diejenigen, die auf irgendeine Weise recht-

lich erworben sind, und diejenigen, die irgendwie durch den Tod jemandes erlangt sind; die Erbschaften sind die diesen beiden Klassen gemeinsamen logischen Individuen.

Andere Beispiele:

in der Zoologie bestehen die Definitionen der verschiedenen Tierarten in der Bestimmung einer jeden als Durchschnitt von größeren (existierenden oder denkbaren) Klassen, die gewisse Merkmale aufweisen;

in der Geometrie wird die Fläche eines Dreiecks definiert als der gemeinsame Teil der durch die Seiten begrenzten und die gegenüberliegenden Spitzen enthaltenden Halbebenen usw.

Wichtiger und weniger bekannt ist die Definition durch Abstraktion, deren Bedeutung von GRASSMANN, HELMHOLTZ, MACH, MAXWELL und bei uns von PEANO und von VAILATI ins Licht gesetzt worden ist. Sie beruht auf Folgendem:

Wenn eine Klasse von Dingen gegeben ist, die (unter dem besonderen Gesichtspunkt, unter dem sie verbunden sind) als *gleich* betrachtet werden, so ist ohne weiteres der abstrakte Begriff eines Individuums der Klasse definiert.

Dies ist im wesentlichen das implizite Verfahren, durch das in der Sprache alle abstrakten Ausdrücke definiert werden.

Die Definition, die EUKLID von dem Verhältnis zweier Größen gibt, ist das älteste uns bekannte Beispiel einer Definition dieser Art. Sie besteht in der Erklärung, wann zwei Paare von Größen das gleiche Verhältnis haben, d. h. einander proportional sind. Also kann man sagen: „Das Verhältnis zweier (homogener) Größen ist der abstrakte Begriff ihres Paares, insofern es jedem anderen Paare von proportionalen Größen gleich angesehen wird."



Wenn eine Klasse von parallelen Geraden gegeben ist, und man betrachtet sie als gleich, d. h. durcheinander ersetzbar (in bezug auf die Richtung), so ist dadurch der abstrakte Begriff ihrer *Richtung* definiert. So kann man sagen: Richtung ist der abstrakte Begriff der Geraden, sofern sie als durch eine ihrer Parallelen ersetzbar angesehen wird.

In der Wirtschaftslehre wird der Begriff des *Wertes* in ähnlicher Weise eingeführt. Wenn eine Klasse von auf einem gewissen Markte gegeneinander eintauschbaren Waren gegeben ist, die als gleichwertig angesehen werden, so ist dadurch ihr Wert durch Abstraktion definiert; also ist der Wert einer Ware (auf einem Markte) der abstrakte Begriff derselben, sofern sie allen Waren, die gegen sie eingetauscht werden können, gleich geachtet wird.

Wir schließen diese Bemerkungen, indem wir auf den Unterschied aufmerksam machen, der zwischen solchen Definitionen besteht, die stets mögliche Operationen, wie die Vereinigung und die Abstraktion, ausdrücken und solchen, (wie die durch Durchschnittsbildung) deren Möglichkeit der Bedingung unterworfen ist, daß die zum Durchschnitt zu bringenden Klassen gemeinsame Elemente besitzen.

## § 14. Konstruierte logische Beziehungen und Axiome.

Wenn mehrere gegebene Dinge in verschiedener Weise in Klassen vereinigt oder in Reihen geordnet werden usw., so denken wir zwischen den Dingen selbst und den konstruierten Klassen oder Reihen gewisse *logische Beziehungen*, die die vollzogenen Operationen ausdrücken. Wenn wir z. B. aus den drei Dingen $a$, $b$, $c$ die Klasse

$$D = (a, b, c)$$

bilden, so sagen wir, daß

*a Element von D* ist,

oder daß

*a in D* ist, usw.

und die so ausgedrückte Beziehung sagt aus, daß *D* eine Klasse ist, die durch Vereinigung von *a* mit anderen Elementen gebildet ist.

Ebenso nehmen wir zwischen den Klassen

$$A = (b, c, d) \qquad B = (a, c, d)$$

eine Beziehung wahr, die in den Worten ausgedrückt wird: die Klassen *A* und *B* haben einige Elemente gemein.

Allgemein können wir sagen: *die vollzogenen logischen Operationen finden ihren Ausdruck in gewissen Beziehungen, die wir uns zwischen den gegebenen und den konstruierten Gegenständen stattfindend denken.*

Wenn man sich die Elemente und die aus ihnen zusammengesetzten Klassen (Reihen usw.) zusammen vorstellt, so weisen ihre Beziehungen immer dieselben Kennzeichen der Unveränderlichkeit auf, von denen wir schon sahen, daß sie den Gegenständen des Denkens zukommen. Aus diesem Grunde können die erwähnten Beziehungen selbst durch die Grundoperationen zusammengesetzt werden; und speziell die Vereinigung mehrerer Beziehungen zu einem *System* und der Durchschnitt mehrerer Systeme von Beziehungen werden ihrerseits als *neue Beziehungen* zwischen den gegebenen und den konstruierten Gegenständen aufgefaßt.

Nun kann man hier die *Äquivalenz* (Gleichheit) zweier Beziehungen oder Systeme von Beziehungen definieren; äquivalent sind zwei Systeme, die die gleiche Operation ausdrücken; z. B. die beiden Systeme

*a* gehört zu *D*, *b* gehört zu *D*

und

die Klasse (*a*, *b*) gehört zu *D*,



die beide aussagen, daß die Klasse *D* durch Vereinigung von *a* und *b* (eventuell) mit anderen Gegenständen gebildet worden ist.

Die Systeme von Beziehungen handhaben, indem man sie vereinigt, zum Durchschnitt bringt und andere äquivalente Systeme an ihre Stelle setzt, heißt *deduzieren.*

Das Urteil über die Äquivalenz der logischen Beziehungen und folglich die *Regeln der Deduktion* beruhen auf der Erkenntnis gewisser *Gesetze der Grundoperationen*, die sich in gewissen Beziehungen zwischen den rein logischen Begriffen ausdrücken (§ 12) und die man *Axiome* nennt.

Beispiele:

1. Die *assoziative Eigenschaft* der Klassen bildet das Grundgesetz der Vereinigung: eine zusammengesetzte Klasse wird auf dieselbe Weise erhalten, wenn man die Teile auf einmal vereinigt.

2. Die *transitive Eigenschaft der Gleichheit* (nach der Benennung der mathematischen Logiker) drückt das Grundgesetz des Abstrahierens aus, d. h. die Ersetzbarkeit eines Elementes einer Klasse durch ein anderes in bezug auf den allgemeinen Begriff derselben.

Es ist wichtig zu bemerken, daß dieses Axiom, das gewöhnlich so ausgesprochen wird: „zwei Dinge, die einem dritten gleich sind, sind es auch untereinander", nicht mit dem Grundsatz der Identität zu verwechseln ist (§ 17).

3. Das *kommutative Gesetz* der Vereinigung ist ein Grundgesetz der Vergleichung von Vereinigung, Ordnung und Abstraktion, d. h. „wenn mehrere Objekte auf die verschiedenen möglichen Arten in Reihen geordnet werden, so ist der abstrakte Begriff der aus diesen Reihen zusammengesetzten Klasse die Gesamtheit der gegebenen Gegenstände" usw.

## § 15. Aussagen.

Die gewöhnlichste Form der logischen Beziehungen, die die grammatikalische Logik als typisch behandelt, ist das *Urteil*. Deshalb lohnt es, einen Augenblick bei der Untersuchung der dadurch ausgedrückten Operation zu verweilen.

Durch ein *singuläres Urteil*

„*a* ist *b*",

wo das Subjekt *a* ein bestimmtes Individuum bezeichnet, kann man ausdrücken, daß *b* der abstrakte Begriff einer Klasse ist, die aus der *Vereinigung* von *a* mit anderen Individuen entsteht. Z. B. bedeutet „DANTE ist ein Dichter", daß „Dichter" der abstrakte Name der Individuen einer Klasse ist, die DANTE enthält.

Es ist klar, daß in ähnlicher Weise die Vereinigung der Elemente einer Klasse (*a*) mit anderen Elementen zu einer größeren Klasse (*b*), aus der der abstrakte Begriff *b* entsteht, durch das *allgemeine Urteil*

„jedes *a* ist *b*"

ausgedrückt werden kann.

Dagegen kann man durch das *partikuläre Urteil*

„einige *a* sind *b*",

dessen Subjekt nicht bestimmt ist, ausdrücken, daß die Klassen (*a*) und (*b*) gemeinsame Elemente haben; z. B. bedeutet das Urteil: „einige Säugetiere sind zweibeinig", daß die Klassen der Säugetiere und der Zweibeiner sich überdecken.

## § 16. Gegebene logische Beziehungen.

Wir wollen versuchen, die Ergebnisse der vorstehenden Kritik zusammenzufassen.

Wenn man irgendwelche Gegenstände des Denkens betrachtet, sagen wir *a*, *b*, *c*, *d*, und mit diesen operiert



(sie vereinigt usw.), so finden diese Operationen ihren Ausdruck in einem System von Beziehungen, die zwischen den Klassen, Reihen usw., sagen wir allgemein zwischen den Gegenständen und den aus ihnen gebildeten Begriffen statthaben; und diese Beziehungen wiederum werden gewöhnlich durch Urteile ausgedrückt. Das erwähnte System gestattet als Ganzes genommen die vollzogenen Operationen zu erkennen; aber man entnimmt ihm nur einige Beziehungen, diese drücken *zum Teil* die Bedingungen der Operationen aus. Nun nehmen wir neben den konstruierten logischen Beziehungen auch solche als *gegeben* an (als Hypothesen oder Umformungen von solchen), und diese haben eine äußerlich ähnliche Form, z. B. die von Urteilen. Es erhebt sich hier die *umgekehrte Frage*, wie oben, nämlich, „ob in jedem Falle die gegebenen logischen Beziehungen zwischen Gegenständen des Denkens (z. B. zwischen Begriffen) gedeutet werden können als Bedingungen eines assoziativen Prozesses, durch den jene Gegenstände aus Elementen hervorgehen, die in geeigneter Weise bestimmt werden".

Wenn man dieser Frage näher tritt, so verwickelt man sich in eine fundamentale Schwierigkeit: wenn man sich jedes System von Begriffen aus gegebenen Elementen zusammengesetzt denkt, so kommt es zuweilen vor, daß *die Zahl dieser Elemente als unendlich vorausgesetzt werden muß*.

Ein einfaches Beispiel bieten die ersten Postulate der Geraden und der Ebene, durch welche man diese Gebilde als Klassen von Punkten definieren will, die in der Weise gebildet sind, daß sie gewissen Bedingungen genügen.[1])

Wie können wir nun aber voraussetzen, daß *unendlich viele Gegenstände* unserem Denken *gegeben* sind?

---

1) Vgl. ENRIQUES-FANO — „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. IX (1894)".

Solange der Sinn des Wortes „gegeben" der ist, daß der gegebene Gegenstand wirklich gedacht wird, ist es klar, daß ohne transzendenten Gedankenprozeß unendlich viele Gegenstände nicht als gegeben angenommen werden können.

Die Sache erhält ein anderes Aussehen, wenn man neben den *gedachten* die *denkbaren* Gegenstände betrachtet, die dann nicht eigentlich als *gegeben*, sondern als *vorausgesetzt* betrachtet werden.

Man hat ein gewisses System von Begriffen, zwischen denen gewisse logische Beziehungen stattfinden; setzt man nun voraus, daß die Begriffe selbst durch logische Operationen aus gewissen Elementen gebildet werden können, so stellen sie sich als Reihen, Klassen, Zuordnungen usw. dar.

Wenn die Elemente unserer Begriffe anfänglich einmal gedacht worden sind, so lehren uns, wie gesagt, die Beziehungen zwischen eben den Begriffen ihren Entstehungsprozeß *teilweise* zu rekonstruieren. Aber wenn man die Hypothese eines anfänglichen Geisteszustandes, in dem diese Elemente gedacht wurden, fallen läßt, so behält doch der angenommene Prozeß der Assoziation der Begriffe eine Bedeutung; die Reihen oder die Klassen (die jetzt auch unendlich viele Elemente enthalten können) bekommen den Wert von *Methoden a priori die Ordnung oder Vereinigung der angenommenen Gegenstände des Denkens zu bestimmen*, die sie einnehmen, sobald sie wirklich *gedacht* werden. So haben wir z. B. durch den Begriff einer (gerichteten) Linie $L$ als Reihe von Punkten die Möglichkeit, die Punkte zu ordnen, die etwa auf ihr gedacht werden; wenn man daher auf $L$ drei Punkte $A$, $B$, $C$ betrachtet, so ist eine Art, sie in eine Reihe zu ordnen, bestimmt, die uns die Wahl einer der sechs möglichen Permutationen $ABC$, $ACB$, $BAC$, $BCA$, $CAB$, $CBA$ ermöglicht, nämlich derjenigen,



in der sie in der angenommenen Reihe $L$ aufeinander folgen.

## § 17. Bedingungen der Möglichkeit der Begriffe: logische Grundsätze.

Das, was wir über die Deutung der logischen Beziehungen der Begriffe und über die auf sie gegründete Annahme von Gedankendingen gesagt haben, gilt unter gewissen Bedingungen der *Möglichkeit der Begriffe*, die in den vorstehenden Betrachtungen stillschweigend als erfüllt angenommen werden.

Es ist von Wichtigkeit, unter diesem Gesichtspunkt die Bedeutung der psychologischen Supposition zu erklären. Zu diesem Ende wollen wir zunächst an die Bemerkung erinnern, daß die als Elemente des logischen Prozesses genommenen Gegenstände Invarianten in bezug auf die Bewegung des Gedankens sind und speziell in bezug auf die assoziativen und dissoziativen Prozesse.

Die Bedingungen der Invarianz werden durch die *logischen Grundsätze* ausgedrückt, die sich auf die drei *Grundvorstellungen: vor* und *nach* (zeitliche Ordnung), *identisch*, *verschieden*, die jedem Gedanken zugrunde liegen, beziehen.

Es gelten bekanntlich die drei folgenden Grundsätze:

1. der Grundsatz der *Identität*,
2. der Grundsatz des *Widerspruchs*,
3. der Grundsatz vom ausgeschlossenen Dritten.

Das erste Prinzip sagt aus, daß der Gegenstand als identisch *wiedererkannt* werden kann in verschiedenen aufeinander folgenden Vorstellungen. Das zweite schließt aus, daß zwei Gegenstände, die in einer gegebenen Vorstellung unterschieden werden, in irgendeiner späteren als identisch gedacht werden. Und der dritte Satz schließlich sagt aus, daß zwischen zwei gleichzeitig vor-

gestellten Gegenständen immer entweder die Beziehung der Identität oder die der Verschiedenheit stattfindet.

In ihrer Gesamtheit erteilen diese Grundsätze den Gegenständen des Denkens eine von der Zeit unabhängige psychische Realität und sind infolgedessen die Voraussetzung einer symbolischen Logik, die darauf ausgeht, den *genetischen* Vorgang der logischen Operationen als ein System von *aktualen Beziehungen* darzustellen.

Daher fehlt die Möglichkeit, diese Prinzipien symbolisch darzustellen, da sie nicht fundamentale Urteile ausdrücken, die der Denker berücksichtigt, indem er sie zu den Postulaten der einzelnen Theorien hinzufügt, sondern, wie gesagt, die *notwendigen Bedingungen*, denen die *Gegenstände* des logischen Prozesses genügen müssen. Die Schreibweise $a = a$ bezeichnet keineswegs das Prinzip der Identität, sondern ein bedeutungsloses tautologisches Urteil!

Die Bedingungen der Invarianz, die durch die logischen Grundsätze ausgedrückt werden, werden für jeden Gegenstand, der als solcher gedacht wird, *willkürlich festgesetzt;* einen Gegenstand denken heißt geradezu ihn als wiedererkennbar bestimmen, d. h. den Ablauf der auf eine Abänderung der Vorstellungen gerichteten unbewußten Assoziationen verhindern.

Die Tatsache, daß die einmal identifizierten Gegenstände des Denkens sich gegenüber den logischen Operationen invariant verhalten, folgt aus deren Gesetzen, die in den Axiomen ausgedrückt sind. Die konstruierten logischen Beziehungen bedeuten letzten Endes, daß *bestimmte Operationen zur Wiedererkennung bestimmter Identitäten oder bestimmter Verschiedenheiten führen.*

Die eben angeführte Tatsache kann man auch so ausdrücken: „die logischen Beziehungen, die von gedachten Gegenständen aus konstruiert werden, sind a



priori *vereinbar*", oder: „die konstruktiven Operationen sind *möglich*, ohne jemals zu einem *Widerspruch* zu führen."

Wenn es sich nun um nicht wirklich gedachte Gegenstände handelt, sondern um solche, die als Elemente eines Begriffs vorausgesetzt werden, so schränkt der Wille, der diesen als gegeben setzt, in verschiedener Weise die weiteren Bestimmungen ein, durch welche diese auf der Bühne des Gedankens noch nicht erschienenen Gegenstände identifiziert und unterschieden werden sollen. Und die *Vereinbarkeit* der Einschränkungen, welche durch die den Begriff definierenden Beziehungen ausgedrückt werden, oder die Vereinbarkeit dieser Beziehungen bildet eine Bedingung der Möglichkeit des Entstehungsprozesses dieser Beziehungen.

Die Bedeutung dieser Supposition ist also die, daß die deduktive Entwickelung der gegebenen Beziehungen niemals zu einem *Widerspruch* führt, denn ein solcher würde die Nichtinvarianz irgendeines der angenommenen Objekte in bezug auf den geforderten assoziativen Prozeß und folglich die Unmöglichkeit, jenes als Element von diesem zu denken, zeigen.

Demnach gilt folgender Satz:

*Die logischen Grundsätze drücken nicht nur die Grundbedingungen der Invarianz der gedachten Gegenstände in bezug auf die assoziativen Operationen aus, sondern auch die Bedingungen der Möglichkeit der Begriffe, d. h. die Möglichkeit, sich die logischen Beziehungen zwischen diesen als aus angenommenen Elementen aufgebaut vorzustellen.*

## § 18. Vereinbarkeit der Postulate einer Theorie.

Wie kann man sich versichern, daß gegebene Beziehungen, die einen Begriff oder ein System von solchen definieren, vereinbar sind?

Dies ist das Problem, das sich am Anfang einer jeden deduktiven Theorie einstellt, die auf einem System von Postulaten beruht. Und die Schwierigkeit ist besonders in dem Falle wesentlich, in dem die Begriffe nicht als aus einer endlichen Anzahl von Elementen entstanden dargestellt werden können.

Man kann die erforderliche Entscheidung begründen:

1. auf die *Erfahrung*, und zwar
   a) die physikalische oder
   b) die psychologische;
2. auf die *Anschauung* der Begriffe;
3. auf einen *logischen Beweis*.

Wir wollen die Bedeutung und den Wert dieser drei Begründungsarten prüfen.

1a. Obgleich unter einen möglichen Begriff nicht notwendig ein wirkliches Ding zu fallen braucht, so wird dagegen vorausgesetzt, daß der Begriff von dem, was wirklich ist, möglich sei; sagt man doch geradezu in diesem Sinne, daß das Wirkliche nicht widerspruchsvoll sein kann. Auf Grund dieses Prinzips beweist man die Widerspruchslosigkeit eines Systems von (hypothetischen) Beziehungen, indem man auf Grund einer *beliebigen Deutung* der Begriffe durch Erfahrung zeigt, daß das System einer Wirklichkeit entspricht.

Der Wert dieser Begründung würde darauf beruhen, daß die realen Invarianten (Kap. II) als Gegenstände des Denkens vorgestellt werden können.

Es ist aber hierzu einiges zu bemerken.

Vor allem ist die Unveränderlichkeit der wirklichen Dinge nur eine angenäherte, und folglich die Konstruktion der entsprechenden Gedankenobjekte nicht völlig bestimmt, so daß man wenigstens zwischen *qualitativen* und *quantitativen Versuchen* unterscheiden müßte (vgl. den zweiten Teil dieses Kapitels).



Ferner genügen die nur in endlicher Zahl wirklich ausführbaren Experimente nicht als Beweis der Realität; es ist, wie wir sehen werden, eine Deutung derselben notwendig, und diese hängt von einer *Darstellung durch Begriffe* ab. Unter diesem Gesichtspunkt kann der Versuch eines experimentellen (physikalischen) Beweises für die logische Widerspruchslosigkeit eines Systems von Hypothesen als Circulus vitiosus erscheinen, da die Widerspruchslosigkeit im allgemeinen eine notwendige Bedingung der Bestätigung ist; immerhin bleibt bestehen, daß das Nichterfülltsein dieser Bedingung den Erfolg der hinreichend weit verfolgten Bestätigungen verhindern wird. Außerdem führt der Versuch eines physikalischen Beweises für die Vereinbarkeit gewisser Beziehungen zu einer deduktiven Weiterentwickelung derselben und folglich zur Ausführung der Prüfung 1b.

1b. Diese Probe besteht nämlich gerade in der Erkenntnis, daß eine *hinreichend* weitgetriebene deduktive Weiterentwickelung in verschiedenen Richtungen nicht zu Widersprüchen geführt hat.

Trotz der Fehlerquellen, denen die Anwendung dieses Kriteriums ausgesetzt ist, hat es doch große Beweiskraft, wenn dabei reichlich eine vergleichende Kritik verwandt wird, die die von der Geschichte der Wissenschaft gegebenen Lehren berücksichtigt.

2. Die Berufung auf die Anschauung garantiert, obgleich sie auf Schwierigkeiten der Deutung stößt, die wenig kritische Köpfe zu Irrtümern führt, dennoch die Möglichkeit der Begriffe, weil sie Assoziationen und Abstraktionen erfordert, die zu einer Beseitigung des in den ausgearbeiteten Hypothesen etwa vorhandenen Widerspruchs beitragen. In diesem Sinne stellt die Anschauung eine reiche psychologische Erfahrung dar.

3. Der logische Beweis bietet das einzige *streng sichere* Mittel dar, hat aber nur einen *relativen* Wert.

Es handelt sich darum, zu erkennen, daß, wenn gewisse Begriffe als möglich gegeben sind, daraus logisch andere abgeleitet werden können, woraus sich ergibt, daß aus der vorausgesetzten Vereinbarkeit derjenigen Beziehungen, die die ersten definieren, diejenige der die zweiten definierenden folgt.

Wir wollen nunmehr diese Betrachtungen vergleichen mit der historischen Entwickelung der Probleme, die uns darauf gebracht haben, und mit den sich auf sie beziehenden Bewertungen.

Die Frage der Widerspruchslosigkeit eines Systems von Postulaten trat in der Geometrie auf im Zusammenhang mit der Aufstellung der nichteuklidischen Theorien (vgl. Kap. IV). Die Begründer derselben gründeten zuerst ihre Überzeugung von der logischen Widerspruchslosigkeit ihrer Annahmen auf den Umstand, daß sie in einer ziemlich weit vorgeschrittenen Entwickelung nicht auf Widersprüche gestoßen waren.

Aber die Frage wurde erst definitiv entschieden durch den Beweis, daß die Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Annahmen eine Folge ist von derjenigen der Grundeigenschaften der ganzen Zahlen, die für die arithmetischen Operationen vorausgesetzt werden, oder derjenigen der Postulate der euklidischen Geometrie.

In den neuesten kritischen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie wird gleichermaßen auf diese beiden Gesichtspunkte zurückgegriffen; vor allem die deutsche Schule knüpft seit RIEMANN an die Arithmetik an, während die italienische arithmetrische Schule seit dem „Saggio„ BELTRAMIS die Frage der Widerspruchslosigkeit der Postulate durch Benutzung verschiedener konkreter Deutungen und vornehmlich solcher, welche die Anschauung des gewöhnlichen euklidischen Raums darbietet, behandelt hat.



Es ist klar, daß die (bewußt angestellte oder in der Anschauung der Begriffe enthaltene) psychologische Erfahrung die Widerspruchslosigkeit sowohl der Arithmetik als der euklidischen Geometrie garantiert; außerdem läßt sich durch Einführung der Koordinaten die Möglichkeit der einen auf die der anderen zurückführen; so daß unter diesem Gesichtspunkt die gelieferten Beweise äquivalent erscheinen. Vom physikalischen Standpunkt dagegen haben die Experimente, die das Stattfinden der in der Arithmetik enthaltenen Beziehungen beweisen, vor denen, die die Geometrie betreffen, den Vorzug, daß sie qualitativ sind, d. h. daß sie sich auf Beziehungen beziehen, die nur in unstetiger Weise variieren können.

Aber es gibt noch einen anderen Gesichtspunkt, unter dem die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik als die Mindestforderung erscheint, die gestellt werden muß, um die Möglichkeit der Begriffe zu behaupten.

## § 19. Die Grundlagen der Arithmetik.

Wir wollen hier kurz die Fragen erörtern, die sich auf die Grundlagen der Arithmetik und auf die Möglichkeit der dazu erforderlichen Annahmen beziehen. Wir müssen uns dazu die kritischen Untersuchungen von DEDEKIND, PEANO usw. gegenwärtig halten, aber besonders die von PEANO, die uns logisch und algorithmisch am vollkommensten erscheinen, die aber mit Absicht von den psychologischen und philosophischen Problemen absehen.

Das *Zählen* kann man auf eine *physikalische* Voraussetzung gründen. Man betrachtet als *gegeben* mehrere *Reihen* von Gegenständen

$$a,\ b,\ c\ldots$$
$$m,\ n,\ p\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

deren allgemeine Glieder bzw. mit $A$, $M$, ... bezeichnet werden sollen.

Für jede der Reihen wird vorausgesetzt, daß

1. jedes Element ein bestimmtes unmittelbar Folgendes hat;
2. jedes mit Ausnahme von einem *(dem ersten)*, das auf kein anderes folgt, ein bestimmtes unmittelbar Vorangehendes besitzt;
3. soll die folgende Eigenschaft stattfinden *(Prinzip der mathematischen Induktion)*[1]: wenn eine Klasse von Elementen mit jedem $A$ sein unmittelbar folgendes Element enthält, und wenn sie $a$ enthält, so enthält sie alle Elemente der Reihe $a, b, c, \ldots$ (analog für die anderen Reihen).

Wir können die folgenden Reihen bilden:

$$a, (ab), (abc) \ldots$$
$$m, (mn), (mnp) \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Indem wir die Elemente (Klassen), die sich in derselben Kolonne des obigen Schemas finden, zu einer (zusammengesetzten) Klasse vereinigen, definieren wir durch Abstraktion nacheinander die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

Die Entwickelung der arithmetischen Operationen läßt sich dann auf die logischen Axiome und auf die Postulate 1, 2, 3 gründen.

1) Man darf die *mathematische Induktion*, durch die man von $n$ auf $n+1$ schließt, nicht verwechseln mit der aristotelischen *vollständigen Induktion*, die im § 1 erwähnt wurde und durch die man für den abstrakten Begriff einer Klasse das erschließt, was für jeden der sie zusammensetzenden Gegenstände als bekannt angenommen wird. Die mathematische Induktion wurde viel später entdeckt; nach dem, was mir Vailati mitteilt, geht sie auf Maurolico (1550) zurück.



Die Aufgabe dieser Postulate und besonders des dritten, das zuerst PEANO als definierende Eigenschaft des Zahlsystems aufgefaßt hat, besteht in der Gewährleistung der widerspruchslosen Anwendbarkeit der erhaltenen Ableitungen auf die unendlich vielen Elemente und Beziehungen, die in dem allgemeinen Begriffe der (ganzen) Zahl enthalten sind.

Es ist nun für unseren Zweck besonders wichtig, zu bemerken, daß eine Reihe wie $a, b, c, \ldots$ außerhalb der physikalischen Erfahrung angenommen werden kann vermittelst gewisser *allgemeiner Bestimmungen*, die eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Denkakten involvieren. Seien z. B. zwei Gegenstände $a$, $\alpha$ gegeben, und man bilde den neuen Gegenstand

$$b \equiv (a, \alpha),$$

den man durch ihre Vereinigung erhält; in ähnlicher Weise bilde man

$$c \equiv (b, \alpha), \quad d \equiv (c, \alpha), \quad \ldots$$

Die Reihe

$$a, b, c \ldots,$$

die so psychologisch definiert ist, genügt den Bedingungen 1, 2, 3.

Auch auf Grund der reflexiven Eigenschaft des Gedankens gelingt es, eine ähnliche Reihe zu bilden:

$a, b \equiv$ Gedanke an $a$, $c \equiv$ Gedanke an $b$ usw.

Es sei bemerkt, daß die erste dieser Konstruktionen zu einem *dyadischen Zählsystem* führt, wobei allerdings die geordnete *Schreibweise* der Ziffern eine physikalische (geometrische) Voraussetzung erfordert.

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß die Grundvoraussetzung der Arithmetik außer auf eine physikalische auch auf eine psychologische Realität gegründet werden kann, d. h. auf die Tatsache, daß gewisse Denkakte unbegrenzt wiederholt werden können, indem man sie

allgemeinen Bestimmungen unterwirft, so daß Reihen entstehen, die den Bedingungen 1, 2, 3 genügen.

Da demnach die Arithmetik außer den Assoziationsgesetzen (Axiomen) nur eines psychologischen Postulates bedarf, so kann man sie in gewissem Sinne als einen Teil der Logik betrachten oder als eine Erweiterung derselben, in der die Axiome durch das *Prinzip der mathematischen Induktion* ergänzt werden, das als eine *Grundeigenschaft der psychologisch gebildeten Reihen* angesehen wird[1]).

## B. Die Anwendung der Logik.

### § 20. Fundamentale Probleme.

Nachdem wir die Probleme erörtert haben, die sich auf den logischen Teil des Erkenntnisprozesses in seiner vollkommensten subjektiven Form beziehen, wenden wir uns zur Betrachtung desselben Vorgangs in seinen Beziehungen zur Wirklichkeit. Vom Studium der reinen Logik gehen wir also über zu dem ihrer Anwendung.

Wir haben schon darauf hingewiesen, welche Aufgabe dem deduktiven Raisonnement in der Erkenntnis zufällt als *Instrument zur Umformung der Hypothesen*. Nunmehr muß diese Umformung näher untersucht

1) Die Frage der Vereinbarkeit der arithmetischen Postulate ist durch die Mitteilung D. HILBERTS auf den letzten Mathematikerkongressen (Paris 1900, Heidelberg 1904) auf die Tagesordnung gebracht worden. HILBERT versucht einen logischen Beweis; aber wir verstehen nicht recht, wie die Meinung des großen Mathematikers aufzufassen ist.

An die erwähnten Mitteilungen schließt sich eine polemische Schrift von A. PADOA an, der (ohne Unterschied der Experimente) den empiristischen Standpunkt vertritt; gegen die Ansichten dieses Autors sind teilweise die Bemerkungen unseres vorangehenden Paragraphen gerichtet.



und es müssen zwei Probleme beleuchtet werden, von denen das eine dem anderen untergeordnet ist und die die Bewertung der wissenschaftlichen Theorien betreffen.

1. Wenn einige über eine gewisse Gruppe von Tatsachen aufgestellten Hypothesen durch Raisonnement umgeformt werden, so wird als *einleuchtend* angenommen, daß das Erfülltsein der Voraussetzungen dasjenige der Folgerungen nach sich zieht: aus demselben Grunde wird die umgekehrte Annahme gemacht, wenn es sich um umkehrbare Schlüsse handelt, d. h. wenn die gegebenen und die umgeformten Hypothesen einander *logisch äquivalent* sind.

Eine derartige Annahme erkennt, wenn sie ohne Einschränkung gemacht wird, der Deduktion einen realen Wert zu und impliziert, daß ihre Anwendung in jedem Zweige der Wissenschaft unbedingt zulässig ist. Es muß aber untersucht werden, wie weit dieses Urteil richtig ist.

Zu diesem Ende stellen wir uns das allgemeine Problem, wie es möglich ist, daß der logische Prozeß eine Darstellung der Wirklichkeit liefert, d. h. unter welchen Bedingungen und auf welche Weise es zugeht, daß die (durch subjektive Gesetze geregelte) Umformung der Begriffe sich in einer Umformung der realen Beziehungen widerspiegelt, indem sie eine Verknüpfung des Zugleichseins zwischen diesen herstellt.

2. Das zweite dem ersten untergeordnete Problem betrifft die Art der Verifikation eines Systems von Hypothesen, die in einer Theorie verbunden sind; es handelt sich also darum, die Frage zu beantworten, ob und in welchen Grenzen eine gegebene deduktive Theorie geeignet ist, eine gewisse Gruppe von wirklichen Beziehungen darzustellen.

## § 21. Die logische Darstellung und das Postulat der Erkenntnis.

Behandeln wir vor allem das erste Problem!

Die Möglichkeit, die Wirklichkeit logisch darzustellen, muß folgendermaßen verstanden werden: den Invarianten der Erfahrung, die die wirklichen Dinge (Gegenstände und Beziehungen) bilden, können die Invarianten (Gegenstände) des Denkens zugeordnet werden, und zwar so, daß den unveränderlichen Koexistenzen und Sukzessionen jener die Klassen und Reihen von diesen entsprechen.

Das im zweiten Kapitel ausgesprochene Postulat der Erkenntnis behauptet schon in angenäherter Weise diese allgemeine Möglichkeit; es ist aber klar, daß, wenn man die logische Darstellung der Wirklichkeit als unbegrenzt fortsetzbar annimmt, man das erwähnte Postulat in einem strengen Sinne nimmt, der über das hinausgeht, was zur Begründung der für das Leben notwendigen Erkenntnisse erforderlich ist.

Nehmen wir für einen Augenblick an, daß diese strenge Auffassung zulässig sei, d. h. daß man eine absolut vollkommene logische Durchdringung der Erfahrung annehmen dürfte, und fragen wir uns, was dabei vorausgesetzt ist. Wir sind dann, mit KANT, gezwungen, die Kategorien der *Substanz* und der *Ursache* als *notwendige* und *allgemeine Beziehungen* zu betrachten, die *die Bedingungen a priori der Möglichkeit der Erfahrung* enthalten. Auf diese würden sich gleichfalls *apriorische synthetische Urteile* beziehen, denen durch die Tatsache der Möglichkeit *objektive Gültigkeit* verliehen würde.

Aber die Schlüsse einer solchen Kritik scheinen uns aus folgenden Gründen bestreitbar: die Vorstellungen der Substanz und der Ursache in einem absoluten Sinne genommen, bilden nicht die Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung, *wie sie ist*, in ihren unvollkommenen und unstrengen Formen, sondern nur für eine *typische Erfahrung*, der eine streng beweiskräftige Bedeutung zukommt, deren Möglichkeit aber nicht besteht.



Die logische Vorstellung der Wirklichkeit, so wie sie sich fortschreitend in der Wissenschaft darstellt, hat nicht eine irgendwie vollendete Form der Erkenntnis zur Voraussetzung, so daß der daran geknüpfte Beweis der Existenz von *Erkenntnissen a priori* nicht gelingt. Das Dilemma, das KANT aufstellt zwischen ihrer Annahme und dem Skeptizismus, kann man nicht zugeben, denn er stellt eine absolut rationale Wissenschaft einer absoluten Unwissenheit gegenüber, während doch in Wahrheit die verschiedenen Grade des Wissens nie volle Strenge erreichen. Daß im allgemeinen die Möglichkeit der Erfahrung gewissen logischen Kriterien unterworfen ist, besagt gar nichts Bestimmtes, solange nicht gesagt ist, welche Arten von Erfahrung ihrer Möglichkeit nach von gewissen Bedingungen oder Tatsachen abhängen.

Und dieses Urteil ist offenbar a posteriori.

Das Postulat der Erkenntnis, in seinem wahren positiven Sinne verstanden, fordert eine *nur relative, nicht eine strenge Unveränderlichkeit* gewisser Gegenstände der Erfahrung, die als wirkliche Dinge bezeichnet werden; die logische Darstellung der Wirklichkeit setzt einen (theoretisch absoluten) Grad der Unveränderlichkeit voraus, der in jedem einzelnen Falle davon abhängt, wie weit die Deduktion getrieben ist. Daraus ergibt sich eine Antinomie, die sich löst, wenn man die Anwendung der Logik einschränkt.

Um die vorstehenden Behauptungen zu präzisieren und um tiefer in die Frage einzudringen, ist es gut, mit einer Kritik der Begriffe Substanz und Ursache zu beginnen.

## § 22. Substanz: Materie und Energie.

Die Vorstellung, die wir uns von der *Substanz* oder von einem unveränderlichen Substrat der Erscheinungen machen, drückt unsere Überzeugung aus, daß es in der Wirklichkeit gewisse Koexistenzen der Erscheinung gibt, vermöge deren einige sinnliche Merkmale sich in der *gleichen* Zusammensetzung immer wiederfinden und dadurch Gegenstände bilden, und daß folglich aus der Übereinstimmung in einigen Merkmalen diejenige in anderen folgt. Genau dieselbe Überzeugung liegt der Vorstellung der wirklichen Dinge durch Begriffe zugrunde, die durch Abstraktion von Klassen von Elementen gebildet werden.

Nun nimmt die allgemeine Substanzvorstellung in der Erkenntnis einiger Invarianten, die vom KANTischen Standpunkt als streng a priori aufgefaßt werden müßten, konkrete Gestalt an.

Diese Invarianten sind für die moderne Physik die *Materie* und die *Energie*.

Auch KANT selbst führt als Beispiel eines synthetischen Urteils a priori den Grundsatz an, daß „bei allen Veränderungen der körperlichen Natur die Quantität der Materie ungeändert bleibt".

Was bedeutet dieser Grundsatz?

Wenn man darin wirklich eine synthetische Erkenntnis sehen will, so muß vor allem die „Quantität der Materie" positiv definiert werden. Und wo dies geschieht, z. B. mit Hilfe des Gewichts, da drückt die Unveränderlichkeit der Materie nur das Ergebnis der Versuche von LAVOISIER aus; nimmt man jedoch die dynamische Definition der Quantität der Materie an (vgl. Kap. V), so drückt unsere Aussage eine abstraktere Beziehung aus, die sich aus der Vergleichung ausgedehnter Experimente ergibt, besonders jener oben erwähnten



chemischen und der Pendelversuche BESSELS (Proportionalität von Masse und Gewicht an jedem Ort der Erdoberfläche).

Aber alle diese Experimente sind ungenau, und der Grundsatz in seiner exakten Form fügt dem die Annahme einer genaueren Bestätigung nach Entfernung oder Korrektur mancher Fehlerquellen hinzu.

Mit welchem Rechte behauptet man, daß diese Annahme sich notwendig bestätigen *muß?* Eine solche Behauptung ist so weit davon entfernt, allgemein gerechtfertigt zu erscheinen, daß einige kürzlich von LANDOLT ausgeführte und von HEYDWEILLER wiederholte feine Versuche die Unveränderlichkeit des Gewichtes bei chemischen Umsetzungen in Zweifel ziehen. Bei der Lösung eines Sulfates in Wasser glaubt man einen merklichen, wenn auch unter 0,000001 liegenden Gewichtsverlust wahrgenommen zu haben.

Es steht dem nichts entgegen, daß diese Schlüsse so klar bewiesen werden, daß sie als feststehende Tatsache betrachtet werden müssen. Was wird man dann über die Unveränderlichkeit der Materie sagen?

Man kann (wie Lord RALEIGH bemerkt) den Grundsatz retten, indem man den Zweifel auf die Experimente von BESSEL wirft; es ist dies eine plausible Hypothese, die jedoch auch ihrerseits der Kontrolle der Erfahrung unterworfen werden wird.

Es stehen auch noch andere Auswege offen. Man kann z. B. mit HEYDWEILLER seine Zuflucht zu der Hypothese einer verschiedenen *Radioaktivität* der Materie nehmen; die Masse wäre dann bei chemischen Umsetzungen nicht mehr streng konstant, wenn man nicht zu dem Ergebnis der gewöhnlichen Messungsmethoden noch *etwas anderes* hinzunimmt, das sich auf die an der Erscheinung beteiligten Körper bezieht, sich aber außerhalb und entfernt von diesen abspielt.

Aber damit ändert man erstens die Bedeutung des LAVOISIERschen Grundsatzes und zweitens zeigt sich darin auch die Unmöglichkeit, ihm eine strenge Bedeutung zu geben, denn man wird die Strahlungen eines Körpers nicht auf eine der Erfahrung zugängliche Region des Raumes beschränken können.

Wenn die letzten Schlüsse als in jeder Weise evident anerkannt werden, so kann der apriorische Charakter des Prinzips von der Konstanz der Masse nicht aufrecht erhalten werden, es sei denn, daß man in ihm eine einfache *definitorische Bedingung* für die Quantität der Materie erblickt; und in diesem Sinne behält das Urteil noch seinen synthetisch apriorischen Charakter, wenn es als die Annahme aufgefaßt wird, daß ein Gegenstand *existiert*, der der Forderung der Unveränderlichkeit streng genügt.

Aber gerade diese transzendentale Annahme erweist sich als bedeutungslos aus den so oft wiederholten Gründen; worauf aber reduziert sich eine definitorische Bedingung, der kein physikalisch möglicher Gegenstand entspricht?

Bei dieser Betrachtungsweise der Dinge bleibt folgendes übrig: in dem Augenblick, wo die Erfahrung die strenge Gültigkeit des Grundsatzes zu erschüttern scheint, wird das bereits als Teilerkenntnis erhaltene Ergebnis zum Ausgangspunkt neuer Korrektionshypothesen, die zum Ziele haben, eine strengere Unveränderlichkeit zu erreichen. Und dieser Versuch vollzieht sich in der Weise, daß man den als ungenau erwiesenen Ausdruck der Beziehung formal beizubehalten sucht, gemäß jenem *Prinzip der formalen Permanenz*, in dem PEANO eine *Ökonomie* der wissenschaftlichen Ausdrücke gefunden hat.

Nur unter diesem Gesichtspunkt scheint uns POINCARÉS Ansicht richtig, der gewisse Prinzipien als reine



*Vereinbarungen* ansieht, während unserer Meinung nach die wahre Bedeutung der Prinzipien selbst in ihrem veränderlichen Gehalt an realen *Annahmen* liegt, die die Tendenz haben, ihre physikalische Bedeutung dem jeweiligen Stande der wissenschaftlichen Arbeit anzupassen.

Demnach begegnen wir in der allgemeinen Substanzvorstellung lediglich jenem Vertrauen, das uns veranlaßt, eine *wenig veränderliche* Beziehung uns zusammengesetzt zu denken aus einigen veränderlichen Elementen, indem wir dahinter etwas *noch Festeres* suchen.

Ein gleich klares Ergebnis hat eine Prüfung des Prinzips der Erhaltung der Energie.

MAYER hat entdeckt, daß es ein dynamisches Äquivalent der Wärme gibt, so daß man darauf geführt wird, in jedem *isolierten System* die Summe der kinetischen, der Lageenergie und der Wärmemenge als konstant anzusehen.

Aber das so ausgesprochene Gesetz bestätigt sich nicht, wenn andersartige Erscheinungen hinzutreten: elektrische, magnetische, optische usw. Wir müssen unser Gesetz also abändern und in diesen Erscheinungen ein Element aufsuchen, das bei dynamischen oder thermischen Veränderungen einen quantitativ unveränderlichen Repräsentanten besitzt. Das Prinzip der Energetik nimmt so im zweiten Stadium seiner Entwickelung eine Rolle an, die einer definitorischen Bedingung vergleichbar ist. Aber erst im dritten Stadium erhält es wirklich einen Sinn, wenn nämlich festgestellt ist, was unter elektrischer, magnetischer, optischer, chemischer usw. Energie zu verstehen ist und man so dazu gelangt, einen komplizierteren und abgeschlosseneren physikalischen Zusammenhang auszudrücken.

Man kann nicht behaupten, daß das neue Gesetz streng erfüllt ist. Es genügt, sich zu überlegen, wie die

Energie der Lage in die Gesamtenergie eines Systems eingeht, um einzusehen, daß es keine völlig isolierten Systeme gibt. Auf der Suche nach einem solchen System würden wir auf die Betrachtung des ganzen Universums in seiner Unendlichkeit geführt werden. Aber welchen Sinn hätte die Behauptung, daß die Energie des Weltalls konstant ist, wenn sie, wie anzunehmen, unendlich ist?

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Bedeutung jener Prinzipien, die an die Vorstellung von etwas Substanziellem anknüpfen, die folgende zu sein scheint:

1. die relative und angenäherte Erkenntnis einer wirklichen unveränderlichen oder, wenn man genau sein will, wenig veränderlichen Beziehung;
2. ein allgemeines Vertrauen, daß hinter dieser Beziehung und als Ergänzung derselben etwas noch Konstanteres entdeckt werden könne;
3. die konkrete Annahme, daß in den verschiedenen Fällen diese Korrektion dadurch erhalten werden kann, daß man diese und jene anderen Sinnesdaten berücksichtigt, und daß sie zu verifizieren ist, indem man durch Mittelbildung usw. gewisse Fehlerquellen eliminiert.

Die erste Bedeutung entspricht der dogmatischen Betrachtungsweise der fertigen Wissenschaft, in der die Ergebnisse der angestellten Versuche niedergelegt sind; die zweite und dritte enthalten den Ausdruck eines Wunsches, der in einer immer mehr bestimmten Annahme neue mögliche Experimente antizipiert.

## § 23. Ursache.

Auch aus der Ursachenbeziehung verschwindet, wenn man sie positiv versteht, jede Vorstellung einer strengen Unveränderlichkeit.



Wenn man behauptet, daß *Ursache* und *Wirkung* Erscheinungen sind, die unveränderlich aufeinanderfolgen, so werden immer *gewisse Bedingungen* stillschweigend vorausgesetzt. Und wenn es angebracht sein kann, die Ursache dadurch zu komplizieren, daß man die *wesentlichen* Bedingungen, unter denen die Beziehung der Aufeinanderfolge eintritt, berücksichtigt, so ist klar, daß hier eine *Auswahl* stattfindet, die von der *Häufigkeit* gewisser Bedingungen oder von dem *Interesse* abhängt, das sie anderen gegenüber bieten. Würde man versuchen, die Komplikation bis in ihre letzten Konsequenzen zu verfolgen, so würde der Begriff der Ursache jeden Sinn verlieren, weil absolut genommen jede Erscheinung die Wirkung des vorhergehenden Zustandes des Universums ist und man daher, um eine genaue Wiederholung der Erscheinung zu erhalten, diesen Zustand wieder herstellen müßte!

Es ist ziemlich schwer, die Auswahlkriterien genau anzugeben, die bei einer jeden Art von Tatsachen den Ursachenbegriff näher bestimmen. Während man vom abstrakt logischen Standpunkt in dieser Auswahl eine freie *Übereinkunft* sehen kann (gemäß der in der neueren französischen Philosophie vertretenen Ansicht), so muß man doch, wenn man die wesentliche Seite der Frage betrachtet, unterscheiden:

1. Die stillschweigenden *Annahmen*, wonach die Veränderungen gewisser Elemente keine merkliche Änderung des in Rede stehenden Phänomens nach sich ziehen: so wenn z. B. beim Studium der irdischen physikalischen Erscheinungen die astronomischen Beziehungen unserer Erde als immanente Bedingungen angesehen werden (was durch Vergleichung der Experimente widerlegt werden und eine spätere Korrektur erforderlich machen kann).

2. Die *Bedingungen*, die die Tatsache willkürlich zwischen den Grenzen gewisser interessanter Veränderungen einschließen, z. B. derjenigen, die in den Bereich des Willens fallen, usw.

In der Psychologie bildet das Leben und die Unversehrtheit der Organe das Ganze der Bedingungen, die wir als fest betrachten, wenn wir den Determinismus gewisser Funktionen untersuchen, so daß die physiologische Erfahrung auf eine ernste Schwierigkeit stößt, wenn solche Bedingungen von ihr verändert werden. Gerade aus diesem Grund sind die Versuche mit der direkten Exstirpation der Gehirnlappen so schwer zu interpretieren in bezug auf das Problem der Lokalisation, weil man den Nervenchoc, der auf die Operation folgt, und die hinzutretenden stellvertretenden Funktionen berücksichtigen muß.

In den juristischen Wissenschaften beschränkt man den Begriff der Ursache auf das, was mit der Tätigkeit des Menschen zusammenhängt, weil es darauf ankommt, auf diese zu wirken.

Die Theorie der *Verantwortlichkeit*, die als klassisch bezeichnet werden kann, beruft sich geradezu auf den willkürlichen Charakter der Handlungen, handle es sich nun um *dolus* oder um *culpa* (Fahrlässigkeit). Diese Ansicht scheint in dieser Lehre heute überwunden zu sein. Wenn z. B. eine Verantwortlichkeit statuiert wird für den Schaden, der durch die Ausübung einer großen wirtschaftlichen Tätigkeit entsteht, so kann man dabei nicht eigentlich von culpa sprechen, es sei denn vermöge einer juristischen Fiktion, daher scheint die Ansicht angemessener, die unter Berücksichtigung der statistischen Resultate in ähnlichen Fällen einen (nicht spezifizierten) Schaden als unmittelbare Folge der erwähnten Ausübung ansieht. Auf jeden Fall handelt es sich um die Betrachtung des willkürlichen Faktors, auf den das Gesetz im wirtschaftlichen Sinne wirkt.



In anderen Fällen ist es jedoch nicht ebenso sicher, daß man sich in diesen Grenzen halten muß; und anderseits erscheint es auch gerecht, die objektiven Elemente zu berücksichtigen, die imstande sind, mitbestimmend zu wirken (wie z. B. die Erhöhung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus einer gegebenen Handlung ein Schaden folgt). Das Problem der Verantwortlichkeit ist kompliziert, und die Spekulationen unseres Landsmanns Venezian sowohl als die der deutschen Philosophen (Sigwart, Kries usw.) beleuchten es von verschiedenen Seiten. Wir haben nicht die Absicht, noch näher auf solche Fragen einzugehen; es genügt uns, darauf hingewiesen zu haben, daß es sich darum handelt, im Hinblick auf ein *soziales Interesse* eine Auswahl unter den Ursachen zu treffen.

Zu den vorstehenden Bemerkungen kommen noch andere hinzu, die zeigen, wie schwer es ist, den Begriff der Ursache genau zu definieren.

Um zunächst von dem psychologischen Charakter der Vorstellung, den zu untersuchen wir später Gelegenheit haben werden, abzusehen, zeigen einige Beispiele, daß die ursächliche Beziehung, so wie sie gewöhnlich verstanden wird, noch etwas mehr als die konstante Aufeinanderfolge enthält. In der Tat wird die Aufeinanderfolge von Tag und Nacht nicht als kausale Verknüpfung aufgefaßt, denn man weiß auf Grund astronomischer Kenntnisse von der (auf einem anderen Planeten verwirklichten) Möglichkeit eines Tages, der ewig währt, ohne von einer Nacht gefolgt zu sein.

Das eben erwähnte Beispiel wird zuweilen folgendermaßen gedeutet: man nimmt an, daß die Ursachenbeziehung in einer unveränderlichen und *nicht umkehr-*

*baren* Aufeinanderfolge bestehe[1]); wo diese fehlt, liegt ein Fall von uneigentlicher Verursachung vor. Aber das sehr einfache Kennzeichen scheint uns für die beabsichtigte Unterscheidung nicht geeignet, denn z. B. zwischen Ei und Henne kann man trotz ihres alternierenden Aufeinanderfolgens eine kausale Abhängigkeit in beiderlei Richtung behaupten.

Es scheint vielmehr so zu liegen, daß die auf der Erde unveränderliche Aufeinanderfolge von Tag und Nacht nicht *konstant* ist in bezug auf die Veränderung der Bedingungen, die bei einer solchen Erscheinung in Betracht kommen.

Man kann schließlich das *Postulat der Ursache* ungefähr folgendermaßen definieren:

Für jede Klasse von Erscheinungen, die, in geeigneter Weise abgegrenzt, abstrakt genommen als *gleich* betrachtet werden können, wird als möglich angenommen, verschiedene Gruppen von reproduzierbaren zeitlich früheren Erscheinungen (Ursachen) festzustellen, auf die besagte Erscheinungen *unveränderlich* folgen, wenn

1. die Reproduktion der Ursachen beobachtet wird;
2. oder diese willkürlich verwirklicht werden;

und die *Genauigkeit*, mit der dies geschieht, hängt von den *Grenzen* ab, innerhalb deren sich die Beobachtungen bewegen oder die Herstellung der Ursachen als willkürlich angenommen wird; diese Genauigkeit kann relativ zu den erwähnten Grenzen immer größer gemacht werden, je mehr Ursachen berücksichtigt werden, indem man die bekannten Antezedentien der gegebenen Erscheinungen in Rechnung zieht.

---

1) So erklärt FIORENTINO das Attribut „unbedingt", das STUART MILL dem kausalen Antezedens erteilt.



## § 24. Zusammenfassung.

In den vorstehenden Betrachtungen haben wir die *relative* und *unstrenge* Bedeutung der realen Invarianten beleuchtet. Die logische Darstellung der Wirklichkeit ist daher in demselben Sinne zu verstehen: der angenäherten physikalischen Unveränderlichkeit der Koexistenzen und Aufeinanderfolgen ordnet man die (strenge) logische Invarianz der Gegenstände des Denkens und ihrer Vereinigung oder ihrer Anordnung als Begriffselemente zu.

So erscheint die begriffliche Darstellung in bezug auf die Wirklichkeit als eine *Abstraktion*, durch welche ein Komplex von Gegenständen *in Gedanken von allen die Sachlage komplizierenden Bedingungen* oder Faktoren der Veränderung *isoliert* wird. Und diese Abstraktion stellt einen *Akt willkürlicher Annahme* dar, in dem wir die Voraussetzung der Erkenntnis wissenschaftlicher Tatsachen, die sich durch die *Verifikation* vollzieht, erkannt haben.

Es ist Sache unserer Willkür, die Begriffe zu bilden, mit denen wir eine Gruppe von Tatsachen erfassen, indem wir von jenen komplizierenden Bedingungen absehen, die in den ersten Beobachtungen als unerheblich erscheinen, und auf dieser Grundlage deduktiv zu verfahren; aber die so abgeleiteten Beziehungen haben nur hypothetische Gültigkeit, sie werden sich nur in den Grenzen als wahr erweisen, in denen die vernachlässigten Elemente keine merkliche Veränderung bedingen.

Die Hypothese, daß die Unveränderlichkeit der substanziellen und kausalen Beziehungen den betrachteten Tatsachen auch dann zukommen würde, wenn sie von den Begleitumständen nicht isoliert wären, bedeutet nur, daß die der begrifflichen Erfassung anhaftenden Fehler sich korrigieren, daß die Grenzen der Erfassung

sich durch die Wahrheit der abgeleiteten Folgen erweitern, je mehr Wirklichkeitselemente in die Begriffe aufgenommen werden. Die *Allgemeinheit* der Vorstellungen von Ursache und Substanz hat keinen anderen als den hier angegebenen Sinn.

## § 25. Der reale Wert der logischen Grundsätze.

Die vorangehenden Betrachtungen führen uns auf das Problem der realen Bedeutung der logischen Grundsätze.

Es handelt sich hier um eine alte Frage, die schon in der griechischen Philosophie Gegenstand eines Streites zwischen den Eleaten und den Anhängern Heraklits bildete, eines Streites, der in unserer Zeit zwischen Hegel und Herbart erneuert wurde.

Wenn wir die Prinzipien der Identität und des Widerspruchs auf alle physischen Gegenstände beziehen, so behaupten wir ihre Immanenz, wenigstens unter dem Gesichtspunkt, unter dem sie aufgefaßt werden. Über irgendeine Sache nachdenken, heißt voraussetzen, daß sie unverändert bleibt.

Dies ist der Gedanke der eleatischen Schule. Dieselbe wird natürlich dazu geführt, die Immanenz der Welt zu behaupten, in Übereinstimmung mit der Permanenz der Begriffe in unserem Geiste, und durch den Mund des Parmenides und des Zeno leugnet sie durch kunstvolle Trugschlüsse die Veränderung und die Bewegung.

Dennoch widersprachen die Tatsachen der subtilen Dialektik, in der sich der feine Griechengeist gefiel. Es bedurfte nicht einmal einer sehr ausgebildeten experimentellen Wissenschaft, um solche Schlüsse zu widerlegen. Die Schule Heraklits bekämpfte daher die Unveränderlichkeit des Weltalls, indem sie die Veränderung proklamierte: *πάντα ῥεῖ*.



Der Knoten der Frage scheint nun in folgendem zu liegen: die formalen Forderungen der logischen Darstellung drücken nur etwas Psychologisches aus, das a priori nicht auf die dargestellte Erscheinungswelt anwendbar ist. Daher können die logischen Grundsätze keine Tatsache bezeugen, die der Veränderung widerspräche, vielmehr können sie in keiner Weise als Ausdruck einer Tatsache gedeutet werden, sondern sie drücken *die Bedingungen* aus, *unter denen ein Gegenstand oder eine Beziehung der Erscheinungswelt logisch als Element eines Begriffes dargestellt werden kann, den das Denken in seinen Ableitungen festhalten will.*

Es gibt in der Wirklichkeit Gegenstände (Koexistenzen und Sukzessionen von Erscheinungen), die sich schnell verändern und andere, die das so langsam tun, daß man sie wenigstens provisorisch als unveränderlich betrachten kann; und während die ersten nicht als Individuen des logischen Gedankens benutzt werden können, eignen sich die anderen um so besser zu dieser Darstellung, je langsamer ihre Veränderung vor sich geht.

Der „sor Panèra", der die Klinge schlecht zu führen versteht, haut tapfer auf seinen Gegner ein, der aber verteidigt sich mit einfachen Paraden. „Wenn er nicht still steht", ruft der Ärmste in seinem lombardischen Dialekt aus, „hat es keinen Zweck".

Eine solche Klage nötigt uns ein Lächeln ab, weil wir es als besondere Aufgabe des Fechters ansehen, den Augenblick zu ergreifen, wo das Ziel still steht und den raschen Hieben preisgegeben ist.

In ähnlicher Lage befindet sich der Gedanke, der unter den veränderlichen Elementen der Wirklichkeit das unveränderliche Subjekt der Überlegung ergreifen will. Und es ist seine Sache, dieses zu suchen, will er nicht mit seinen einfältigen Behauptungen wie der sor Panèra dastehen.

## § 26. Der Wert der Axiome: objektive Gültigkeit der Logik.

Nehmen wir an, in einem Tatsachengebiet seien die quasi unveränderlichen Elemente herausgehoben, so daß die durch die logischen Grundsätze ausgedrückten Bedingungen erfüllt sind. Damit die Darstellung eine adäquate werde, müssen die Axiome, die die Gesetze der logischen Verbindung ausdrücken, in der Wirklichkeit ihre Bestätigung finden.

Aber dies tritt in der Tat ein, wenigstens innerhalb der Grenzen, in denen die Voraussetzungen erfüllt sind; die Axiome werden durch die wirklichen Eigenschaften der Mengen von Dingen bestätigt; z. B. entsprechen den formalen Eigenschaften der arithmetischen Operationen konkrete Voraussagen auf diesem Gebiete.

Wir werden so zu der Erkenntnis geführt, daß die Anwendung der Logik das Stattfinden einer allgemeinen Tatsache voraussetzt.

*Unter der durch die logischen Grundsätze ausgedrückten Bedingung der Invarianz genügen die Gesamtheiten von Dingen den durch die Axiome ausgedrückten Eigenschaften.*

Man kann in diesem Sinne von einer *objektiven Gültigkeit der Logik* sprechen, die eine unveränderliche und bedingte Beziehung zwischen den Gesetzen des Denkens und der Welt der Erscheinungen voraussetzt. Und diese Beziehung ist wahrhaft bedeutsam. Wenn es erlaubt ist, ein denkendes Wesen zu erdichten, in dem sich die Assoziationen der merklich festen Objekte nach Gesetzen vollziehen, die von den durch unsere Axiome ausgedrückten verschieden sind, so muß man annehmen, daß dieses Wesen keinen Zusammenhang zwischen dem logischen Prozeß in seinem Geiste und der Wirklichkeit feststellen kann.



Die *wenig logisch* veranlagten Menschen ähneln einem solchen Typus insofern, als es ihnen nicht gelingt, bei der Assoziation der Bilder der Sinnesgegenstände die verändernde Wirkung der Ideen oder Gefühle auszuschalten, die durch die Vorstellung des zusammengesetzten Objekts hervorgerufen werden.

Aber bis zu welchem Grade und in welcher Weise kann man die durch die objektive Gültigkeit der Logik ausgedrückte Tatsache als verifiziert ansehen?

Die direktere und populärere Bestätigung der Eigenschaften der Mengen wird überwunden durch eine Voraussetzung, die die Wissenschaft annimmt und durch ihren Fortschritt indirekt befestigt:

*Wenn in einer Klasse von merklich beständigen Gegenständen die durch die Axiome ausgedrückten Eigenschaften nicht realisiert sind, so werden vollkommnere Beobachtungsmittel die Veränderlichkeit dieser Gegenstände zeigen.*

Diese unbestimmte Formel erhält in den einzelnen Fällen eine bestimmte Bedeutung, wenn es gelingt, die untere Grenze der angenommenen Veränderung quantitativ zu bestimmen. Und in diesem Sinne untersteht das Prinzip der Kontrolle der Erfahrung, die, soweit das möglich war, es niemals zu bestätigen verfehlt hat.

Aber für die wissenschaftliche Konstruktion, in der die Erfahrung logisch bearbeitet wird, bildet das unbegrenzte Vertrauen, das wir in jenes Prinzip setzen, eine Bedingung des Fortschritts. Dieser erfordert so ein Postulat, das das Postulat der Erkenntnis vervollständigt und präzisiert, und das wir so lange für wahr halten dürfen, als sich für jenen Fortschritt keine notwendige Schranke zeigt, von der etwas zu bemerken wir weit entfernt sind, ja deren Möglichkeit wir nicht einmal zu denken vermögen.

## § 26. Der Wert der Axiome: objektive Gültigkeit der Logik.

Nehmen wir an, in einem Tatsachengebiet seien die quasi unveränderlichen Elemente herausgehoben, so daß die durch die logischen Grundsätze ausgedrückten Bedingungen erfüllt sind. Damit die Darstellung eine adäquate werde, müssen die Axiome, die die Gesetze der logischen Verbindung ausdrücken, in der Wirklichkeit ihre Bestätigung finden.

Aber dies tritt in der Tat ein, wenigstens innerhalb der Grenzen, in denen die Voraussetzungen erfüllt sind; die Axiome werden durch die wirklichen Eigenschaften der Mengen von Dingen bestätigt; z. B. entsprechen den formalen Eigenschaften der arithmetischen Operationen konkrete Voraussagen auf diesem Gebiete.

Wir werden so zu der Erkenntnis geführt, daß die Anwendung der Logik das Stattfinden einer allgemeinen Tatsache voraussetzt.

*Unter der durch die logischen Grundsätze ausgedrückten Bedingung der Invarianz genügen die Gesamtheiten von Dingen den durch die Axiome ausgedrückten Eigenschaften.*

Man kann in diesem Sinne von einer *objektiven Gültigkeit der Logik* sprechen, die eine unveränderliche und bedingte Beziehung zwischen den Gesetzen des Denkens und der Welt der Erscheinungen voraussetzt. Und diese Beziehung ist wahrhaft bedeutsam. Wenn es erlaubt ist, ein denkendes Wesen zu erdichten, in dem sich die Assoziationen der merklich festen Objekte nach Gesetzen vollziehen, die von den durch unsere Axiome ausgedrückten verschieden sind, so muß man annehmen, daß dieses Wesen keinen Zusammenhang zwischen dem logischen Prozeß in seinem Geiste und der Wirklichkeit feststellen kann.



Die *wenig logisch* veranlagten Menschen ähneln einem solchen Typus insofern, als es ihnen nicht gelingt, bei der Assoziation der Bilder der Sinnesgegenstände die verändernde Wirkung der Ideen oder Gefühle auszuschalten, die durch die Vorstellung des zusammengesetzten Objekts hervorgerufen werden.

Aber bis zu welchem Grade und in welcher Weise kann man die durch die objektive Gültigkeit der Logik ausgedrückte Tatsache als verifiziert ansehen?

Die direktere und populärere Bestätigung der Eigenschaften der Mengen wird überwunden durch eine Voraussetzung, die die Wissenschaft annimmt und durch ihren Fortschritt indirekt befestigt:

*Wenn in einer Klasse von merklich beständigen Gegenständen die durch die Axiome ausgedrückten Eigenschaften nicht realisiert sind, so werden vollkommnere Beobachtungsmittel die Veränderlichkeit dieser Gegenstände zeigen.*

Diese unbestimmte Formel erhält in den einzelnen Fällen eine bestimmte Bedeutung, wenn es gelingt, die untere Grenze der angenommenen Veränderung quantitativ zu bestimmen. Und in diesem Sinne untersteht das Prinzip der Kontrolle der Erfahrung, die, soweit das möglich war, es niemals zu bestätigen verfehlt hat.

Aber für die wissenschaftliche Konstruktion, in der die Erfahrung logisch bearbeitet wird, bildet das unbegrenzte Vertrauen, das wir in jenes Prinzip setzen, eine Bedingung des Fortschritts. Dieser erfordert so ein Postulat, das das Postulat der Erkenntnis vervollständigt und präzisiert, und das wir so lange für wahr halten dürfen, als sich für jenen Fortschritt keine notwendige Schranke zeigt, von der etwas zu bemerken wir weit entfernt sind, ja deren Möglichkeit wir nicht einmal zu denken vermögen.

## § 27. Grenzen der Anwendung der Logik.

Wir wollen noch bei dem Umstand verweilen, daß die Eigenschaften der Mengen von Dingen eine gewisse Unveränderlichkeit derselben erfordern, denn diese Bemerkung deutet die Grenze der Anwendung der Logik an.

Kehren wir zu dem Beispiel der konkreten Arithmetik zurück, die wir als einen Zweig der angewandten Logik betrachten. Man behauptet, sie sei eine bloße Vermutung, aber die Kassierer sind anderer Ansicht. Sie zählen ihre Münzen, ordnen sie in Gruppen, ziehen die Summen und kontrollieren die Rechnungen auf mehrere verschiedene Weisen; unter den willkürlich hergestellten Bedingungen treten immer dieselben vorausgesehenen Wahrnehmungen auf, so daß es eigentliche arithmetische Tatsachen sind, deren Bestehen sie konstatieren. Wenn man von einem Haufen 12 Münzen genommen hat, so lassen sich diese gleichermaßen auf zwei Gruppen von 7 und 5 oder von 6 und 6 verteilen; dies ist die reale Bedeutung der Formel $7 + 5 = 6 + 6$.

Immerhin setzen diese arithmetischen Tatsachen, die unter die allgemeinen Eigenschaften der Mengen fallen, Bedingungen voraus, die gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzt werden, die aber keineswegs notwendig erfüllt sind.

Wenn ein braver Kassierer, der für Hygiene und Sauberkeit schwärmt, die Gewohnheit hätte, während seiner Rechnungen die Münzen in Wasser zu tauchen, würde die Erfahrung noch immer die arithmetischen Voraussagen bestätigen; aber wehe ihm, wenn ein Amtskollege sich einen Scherz mit ihm erlaubte und an Stelle des Wassers eine Säure täte, die das Metall angreift. In diesem Falle würden die Rechnungen nicht mehr stimmen, weil einige Münzen sich in der Flüssigkeit



auflösen und verschwinden würden, während der arme Mann auf seine logischen Deduktionen achtgibt.

Aber die Erkenntnis, daß die allgemeinen Eigenschaften der Mengen zu ihrer Gültigkeit eine gewisse Unveränderlichkeit der zusammengefaßten Dinge voraussetzen, führt uns zu bedeutsameren Überlegungen, insofern in ihr sich die Grenzen der Anwendbarkeit der Logik auf die Wirklichkeit offenbaren.

Wir sehen nunmehr die Schwierigkeiten, die einer Darstellung der verschiedenen Tatsachengruppen durch deduktive Theorien entgegenstehen; oder mit anderen Worten, wir erkennen, bis zu welchem Punkte das deduktive logische Verfahren in den verschiedenen Wissenschaften anwendbar ist.

Indem sie durch Veränderung der Erscheinungen ihre unveränderlichen Gruppierungen sucht, geht unsere Untersuchung darauf aus, die Dinge festzustellen, die sich zu Gegenständen des Denkens eignen, oder die durch Beziehungen zwischen solchen in ein Begriffsystem gebracht werden können. Da aber die Unveränderlichkeit der wirklichen Dinge nur eine relative ist, so kann man die Eigenschaften der aus ihnen zusammengesetzten Mengen logisch nur *bis zu einem gewissen Punkte* voraussehen, nämlich nur bei der ersten Verbindung; sobald das deduktive Verfahren darüber hinaus fortgesetzt wird, häufen sich die Veränderungen, und die Voraussicht wird Lügen gestraft.

Die kleine Veränderung, die ein Uhrpendel durch die Temperatur in seiner Länge erfährt, kann allerdings vernachlässigt werden, solange es sich darum handelt, eine gewisse Zahl von Sekunden zu zählen, aber innerhalb einer längeren Zeit bringt sie Unterschiede zwischen einer Uhr und der anderen hervor, so daß die Summe einer gleichen Anzahl von unter sich gleichenden Summanden in verschiedenen Fällen sich als verschieden ergibt!

Jede Wissenschaft stellt, wenn sie ihre Deduktionen bestätigt, a posteriori, wie wir die Verifikation der stillschweigend gemachten Annahmen nennen wollen, die Grenzen fest, innerhalb deren ihre Gegenstände einer logischen Darstellung fähig sind.

Diese Grenzen können enger oder weiter sein, je nach der Beständigkeit der als Gegenstände der Darstellung genommenen Beziehungen zwischen Erscheinungen.

Wovon hängt die Möglichkeit einer noch weiter getriebenen Anwendung der deduktiven Methode ab?

Von dem Umstande, daß die gegebenen Erscheinungen sehr verschiedene Grade von Veränderlichkeit aufweisen, so daß man durch Abstraktion zu beständigeren Beziehungen aufsteigen kann, die relativ unveränderlich sind: von dem Grade der Unveränderlichkeit von diesen, in bezug auf die beabsichtigten Voraussichten.

Diese Umstände sind in der günstigsten Weise bei den physikalischen Erscheinungen realisiert und besonders bei denen, auf die sich die vorgeschrittensten Theorien beziehen. Auf diesem Gebiete hat das Verfahren der Differentiation von Funktionen der oben erwähnten Forderung genügt, aus veränderlichen Elementen etwas Beständigeres zu isolieren; so z. B. beim Übergang von der Keplerschen zur Newtonschen Theorie (Kap. II). Daher streben die physikalischen Theorien danach, den beständigsten Teil der Erscheinungsbeziehungen durch Differentialgleichungen auszudrücken.

In der Chemie zeigt sich das Suchen nach Invarianten, die zu Gegenständen der logischen Behandlung taugen, in dem Bestreben aus den Rückständen die unzerlegten Elemente auszusondern, und dann in der Aussonderung gewisser Verbindungen oder Kerne, die gewissen Reaktionen gegenüber beständig sind. Das atomistische



Zeichensystem mit den Strukturformeln zeigt gerade die gegenseitige Überordnung der Invarianten.

In der Physiologie dagegen begrenzt die schnellere Veränderlichkeit der Daten, oder, wenn man will, die größere Kompliziertheit der Ursachen, die Rolle der deduktiven Methode. Während die Astronomie für die kurze Zeit, die die menschliche Geschichte berücksichtigen muß, das Planetensystem als von dem übrigen Universum isoliert betrachten kann, kann die Physiologie nicht von der Einwirkung des ganzen Organismus auf jedes einzelne Organ absehen, wenn sie ihre Berechnungen für mehr als wenige Augenblicke im voraus anstellen will.

Im Leben der Tiere zählen Minuten wie Jahrmillionen im Leben der Welten!

Dazu kommt, daß die größere oder geringere Veränderlichkeit der Daten, die den Gegenstand einer Wissenschaft bilden, nicht nur in bezug auf die Zeit zu verstehen ist, sondern auch in bezug auf die Verbindungen von Dingen, die als gleichzeitig betrachtet werden. In der Physik summieren sich viele Eigenschaften fast streng bei der Vereinigung der Körper (z. B. die Massen); in der Physiologie und in den sozialen Wissenschaften verändert die Vereinigung in immer höherem Grade die einzelnen Dinge, die Gegenstände unserer Beobachtung sind.

Wohlverstanden hat das alles nur relative Geltung; die Möglichkeit, das Gebiet der Deduktionen zu erweitern, besteht für jede Wissenschaft, sie hängt nur ab von der Auswahl weniger veränderlicher Daten, d. h. von der Bestätigung der stillschweigend gemachten Hypothesen, die diese Unveränderlichkeit behaupten.

## § 28. Das Problem der Bestätigung.

Wir wollen nunmehr das zweite Grundproblem der angewandten Logik diskutieren, nämlich dasjenige, das sich auf die Bestätigung der Theorien bezieht.

Und vor allem wollen wir im Auge behalten, was darüber gesagt wurde, wie sich die Darstellung der Wirklichkeit mit Hilfe eines Systems von Begriffen in zwei Arten von Hypothesen ausdrückt:

1. die *impliziten Hypothesen*, vermöge deren gewisse Erscheinungskomplexe als *gleich* betrachtet werden (die Invarianten), die dann abstrakt als Begriffselemente benutzt werden;
2. die *expliziten Hypothesen (Postulate der Theorie)*, die durch die die Begriffe selbst definierenden Beziehungen reale Beziehungen zwischen den genannten Invarianten ausdrücken.

Es ist klar, daß die Formulierung einer Theorie nur die letzteren in die Erscheinung treten läßt, während die ersten wie etwas Erledigtes im voraus als anerkannt gelten.

So sehen wir z. B. in den physikalischen Theorien einige Größen (die Temperatur, der Druck usw.) durch gewisse Gleichungen verbunden; die Gleichungen drücken die expliziten Hypothesen aus, aber die Annahme, daß die erwähnten Größen in bezug auf einen bestimmten Zustand der Körper usw. definiert sind, bildet eine Gesamtheit von impliziten Hypothesen; die ganze Ausdehnung derselben kann man übersehen, wenn man an die Mannigfaltigkeit der experimentellen Verfahrungsarten denkt, durch die sie bestimmt werden können.

## § 29. Die Bestätigung der expliziten Hypothesen.

Das Problem der Bestätigung führt nun dazu, die Kriterien der Gewißheit, der näheren Bestimmung oder der Verbesserung für die expliziten und für die impliziten Hypothesen getrennt zu würdigen.

Bei der Bestätigung von jenen liefern uns diese im voraus Erkenntnisse, welche das Feld der *Experimente* einschränken und deren *Deutung* ermöglichen.



Wir stehen also vor einer Erscheinungswelt, deren einzelne Gegenstände wir uns schon zu gewissen Klassen (Reihen usw.) vereinigt und gewissen Begriffen untergeordnet denken.

Nachdem die zu bestätigenden Hypothesen vorher durch Deduktion umgeformt worden sind, haben wir der experimentellen Prüfung gewisse allgemeine Sätze (Theoreme) der Theorie zu unterwerfen, die folgendes betreffen können:

1. Eigenschaften von Klassen, d. h. Eigenschaften, in bezug auf welche die Gegenstände des Experimentes im voraus als gleich angesehen werden; oder
2. Eigenschaften, von denen angenommen wird, daß sie als *Funktionen* des Objekts innerhalb der Klasse variieren.

1. Es ist klar, wie im ersten Falle, wo die impliziten Hypothesen die Möglichkeit der Verallgemeinerung gewährleisten, das einzelne Experiment anzustellen ist. So z. B. wenn es sich darum handelt, die anatomischen Eigenschaften einer Art von Tieren festzustellen, wobei angenommen wird, daß diese sich in jenen gleichen.

Immerhin ist der verifikatorische Wert der Experimente verschieden, je nachdem ob es sich um *(quantitative)* Eigenschaften handelt, die in unmerklichen Graden *stetig* variieren können, oder um solche *(qualitativen)*, die wir nur als Elemente einer *diskreten* Klasse von möglichen Gegenständen denken; die ersteren werden nur *angenähert*, die letzteren *genau* bestimmt.

Im obigen Beispiel (anatomische Eigenschaften einer Art) handelt es sich um qualitative Eigenschaften, und die Antwort der Erfahrung ist daher exakt. Ein ähnliches Beispiel bietet die Bestimmung des Typus, dem die Kristalle eines Minerals angehören, usw.

Dagegen bietet die Bestimmung des Schmelzpunktes des Eisens oder des Kupfers usw. ein Beispiel einer

quantitativen Klasseneigenschaft dar, die die Erfahrung nur angenähert liefern kann. Die approximative Erkenntnis verwandelt sich in eine genaue, wenn man von einem begrenzten Intervall spricht, in den der Wert der experimentell zu bestimmenden Größe eingeschlossen ist.

2. Die Bestätigung der Annahme, daß eine gewisse Eigenschaft (als Funktion) von den Elementen einer Klasse abhängt, kann gewöhnlich auf eine Fragestellung von speziellerem Typus zurückgeführt werden: „zu erkennen, ob eine gewisse Größe, die von den Elementen einer Klasse abhängt, innerhalb dieser Klasse konstant ist, d. h. als Klasseneigenschaft angesehen werden kann."

Wir wollen diese Zurückführung an einem Beispiel erklären.

Wenn eine Kraft $f$, die auf einen beweglichen Punkt wirkt, dem Quadrate seiner Entfernung $r$ von einem festen Zentrum in seinen verschiedenen Lagen umgekehrt proportional ist, so hat das Produkt $fr^2$ in diesen Lagen konstanten Wert; die Verifikation dieser Konstanz $fr^2 = k$ ist gleichbedeutend mit der Verifikation der Abhängigkeit

$$f = \frac{k}{r^2}.$$

Nun führt das Problem, experimentell zu erkennen, ob eine Größe für alle Objekte einer Klasse konstant ist, zu verschiedenen Überlegungen, je nachdem es sich um *diskrete* oder um *stetige Klassen* handelt. Dabei kann die in Frage stehende Eigenschaft selbst sowohl unstetig als auch stetig variieren (*qualitative* oder *quantitative* Eigenschaften), und in dieser Beziehung sind die vorstehenden Überlegungen über die Genauigkeit oder Ungenauigkeit der einzelnen Experimente zu wiederholen. Aber die wesentliche Schwierigkeit, die wir hier untersuchen müssen, betrifft die *Verallgemeinerung des Experiments* und hängt mit der ersten Unterscheidung zwischen Experimenten im Stetigen und im Unstetigen zusammen.



## § 30. Experimente im Unstetigen.

Von den diskreten Klassen stehen an erster Stelle die, welche aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen; wenn die Zahl nicht zu groß ist und es sich um erreichbare Gegenstände handelt, so kann in diesem Falle eine *vollständige Bestätigung* der Hypothesen stattfinden, indem so viele Experimente angestellt werden, als Objekte vorhanden sind. Es ist dies der einfachste Fall, der aber praktisch von geringem Interesse ist.

Nehmen wir jedoch eine Klasse, die aus sehr (oder auch unendlich) vielen Gegenständen besteht; nur eine gewisse Zahl von Experimenten ist wirklich ausführbar. Diese können zweierlei Ergebnis haben:

1. Daß eine gewisse Eigenschaft, von der gefragt ist, ob sie eine Klasseneigenschaft ist, nicht sämtlichen Versuchsobjekten zukommt; die Antwort der *Erfahrung* ist in diesem Falle eine *gewisse* und *negative*.
2. Daß die Eigenschaft, um die es sich handelt, allen Versuchsobjekten zukommt. Mit welchem Grunde kann man dann behaupten, daß sie allen überhaupt zukommt? D. h. wann ist es erlaubt, diese Experimente im Sinne einer *positiven* Bestätigung der Hypothese zu deuten?

Dieses fundamentale Problem wollen wir untersuchen.

Versetzen wir uns vor eine Lotterieurne, in der viele verschlossene Blättchen liegen; die Blätter, die eine Nummer tragen, entsprechen einem Gewinn; es ist übrigens nicht ausgeschlossen, daß es sich um eine Lotterie mit sicherem Gewinn handelt.

Es werden nun aus der Urne zwanzig oder dreißig Blättchen gezogen; alle tragen eine Nummer. Man schließt dann als *wahrscheinlich*, daß der Gewinn sicher ist. Wenn dagegen ebensoviele Nieten gezogen worden wären, so würde man annehmen, daß nur wenig Gewinne vorhanden wären. Weshalb diese verschiedene Deutung?

Weil wir Grund haben (auf Grund von Beobachtungen an anderen ähnlichen Lotterien) anzunehmen, daß, wenn Nieten und Gewinne gemischt wären, die Zahl der ersteren im Verhältnis zu der der letzteren groß sein könnte, aber nicht umgekehrt; und weil schließlich der Fall des Betruges, in dem die Gewinne gänzlich mangeln, im Vergleich zu dem, wo sicherer Gewinn beabsichtigt ist, als äußerst unwahrscheinlich angesehen werden muß.

Es ergibt sich also, daß die Deutung des Experimentes und seine Verallgemeinerung von einigen vorausgesetzten Kenntnissen abhängt; erst nachdem diese in Gestalt eines Koeffizienten präzisiert worden sind, wird es möglich, *die Wahrscheinlichkeit* des Resultats *zu messen*, d. h. eine Zahl zu bestimmen, die das Verhältnis angibt zwischen der Anzahl der Fälle, in der sich die durch Verallgemeinerung gebildete Annahme, bei Berücksichtigung von sehr vielen Fällen, als richtig und der Anzahl derjenigen Fälle, in denen sie sich als falsch erweisen wird.

Mangels irgendeines Anhaltspunktes könnte man die verschiedenen Fälle für *gleich wahrscheinlich* halten; diese Annahme würde dann ein erstes rohes Kriterium für die Deutung des Experimentes ergeben, die dann mit fortschreitender Kenntnis verbessert werden müßte. Es ist nötig, darauf hinzuweisen, daß man gezwungen ist, dieses Kriterium anzuwenden, der Wert der sich daraus ergebenden Verallgemeinerung ist ein sehr geringer, sobald es sich um Klassen handelt, deren Anzahl im Verhältnis zu der der angestellten Versuche groß ist.



Was soll man von dem Falle sagen, wo die Klasse unendlich viele Elemente hat?

## § 31. Experimente im Stetigen.

Die vorstehenden Bemerkungen machen es verständlich, daß der Bestätigungswert der Experimente in noch höherem Grade von den repräsentativen Begriffen abhängt, wenn es sich um Experimente im Stetigen handelt. Hier lernen wir übrigens ein allgemeines Interpretationskriterium kennen, das in bezug auf die erwähnten Begriffe näher bestimmt werden muß, nämlich eine *Stetigkeitsvoraussetzung*, die die Grundlage der *experimentellen Methode* bildet.

Wenn es sich um qualitative Versuche handelt, wo die Eigenschaft, die von den Elementen einer stetigen Klasse abhängt, nicht selbst stetig variieren kann, nimmt man diese a priori als konstant an, wenigstens für einen Teil der Klasse, der in gewisse Grenzen eingeschlossen ist, die ihn von einer benachbarten Klasse trennen (z. B. bei einem Körper, der zwischen der Siede- und der Schmelztemperatur flüssig ist).

Untersuchen wir dagegen den Fall von quantitativen Versuchen. Es handle sich z. B. darum, eine Gleichung von der Form $a = b$ für die Elemente einer stetigen Klasse zu verifizieren, d. h. (bei dem approximativen Charakter eines solchen Experimentes) es soll untersucht werden, ob für sie eine Ungleichung besteht

$$a - b < \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ den *Beobachtungsfehler* bedeutet.

Die Verifikation geschieht durch *Interpolation*, d. h. (wenn wir uns auf eine eindimensionale Klasse beziehen) man stellt den Versuch mit einigen Gegenständen an und überträgt das Resultat auf die anderen, die *zwischen* diesen liegen. Auf Grund der Annahme, daß die Be-

ziehung zwischen $a$ und $b$ in stetiger Weise von den Elementen der Klasse abhängt, schließt man, daß sie *konstant* $a = b$ ist, wenn dieses Resultat sich bei denjenigen Elementen ergibt, die untersucht worden waren.

Das Prinzip, das imstande ist, ein Maß für das Interpretationskriterium zu liefern (in wievielen Fällen die Verallgemeinerung zu richtigen Annahmen führt), ist wieder das Prinzip der *Wahrscheinlichkeit*, wenn man das sogenannte *Gesetz der großen Zahlen* akzeptiert.

Aber die *mathematische Wahrscheinlichkeit*, die (nach diesem Gesetz) der Zahl der einer gegebenen Hypothese günstigen oder ungünstigen Fälle proportional ist, *ist nicht definiert*, wenn nicht vorher die Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle gewissen Begriffen untergeordnet ist.

Wir wollen an einem einfachen Beispiel erläutern, wie das Wahrscheinlichkeitskriterium die Beweiskraft eines Experiments abzuschätzen erlaubt.

Zu diesem Zwecke wollen wir uns vornehmen, die Wärmemenge zu messen, die von einer mechanischen Arbeit von $a$ Meterkilogramm entwickelt werden kann. Wir wollen *annehmen*, daß diese Menge nur von der Veränderlichen $a$ abhängt und eine stetige Funktion $f(a)$ von ihr ist.

Wenn ein erster Versuch

$$f(a) = a : 427$$

liefert, so kann ein Experimentator, der noch nichts über die Frage weiß, nichts daraus schließen.

Nehmen wir aber an, daß ein zweiter Versuch zu derselben Zahl führt, oder daß das Ergebnis des ersten im voraus angekündigt war.

Jeder wird in diesem Falle dem Versuch den Wert beimessen, daß er beweist, daß wenigstens innerhalb gewisser Grenzen *das Verhältnis* $f(a) : a$ *den konstanten Wert* 427 *hat*. Worauf beruht dieses Zutrauen? Wenn



die Behauptung geleugnet wird, so wird sich die Funktion etwa durch folgendes Diagramm darstellen lassen:

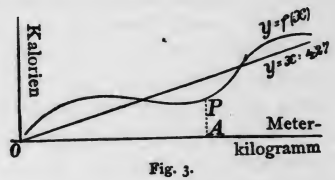



Fig. 3.

Betrachtet man nun auf der $x$-Achse einen ganz beliebigen Punkt $A$ $(OA = a)$, welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß die Ordinate $AP = f(a)$ den bezeichneten Wert $a : 427$ hat?

Offenbar ist diese Wahrscheinlichkeit *unendlich klein* oder praktisch Null. Betrachtet man demnach den Versuch als genau, so ist eine *Wahrscheinlichkeit, die praktisch der Gewißheit gleichkommt*, dafür vorhanden, daß die stetige Kurve $y = f(x)$ mit der Geraden zusammenfällt, deren Neigungskoeffizient $1 : 427$ ist, oder daß sie mit ihr eine endliche Strecke gemein hat.

Aber wir müssen berücksichtigen, daß der experimentell erhaltene Wert 427 nur ein angenäherter ist; wir müssen deshalb den Versuch als mit einem gewissen Fehler $< \varepsilon$ behaftet betrachten. Dann muß die vorstehende Rechnung folgendermaßen modifiziert werden: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein auf der Kurve $y = f(x)$ beliebig angenommener Punkt von der Geraden $y = x : 427$ um weniger als $\varepsilon$ absteht?

Es scheint auf den ersten Blick, als ob man hier ohne weiteres einen ähnlichen Schluß ziehen könnte, wie vorhin, daß man nämlich, wenn man nicht mehr eine Wahrscheinlichkeit $= 1$, sondern schon eine sehr große als hinreichenden Beweis erachtet, als erwiesen durch den Versuch betrachten könnte, daß die Kurve $y = f(x)$ oder

ein endliches Stück von ihr mit der Geraden $y = x : 427$ annähernd zusammenfällt.

Ein Mathematiker aber, der im Gebiete der merkwürdigen Funktionen genau Bescheid weiß, wird anderer Meinung sein; ihm wird es ein leichtes sein, eine stetige Kurve $y = f(x)$ zu konstruieren, die in jedem noch so kleinen Intervall sich der erwähnten Geraden beliebig nähert und sich beliebig weit von ihr entfernt.

Aber das beweist nur, daß die Wahrscheinlichkeit sich nicht mathematisch bestimmen läßt, wenn man die stetige Funktion $f$ ganz beliebig läßt. Man muß also das Problem dadurch näher bestimmen, daß man auf Grund der begrifflichen Darstellung der Erscheinung diese Willkür einschränkt.

In unserem Falle z. B. ist anzunehmen, daß die Funktion $f(x)$ *monoton wächst*, und das schließt schon gewisse Oszillationen der Kurve aus.

Wir wollen hier die Analyse nicht bis zur konkreten Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit fortsetzen. Es genügt, darauf hinzuweisen, daß das bezeichnete Kriterium wenigstens in den einfacheren Fällen gestattet, *den wahrscheinlichen Wert der experimentellen Verifikation unter Voraussetzung einer hinreichend bestimmten begrifflichen Darstellung anzugeben.*

Natürlich wächst die Beweiskraft der *Interpolationen* rasch mit der Anzahl der einander sich nähernden experimentellen Bestätigungen; während die *Extrapolation*, je weiter sie sich von dem Bereich der Experimente entfernt, um so mehr ihre Beweiskraft verliert und zu einem heuristischen Mittel zur Auffindung neuer Hypothesen herabsinkt.

## § 32. Schlüsse über die Deutung der Experimente.

Wir wollen die Ergebnisse der vorangegangenen Kritik in folgenden Schlüssen zusammenfassen:



1. Der Wert der experimentellen Bestätigung, d. h. die Deutung der Experimente hängt von der begrifflichen Darstellung und besonders von den implizite darin enthaltenen Hypothesen ab.
2. Wenn es sich um Eigenschaften handelt, die im voraus als Klasseneigenschaften betrachtet werden, so liefert das Experiment *Gewißheit*: und zwar ist das Ergebnis *genau oder angenähert*, je nachdem der Versuch ein *qualitativer* oder ein *quantitativer* war.
3. Die qualitativen Experimente im Stetigen betreffen immer (in gewissen Grenzen) Klasseneigenschaften, wenn *Stetigkeit* allgemein vorausgesetzt wird.
4. Die Experimente im Diskreten und die quantitativen Experimente im Stetigen, bei denen es sich um die Frage handelt, ob eine Eigenschaft allen Elementen einer Klasse gemeinsam ist, haben *Gewißheitswert*, wenn sie die Hypothesen *widerlegen;* die Experimente mit *positivem* Ergebnis haben nur einen *Wahrscheinlichkeitswert*, der gemessen werden kann, wenn man das Gesetz der großen Zahlen annimmt, und von einer *begrifflichen Darstellung* ausgeht, die den verschiedenen Gebieten des Experimentes angemessen ist (implizite Hypothesen).

Demnach gründen sich die Kriterien der Verifikation der expliziten Hypothesen auf die impliziten und auf zwei Prinzipien: das Gesetz der großen Zahlen *(Wahrscheinlichkeit)* und das *Postulat der Stetigkeit.*

Wenn man nach der Begründung dieser Prinzipien fragt, so kann man sich nur auf die große Menge der angestellten Versuche berufen.

Man muß also die allgemeine Annahme machen, daß die Erfahrung einen wahrscheinlich über die einzelnen Fälle hinausgehenden Wert hat, und man muß demgemäß die Kriterien für die Bewertung dieser Wahrscheinlichkeit und das damit zusammenhängende Prinzip

der Stetigkeit als ungeheuer wahrscheinlich ansehen, kraft der sehr großen Zahl von Versuchen, die sie direkt oder indirekt bestätigen; der Fortschritt der Wissenschaft, dem diese Prinzipien dienen, erhöht tagtäglich ihre Gewißheit und *Bestimmtheit*.

## § 33. Das Postulat der Stetigkeit und die psychologische Vorstellung der Ursachen: wie und warum.

Es ist nun wichtig zu bemerken, daß das Postulat der Stetigkeit der psychologischen Seite der Substanz- und Ursachenvorstellungen entspricht.

Wir wollen uns im besonderen auf die letztere beziehen und noch einmal die Verknüpfung zweier aufeinander folgender Vorgänge, die als Ursache und Wirkung angesehen werden, vom psychologischen Gesichtspunkt untersuchen.

Diese Frage, um die sich die metaphysischen Spekulationen so eifrig bemühen, scheint dagegen von den Positivisten vernachlässigt zu werden, und zwar z. T. wegen des transzendentalen Sinnes, den man ihr untergeschoben hat, indem man nach einer ersten oder absoluten oder unbedingten oder wirkenden Ursache suchte.

Ihre Bedeutung und ihr Interesse erhellt aus dem Fortschritt der Wissenschaft, wenn man bedenkt, daß:

1. in der Wissenschaft nicht alle kausalen Erklärungen für gleichwertig erachtet werden; einige sind nur eine Antwort auf die Frage, „*wie* die Erscheinung stattfinden kann", in anderen dagegen findet sich (wohlverstanden relativ) darüber hinaus auch ein „*warum*" der Erscheinung selbst.
2. Der verschiedene Wert dieser Erklärungen kann auch positiv beurteilt werden vom Gesichtspunkt des Erkenntniszweckes aus, indem nämlich in der Erkenntnis des „warum" die Möglichkeit weitergehender Voraussagen eingeschlossen ist, vor allem in bezug auf die Variationen der Elemente, die die Ursache bilden.



Ein einfaches Beispiel ist folgendes:

Man schlägt mit einem Hammer auf eine Kupferplatte; das Kupfer erwärmt sich. Damit ist gesagt, *wie* das Kupfer erwärmt werden kann.

Aber *warum* erwärmt es sich? fragt man einen Physiker, der ein Anhänger der mechanischen Wärmetheorie ist.

Er antwortet: Die Wärme ist ein Schwingungszustand der Teilchen eines Körpers; die durch das Kupfer plötzlich aufgehaltene Bewegung des Hammers wird durch den Schlag auf die Teilchen des Kupfers übertragen und diese fangen daher an zu schwingen.

Eine solche Erklärung erhebt natürlich nicht den Anspruch ein letztes Warum der Dinge zu bezeichnen; sie führt die gestellte Frage auf eine andere zurück, die unbeantwortet bleibt: „Warum wird die Bewegung durch den Schlag übertragen?" Aber gerade diese Zurückführung ist der Grund der intellektuellen Befriedigung, die damit verknüpft ist; und dieser entspricht eine genauere Kenntnis der Arten, wie ein Körper auf mechanischem Wege erwärmt werden kann.

Die Wissenschaft, die niemals auf ihre Fragen eine endgültige Antwort verlangt, begnügt sich vorläufig mit einem derartigen Warum unbeschadet der unbegrenzten Fortsetzung ihrer Reihe und findet dabei immer einen ähnlichen Vorteil.

Wir führen als weiteres Beispiel noch die Erklärung der Verschiedenheit der chemischen Prozesse bei der Bildung des Zinksulfats und der des Kupfersulfats an, der in letzter Linie auf die elementare elektrische Anziehung zwischen benachbarten Teilchen der Materie zurückgeführt wird, ohne daß dennoch darüber hinaus auch diese Wirkung selbst erklärt werden soll.

Will man nun tiefer in die Unterschiede zwischen den kausalen Erklärungen eindringen, so kann man folgendes bemerken:

Wenn man angibt, *wie* eine Tatsache zustande kommt, so spricht man damit einfach eine Beziehung zwischen zwei isolierten aufeinanderfolgenden Ereignissen aus. Wenn man aber das *Warum* angibt, so tritt dazu die Vorstellung einer *stetigen Reihe* von dazwischenliegenden (wirklichen oder fingierten) Erscheinungen.

Diese Erklärung führt also die gegebene ursächliche Beziehung zurück auf *eine Reihe von unmittelbaren oder Elementarursachen, die voneinander abhängen*, wobei die Elementarursache als etwas gedacht wird, das seiner Wirkung zeitlich *sehr nahe* ist.

Es ergibt sich hieraus, daß *die Frage nach dem Warum eine Vorstellung von den Ursachen einschließt, welche die Stetigkeit der kausalen Beziehung stillschweigend voraussetzt.*

Dieses Postulat der Stetigkeit bleibt von den Elementarursachen übrig, wenn man die fingierten Zwischenglieder zwischen den wirklichen aufeinanderfolgenden Vorgängen fallen läßt.

Wir haben bereits gesagt, daß dieses Postulat sich tatsächlich auf Grund einer umfassenden Erfahrung rechtfertigen läßt, und daß es seinerseits die wichtigsten Kriterien für die Deutung der Experimente liefert.

Hieraus geht hervor, welche Aufgabe der psychologischen Tendenz, sich die Elementarursachen vorzustellen, zufällt; indem sie gewissermaßen als Bedingung des wissenschaftlichen Fortschritts erscheint, zeigt sich, daß man mit ihr einen immer wachsenden Erfolg erzielt.

Bis zu welchem Punkte steht nun diese Tendenz mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung?

Auf unserer Erde finden Lichterscheinungen statt, die mit dem Lichte zusammenhängen, das von entfernten Sternen ausgegangen ist; Ursache und Wirkung sind Erscheinungen, die durch Millionen von Millionen von Kilometern und durch Jahrhunderte voneinander getrennt sind.



Auf weniger große, aber immer noch ungeheure Entfernungen macht sich innerhalb des Planetensystems die Anziehung der Himmelskörper geltend, und zwar in einer Weise, die aus positiven Gründen für nicht momentan gehalten werden muß.

Nun zeugen die fortwährend neu hervortretenden begrifflichen Darstellungen von einer eifrigen hypothetischen Konstruktionsarbeit, die darauf ausgeht, diese Erscheinungen durch eine stetige Kausalreihe von fingierten Zwischengliedern miteinander zu verknüpfen.

Dem Licht gibt man, da es zu seiner Ausbreitung einer endlichen Zeit bedarf, eine materielle Unterlage, den Äther, der als ein Medium betrachtet wird, durch das hindurch die Erscheinung sich stetig ausbreitet. Bei der Gravitation ist man auf der Suche nach etwas Ähnlichem in der Überzeugung, daß eine genauere Untersuchung ergeben müsse, daß sie sich nicht momentan ausbreitet.

Eine solche Argumentation könnte einen billigen Anlaß zum Lachen geben; welch ein Mangel an Respekt vor der Erfahrung von seiten derjenigen, die keinen Tag vergehen lassen, ohne vor ihr eine Verbeugung zu machen!

Und dennoch beruht die Rechtfertigung dieser Tendenz auf der umfassenderen Vergleichung anderer Erfahrungen, welche die Folgerungen aus ähnlichen Annahmen immer mehr bestätigt haben, und ferner in der Einsicht, daß *die Vorstellung der elementaren Ursachen das Gebiet der möglichen Experimente erweitert und ihnen eine Beweiskraft verleiht, die häufig ohne die in ihnen enthaltenen Hypothesen geringer wäre.*

## § 34. Sicherung und Bestätigung der impliziten Hypothesen.

Die Schwierigkeiten, die der Bestätigung der expliziten Hypothesen anhaften, sind zum Teil auf die Annahme von impliziten Hypothesen zurückgeführt worden. Daraus ergibt sich also die Notwendigkeit, die Kriterien für die Sicherung, die Bestätigung und die Korrektur dieser letzteren zu untersuchen.

Wir wollen vor allem von der *voraufgehenden Sicherung* sprechen.

Beim Aufbau einer Theorie müssen möglicherweise die Schlußfolgerungen, die in anderen Theorien auf die genaueste Weise verifiziert worden sind, stillschweigend vorausgesetzt werden. Wenn auch jene Theorien von der Erfahrung nicht vollkommen bestätigt sind, so sind sie es doch im allgemeinen *teilweise;* und wenn man die Schlußfolgerungen aus ihnen mit einem größeren Gebiete von Erkenntnissen vergleicht, so werden sie sehr wahrscheinlich und hinreichend genau, um als Grundlage einer neueren und festeren Konstruktion zu dienen.

Immerhin können die impliziten Hypothesen, die so *durch Deduktion* gesichert sind, häufig durch Hinzunahme anderer empirischer Daten, d. h. *durch Induktion*, ergänzt werden. Dieses eigentlich induktive Verfahren ist besonders wichtig, wenn es sich um die erste Phase der wissenschaftlichen Konstruktion handelt.

Für die Kriterien, deren man sich bei diesen Induktionen zu bedienen hat, muß man sich der *Regeln* von Stuart Mill erinnern, die auf die Grundsätze der Substanz und der Ursache gegründet sind (der englische Philosoph bezieht sich immer auf die Ursache). Aber nach den Bemerkungen der §§ 22, 23 ist es überflüssig hinzuzufügen, daß diese Regeln nur eine formelle Bedeutung und begrenzten Wert haben.



So wenn man z. B. von der *induktiven Methode der Übereinstimmung* spricht: „als Ursache *den einzigen* Umstand zu betrachten, der mehreren Fällen einer Erscheinung gemeinsam ist", so setzt das immer eine *Abstraktion* von unendlich vielen gemeinsamen Umständen voraus, die als unwesentlich betrachtet werden. Und das Beispiel, das hierfür zuweilen gegeben wird, worin bewiesen wird, daß die Wärme den Aggregatzustand der Körper verursacht, zeigt uns gerade den begrenzten Wert der Methode, da sich unter den vernachlässigten Faktoren der „Druck" befindet, den man bei der Verflüssigung der sogenannten permanenten Gase berücksichtigen muß, usw.

Es geht aus den vorstehenden Ausführungen hervor, daß, wenn auch die impliziten Hypothesen im voraus durch vernünftige Kriterien sichergestellt sind, besonders in den ersten Anfängen einer wissenschaftlichen Konstruktion ein Zweifel bestehen bleibt über den Wert dieser Hypothesen und über die Grenzen der Approximation, in denen sie als wahr angenommen werden dürfen. Daher entsteht die Notwendigkeit a posteriori zu bestätigen, ob und inwieweit sie tauglich sind und wo sie einer Korrektur bedürfen.

Die Bestätigung der impliziten Hypothesen wird auch von der Erfahrung geliefert, aber eher im *negativen* als im *positiven* Sinne.

Wenn eine Beziehung zwischen Erscheinungen, die stillschweigend als unveränderlich angenommen wurde, bei gewissen Beobachtungen nicht mehr als solche gelten kann, so wird ihre Veränderlichkeit sich in einem Widerspruch zwischen den Experimenten ausdrücken.

Die logischen Grundsätze, die, wie gesagt, die Bedingungen der Anwendbarkeit der deduktiven Methode ausdrücken, liefern uns so ein Mittel, um a posteriori den *Fehler* in den impliziten Hypothesen festzustellen

*relativ zu einem gewissen deduktiven System.* Es muß anderseits festgehalten werden, daß die *Übereinstimmung der Experimente*, die angestellt sind, um Lehrsätze zu bestätigen, die logisch von einer Theorie abhängen, für deren implizite Hypothesen eine Bestätigung von immer wachsender Wahrscheinlichkeit liefert.

Was die *Korrektur* der impliziten Hypothesen betrifft, die als irrtümlich erkannt sind, so kann dafür kein anderer Weg angegeben werden als der, zu den Kriterien der induktiven Sicherstellung zurückzukehren und dabei die wahrscheinlichen Teilergebnisse zu berücksichtigen, die (ungeachtet des erwähnten Fehlers) sich in der Entwickelung der Theorie finden werden. Die einzige allgemeine Regel, die hier gegeben werden kann, ist, die Assoziationen und Vergleichungen auf ein möglichst großes Gebiet zu erstrecken: die Hypothesen in bezug auf die *ganze* vorläufig als feststehend zu betrachtende Wissenschaft zu vergleichen, ist die einzige Methode, um sich über jedes einzelne der Prinzipien, die in einem gegebenen Augenblick den Grund des wissenschaftlichen Gebäudes bilden, ein Urteil zu bilden!

Es kommt hinzu, daß nicht allein durch die Vervielfältigung der Kontrollen der Fortschritt der Wissenschaft sich der Verifikation der impliziten Hypothesen einer Theorie nähert.

Während die *Deduktion* die zu verifizierenden Lehrsätze vermehrt, konstruiert die *Definition* neue Begriffe, um damit neue mögliche reale Beziehungen darzustellen, die als Invarianten angesehen werden sollen. Nun erscheint aber eine kleine Veränderung in den ursprünglich behandelten Beziehungen als eine abschätzbare Veränderung in den Beziehungen, die mit Hilfe der anderen definiert sind, und wird so einer genaueren direkten oder indirekten Kontrolle unterworfen.



Auf diese Weise erscheint die Definition als ein Verfahren, die Beobachtungsfehler zu vergrößern, das geeignet ist, den Lehrsätzen der Theorie eine Gestalt zu geben, die eine Bestätigung der aus den impliziten Hypothesen abgeleiteten Voraussetzungen gestattet, bei der die aus diesen sich ergebenden Widersprüche deutlicher werden.

## § 35. Beispiele.

Zur Erläuterung des Gesagten können einige Beispiele angeführt werden.

Der Widerspruch in den Experimenten ist das Kennzeichen, das zuweilen den Chemiker darauf aufmerksam macht, daß ein Körper, von dem er stillschweigend angenommen hatte, daß er aus einer einzigen ihm bekannten Substanz bestände, in Wirklichkeit noch irgendein anderes Element enthält; so vollzog sich in der Tat die Entdeckung einiger neuer einfacher Stoffe.

In der Mechanik bildet das Postulat der Unveränderlichkeit der Masse eine stillschweigend angenommene Hypothese, die bisher noch durch keinen merklichen Widerspruch in den Experimenten erschüttert worden ist. Wenn trotzdem diese Unveränderlichkeit heute Gegenstand eines Streites ist, so liegt das daran, daß man neben den wirklichen Bewegungen solche von ungeheurer Geschwindigkeit als möglich definiert und mit anderen Arten von Erscheinungen verglichen hat (Kap. VI).

Es ist daher die Erweiterung gewisser begrifflicher Darstellungen der Wirklichkeit mittels Definitionen, die ein Mittel zur etwaigen Korrektur der impliziten Hypothesen liefert.

## § 36. Die Krisis in der zeitgenössischen Volkswirtschaftslehre.

Es ist interessant, im Zusammenhang mit den vorhergehenden Bemerkungen die heute in der National-

ökonomie herrschende Krisis zu betrachten, bei der der Gegenstand des Methodenstreites in dieser Wissenschaft eine verschiedene Bewertung der von der klassischen Schule stillschweigend angenommenen Hypothesen ist.

Es ist bekannt, daß die klassische Schule mit ADAM SMITH den Typus des *homo oeconomicus* geschaffen hatte, durch welchen in unveränderlicher Weise die Motive festgelegt werden, die auf den Willen des einzelnen Menschen wirken, der in den Wechselbeziehungen zwischen Reichtum und Arbeit betrachtet wird.

Dieser Typus entspricht, obwohl er von den verschiedenen ethischen Triebfedern, die die menschlichen Handlungen beeinflussen und komplizieren, absieht, ziemlich gut der Vorstellung von diesen, sofern sie jene wirtschaftlichen Beziehungen zum Gegenstande haben, denen die erwähnten Komplikationen wenigstens *im Mittel* fremd bleiben.

Um den Begriff des *homo oeconomicus* zu definieren, hat die klassische Volkswirtschaftslehre einige einfache und beinahe evidente Hypothesen ausdrücklich angenommen und aus ihnen konkrete und allgemeine Voraussagen auf verschiedenen Tatsachengebieten abgeleitet.

Wir begegnen diesen Hypothesen in RICARDOS Theorie der Differentialrente.

Beim Getreidehandel z. B., für den das RICARDOsche Gesetz zuerst aufgestellt wurde, nimmt man an, daß die Produktionskosten des Getreides auf einer Reihe von Feldern gemessen werden könnten, indem man die Arbeit und das zur Bebauung nötige Kapital und wenn nötig die Kosten des Transportes auf einen gegebenen Markt berücksichtigte. Seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Herstellungspreise der Getreideeinheit auf den besagten Feldern.

Nehmen wir an, daß diese Feldfrüchte auf demselben Markte zu gleicher Zeit in den Handel kommen, und



nennen wir $a, b, c \ldots$ ihre respektiven Einheitsverkaufspreise, dann gilt:

1. Kein Käufer ist geneigt, mehr für das Getreide zu bezahlen, als der niedrigste von einem Verkäufer geforderte Preis beträgt.

2. Kein Verkäufer ist geneigt, sein Getreide unter dem höchsten von einem Käufer gemachten Angebot zu verkaufen.

Folglich haben alle Verkaufspreise das Bestreben, sich auszugleichen, und man kann als der Wahrheit sehr nahe kommend die Hypothese annehmen, daß

$$a = b = c = \cdots$$

3. Anderseits ist niemand geneigt, ein Feld mit reinem Verlust zu bestellen, so daß anzunehmen ist, daß, wenn irgendeine der Differenzen $a-\alpha$, $b-\beta$, $c-\gamma \ldots$ (dauernd) negativ wäre, der Getreidebau auf dem betreffenden Felde aufhören müßte.

Nimmt man nun die Unveränderlichkeit der Preise $a, b, c \ldots, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ an, d. h. bezieht man sich auf ein angenommenes wirtschaftliches Gleichgewicht, so hat man also:

$$a-\alpha \geqq 0, \quad b-\beta \geqq 0, \quad c-\gamma \geqq 0 \ldots$$

Demnach ergibt sich, daß jeder Bauer eine Einnahme hat, die gleich oder größer ist als der Unterschied zwischen den Herstellungskosten des Getreides auf dem eigenen Felde und denen auf dem Felde von geringstem Ertrage.

In der Tat folgt aus der Annahme

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta \ldots$$

$$b-\beta \geqq \alpha-\beta, \quad c-\gamma \geqq \alpha-\gamma \ldots$$

Diese auf die *Differentialrente* bezügliche Ableitung (die für das Gebiet des Ackerbaues und allgemeiner für irgendeine Industrie gilt) wird durch eine weitere De-

duktion vervollständigt, die sich auf ähnliche Hypothesen gründet.

Es wird angenommen, daß

4. eine Anzahl von noch unbebauten Feldern existiert, für welche die Herstellungskosten des Getreides beinahe stetig wachsen von dem Minimum $\alpha$ ab, das denjenigen unter den bebauten Feldern zukommt, die den geringsten Ertrag liefern.

Nun muß angenommen werden, daß, wenn der Getreidepreis *größer als* $\alpha$ ist, d. h. wenn $a-\alpha > 0$ (und nicht $a-\alpha = 0$), sich jemand findet, der eins der erwähnten Felder bebauen will.

So wird einerseits der Herstellungspreis des Getreides auf den Feldern geringsten Ertrages erhöht (da Felder von immer geringerem Ertrage bebaut werden), und anderseits wird der Preis des Getreides erniedrigt, indem eine größere Menge davon auf den Markt gebracht wird. Demnach gelangt man zu dem Schluß, daß „bei wirtschaftlichem Gleichgewicht der Getreidepreis das Bestreben hat, sich dem Herstellungspreise auf den Feldern von geringstem Ertrage zu nähern".

Hiermit ist das Gesetz der Differentialrente in seiner genauesten Form ausgedrückt und ergänzt durch das Gesetz, das die Beziehung des Wertes der Ware zu den Herstellungskosten des letzten Produktes ausdrückt. Es ist klar, daß dieses Gesetz in ähnlicher Weise auf andere unter verschiedenen Bedingungen industriell produzierte Waren angewandt werden kann.

Nun hat das oben aufgestellte Gesetz zahlreiche Verifikationen gestattet und gestattet sie noch fortwährend, die hinreichend genau sind, wenn man berücksichtigt, daß das angenommene *wirtschaftliche Gleichgewicht* ein Grenzzustand ist, der von der Gesellschaft niemals erreicht wird.



Dagegen stehen andere Beobachtungen mit diesen Bestätigungen in direktem Widerspruch und man kann hinzufügen, daß die Zahl der Fälle, in denen die Regel nicht erfüllt ist, heute im Wachsen begriffen ist.

Es stellt sich auf diese Weise heraus, daß die Unveränderlichkeit, die man dem *homo oeconomicus* zuschrieb, in bezug auf gewisse Deduktionen und die darauf sich stützenden Voraussagen nicht streng genug erfüllt ist.

Besonders tritt die Veränderlichkeit dieses Typus in der großartigen Erscheinung der *Assoziation* hervor. Die Vereinigung vieler Menschen, die als einfache Summation wirken sollte, entfernt sich von dem Vorausgesagten und entwickelt eine Tätigkeit, der es gelingt, die Wirkungen der freien Konkurrenz vorauszuberechnen und zu verhindern.

Die neuen internationalen Trusts legen davon beredtes Zeugnis ab.

Es gelingt der Vereinigung, auf folgende Weise bis zu einem gewissen Grade die Triebfedern zu verändern, die auf die Produzenten wirken. Während der einzelne Produzent seinen Gewinn nicht anders vergrößern kann, als indem er die produzierte Quantität vergrößert, kann die Gesellschaft, die sich eines Teils der Produktionsmittel bemächtigt hat, ihren Zweck bequemer dadurch erreichen, daß sie durch Einschränkung der Produktion das Angebot der Ware auf dem Markte vermindert, denn sie hat ein Interesse daran, nur die billigsten Produktionsmittel zu verwenden, wenn es ihr dafür gelingt, den Gewinn aus der Differentialrente zu erhöhen; außerdem kann die Gesellschaft sich zur Beherrscherin des Marktes machen, indem sie Fremde dadurch an der Produktion der Ware verhindert, daß sie droht, ihre Produkte zu einem niedrigeren Preise anzubieten und so ihre Gegner zu ruinieren, und das selbst unter zeitweiligen Opfern.

Vor allem erscheint in diesem letzten psychologischen Umstand ein neues Element, das die Vereinigung von einer „Summe von Menschen" unterscheidet, so daß die vorerwähnten Erscheinungen nicht zu erklären sind, wenn man den individualistischen Begriff des *homo oeconomicus* aufrecht erhält, selbst wenn man die eine oder andere der oben ausgesprochenen expliziten Hypothesen modifiziert.

Wir sehen in dem vorstehenden Beispiel die beiden Kriterien angewandt, die zur Bestätigung von impliziten Hypothesen dienen; der Widerspruch in den Beobachtungen offenbart auf der einen Seite die nicht strenge Unveränderlichkeit des *homo oeconomicus;* und anderseits ergibt sich diese Veränderlichkeit direkt aus dem Verhalten der wirtschaftlichen Verbände, die nach der Theorie einfach Vereinigungen von Menschen sein müßten.

Es ist nicht unsere Sache, aus den vorangehenden Betrachtungen einen Schluß zu ziehen, der den Anspruch erheben könnte, den Streit der nationalökonomischen Schulen zu entscheiden. Es genügt uns, gezeigt zu haben, daß dieser Streit (wenn man von dem absieht, was daran nicht wissenschaftlich ist) aus der Bewertung der impliziten Hypothesen der Wissenschaft entspringt.

Unter diesem Gesichtspunkt können die historische Schule, die die deduktive Methode verwirft und durch die historische ersetzt, und die mathematische, die im Gegenteil darauf ausgeht, jene Methode zu vervollkommnen und von einer *statischen Volkswirtschaftslehre* zu einer *dynamischen* übergeht, vom Philosophen als Mitarbeiter an der Schaffung einer neuen Phase der Wissenschaft angesehen werden. Dann wird die Annahme genauerer impliziter Hypothesen die Rolle der Deduktion zu erweitern gestatten, sofern man sich wenigstens zur Annahme der sozialen Theorien entschließt, nach denen



die Voraussicht der Tatsachen ständig auf diese einwirkt und an ihnen Veränderungen hervorruft.

Die Bewunderung, die uns die Bemühungen der mathematischen Nationalökonomen[1]) einflößen, welche, wie Walras und Pareto, darauf ausgehen, den Deduktionen, auf die die ökonomischen Hypothesen führen, eine genauere Form und eine weitere Entwickelung zu geben, enthebt uns unseres Erachtens nicht davon, in diesen Theorien eine richtigere Auffassung der Prinzipien zu suchen; und das größte Interesse konzentriert sich für uns in der Kritik der impliziten Hypothesen, d. h. in der Bewertung jener Elemente, denen, da sie als meßbar betrachtet werden, eine strengere Unveränderlichkeit zugeschrieben wird.

Schwierige Probleme! Und doch scheint die Entwickelung selbst der erwähnten deduktiven Theorien sie immer besser zu lösen. Begegnet man doch z. B. bei Pareto einer Ersetzung des Begriffs der „*ofelimità*", den er (1896) seinem ersten Aufbau zugrunde legte.

## § 37. Schlüsse: Der circulus vitiosus der Wissenschaft.

Betrachten wir die Gesamtheit der Kriterien für die Verifikation der explizite oder implizite den Theorien zugrunde liegenden Hypothesen.

Es ergibt sich dann aus dem Gesagten ein paradoxer Schluß, den man als den *circulus vitiosus der Wissenschaft* bezeichnen kann.

Die Verifikation der expliziten Hypothesen erfordert eine Deutung der Erfahrung, die von den impliziten Hypothesen abhängt; und diese ihrerseits werden zum *großen Teil* auf Grund anderer Theorien und expliziter

1) Für ihre Beurteilung s. V. Volterra „Giornale degli Economisti". Nov. 1901.

Hypothesen bestätigt und, wo es not tut, durch eine ausgedehntere Vergleichung der erworbenen Kenntnisse korrigiert. Der Fortschritt der Wissenschaft stützt sich also auf die Wissenschaft selbst, er ist eine *Erweiterung*, keine *Neuschöpfung*.

Gerade um diesem Zirkel zu entgehen, wurde KANT auf seine Lehre von der Erkenntnis *a priori* geführt. Und aus demselben Grunde erwächst diese Theorie von neuem in anderer Form in der heutigen französischen Philosophie, die die Prinzipien, die Regeln für die Deutung der Erfahrung, als reine *Vereinbarungen* ansieht.

Die Gelehrten würden also ebenso verfahren wie die Gesetzgeber, die dem Golde die Rolle einer die Zahlung erleichternden Ware übertragen und es deshalb zum Wertmaßstab erheben; oder vielmehr, um den Vergleich durchzuführen, die Wissenschaft wäre ein Staat mit plurimetallischer Währung, da es sich ja nicht um ein einziges Prinzip handelt!

Aber die Wahl des Goldes als Münze beruht auf dem Umstand, daß dasselbe schon einen Tauschwert hat, der mit dem anderer Waren verglichen werden kann; und bei der bimetallischen Währung hat das gesetzliche Verhältnis die Wirkung, daß das minderwertige Geld an Stelle des besseren tritt.

Auch bei den wissenschaftlichen Prinzipien ergibt sich daher die Notwendigkeit, sie als Ausdruck bereits angestellter Experimente zu betrachten, und sie zu messen und fortwährend an der Hand der folgenden Experimente zu revidieren; dieser Punkt ist auch POINCARÉ nicht entgangen. Wenn man jedoch die Dinge statt von einem formellen von einem realen Gesichtspunkt betrachten will, so erscheint es gerechtfertigt (und wir haben darauf schon hingewiesen) diese Prinzipien nicht als *Vereinbarungen*, sondern als *Annahmen* anzusehen, *die immer weiter bestimmt werden*. Auf jede Weise bleibt



die Schwierigkeit für denjenigen vollständig bestehen, der von keinem Prinzip zugeben will, daß es *vor* aller Erfahrung *gilt*. Man entgeht nicht dem Schluß, daß die experimentelle Methode die Wissenschaft erweitert, aber nicht schafft.

Wir müssen diesen Schluß als positives Faktum hinnehmen und wollen zeigen, daß dasselbe im Lichte der Kritik richtig gedeutet, nicht jenen circulus vitiosus einschließt, den wir uns als ein Paradoxon voranzustellen erlaubt haben.

In der Tat wird in jedem Augenblick der wissenschaftlichen Konstruktion ein gewisses Ganze von Kenntnissen, die mehr oder weniger wahrscheinlich sind, als erworben vorausgesetzt. Und desgleichen können wir uns bei jeder experimentellen Untersuchung, bei jeder neuen Begriffsbildung auf bereits gebildete Begriffe stützen.

So ist die angenäherte Unveränderlichkeit der Körper eine Erkenntnis, die den Untersuchungen der Physiker über die Konstanz der Masse vorhergeht. So finden sich ferner gewisse Begriffe und Anschauungen, z. B. geometrische, mechanische, physikalische, wenigstens im Keime als Besitz unseres Geistes beim Beginn der wissenschaftlichen Forschung als etwas, das durch vorhergehende gewohnheitsmäßige Erfahrungen erworben worden ist.

Der circulus vitiosus der Wissenschaft wird durch die Konstatierung beseitigt, daß die Entwickelung der Wissenschaft keinen Anfang hat, sondern sich nach rückwärts wie nach vorwärts unbegrenzt ausdehnt. Die Erwerbung der Erkenntnisse fällt nicht ganz und gar in das klare Bewußtsein und in den Bereich des Willens, sondern sie erstreckt sich auch in die unbewußten und instinktiven Assoziationen hinein.

Es genügt, daran zu denken, daß diese in gewisser Weise dem Leben angepaßt sind, um den als erworben

hingenommenen ersten Erkenntnissen einen gewissen Annäherungs- und Wahrscheinlichkeitswert zuzusprechen.

Der Fortschritt der Wissenschaft ist eine *Kette fortschreitender Approximationen*, wo aus den teilweise verifizierten *Deduktionen* und aus den Widersprüchen, durch welche der Irrtum aus den impliziten Hypothesen entfernt wird, neue *genauere, wahrscheinlichere und weiterreichende Induktionen* entstehen.

In diesem Verfahren liefern die ursprünglichen und allgemeinen Begriffe wie die geometrischen und die mechanischen, die ersten am wenigsten veränderlichen, wenn auch nicht *absolut* feststehenden, leitenden Grundsätze. Auf sie also muß sich unsere Kritik richten, um ihre reale Bedeutung und ihre psychologische Entstehung zu erklären.

Indem wir jedoch diese Prüfung den späteren Kapiteln überweisen, wollen wir vorerst einige kurze Betrachtungen über die physiologischen Probleme entwickeln, die sich an die Logik knüpfen, und die aus der Beziehung zwischen ihren beiden Seiten, der subjektiven und der objektiven, sich ergeben.

## C. Die physiologische Seite der Logik.

### § 38. Stellung des Problems.

Die zwei Arten, die Logik zu betrachten, nämlich als ein System von Gesetzen, die einen psychologischen Vorgang beherrschen, und als ein System von Bedingungen und Hypothesen, das diesem Vorgang eine Bedeutung für die wissenschaftliche Anwendung erteilt, stellen uns vor Probleme von hoher Wichtigkeit.

Wie wird die Beziehung zwischen gewissen Gesetzen des Denkens und der Erscheinungswelt, welche die objektive Gültigkeit der Logik in sich schließt, sich *erklären* lassen?



Das Wort „erklären" erhält hier einen bestimmten Sinn, wenn man den psychologischen Vorgang physiologisch betrachtet, d. h. wenn man annimmt, daß den geistigen Erscheinungen, den Assoziationen und den sie beherrschenden Gesetzen parallel verlaufende physiologische Erscheinungen, Operationen und Bedingungen, nach denen sie sich vollziehen, entsprechen.

Bei dieser Deutung verwandelt sich die *empiristische Behauptung*, nach der die logischen Gesetze durch Erfahrung erworbene Begriffe von allgemeinen Tatsachen sind, in eine *epigenetische* Ansicht von der Entwickelung der *physiologischen Funktionen;* die *kritische Behauptung*, die in den besagten Gesetzen Bedingungen a priori des Denkens erblickt, verwandelt sich in eine *präformistische* Ansicht von dem Bau der Nerven und besonders des Gehirns, in bezug auf elementare mechanische, physikalische usw. Bedingungen des Organs.

Nun ist die erste Behauptung, soweit sie sich auf das Individuum bezieht, an dem Tage überwunden worden, an dem man erkannte, wieviel das Lebewesen der Vererbung verdankt, wodurch der Gegenstand der Untersuchung von dem Individuum auf die Art überging. Die zweite Behauptung stellt sich als eine allgemeine Ansicht über das Problem dar, die zu unbestimmt ist, um als eine Erklärung der uns beschäftigenden Schwierigkeit angesprochen zu werden.

Lassen wir die weiteren biologischen Fragen, aus denen sich der Gegensatz zwischen der epigenetischen und der präformistischen Ansicht erklärt, beiseite. Für uns ist klar, daß die Organe des Denkens, wie es im Geiste eines ausgewachsenen Menschen stattfindet, Bedingungen genügt, vermöge deren der logische Prozeß gewissen allgemeinen Tatsachen entspricht. Diese Bedingungen beschränken sich nicht auf den bloßen Be-

griff dieser Tatsachen, sondern drücken die *Wirkungsweise* des Organs aus.

Wie nun auch das Organ zu dieser „Wirkungsweise" gekommen sein mag, es fragt sich, ob es möglich ist, sich von ihr eine *Vorstellung* zu machen, die diese Übereinstimmung erklärt.

## § 39. Grundlegende Hypothesen.

Sich von dem physiologischen Vorgang des Denkens eine Vorstellung machen, ist ein Problem, dessen bloßer Ausspruch tollkühn erscheinen muß! Was wissen wir denn von den allerelementarsten Erscheinungen, die ihren Sitz im Gehirn haben? Haben wir doch kaum mit einiger Sicherheit einige Funktionen lokalisiert auf Grund der anatomischen Methode der Degeneration oder der embryologischen, die auf der Myelinisation der Nervenfasern beruht.

Anderseits gehen unsere Kenntnisse über das Nervensystem nicht über ein gewisses Ergebnis hinaus, das kürzlich durch verbesserte technische Hilfsmittel bestätigt wurde; und es scheint nicht sehr wahrscheinlich, daß man, auch wenn man auf diesem Wege fortschreitet, dazu gelangt, sich von den Funktionen der Nervenzellen und -fasern eine klarere Vorstellung zu machen, wenn man sich nicht mit willkürlichen Hypothesen begnügen will.

Schon der häufige Wechsel der Meinungen über die einfachsten Fragen bezeugt den tiefen Stand dieser Untersuchungen.

Um nur ein Beispiel anzuführen, so ist es erst wenige Jahre her, daß die *Neuronentheorie* sicher begründet schien, und schon haben ihr die Forschungen von Apaty die anatomische Grundlage entzogen, während die Experimente Bethes am Carcinus Menas ihre physiologischen Behauptungen zu widerlegen scheinen.



Aber es handelt sich hier nicht darum, sich die physiologischen Elementarvorgänge vorzustellen, die sich in Gedanken umsetzen, sondern nur gewisse allgemeine Beziehungen derselben. Und das kann man in ähnlicher Weise versuchen, wie in einigen physikalischen Theorien, wo man die Erscheinungen darstellt, indem man sich auf ein in keiner Weise bestimmtes hypothetisches mechanisches Substrat stützt.

Es sei uns gestattet, zu größerer Klarheit zuerst einige Hypothesen zu machen, von denen wir uns nachher bis zu einem gewissen Grade befreien werden.

Die *erste Hypothese* ist, daß man die Bildung der Vorstellungen physiologisch als ein System von *Nervenströmen* darstellen kann, ähnlich wie sie bei den niederen Gehirnfunktionen konstatiert werden können.

Worin besteht das dadurch bezeichnete Elementarphänomen? Vollzieht sich in einer gewissen Gruppe von Zellen oder Fasern eine elektrische Entladung oder eine Reihe von metabolischen Erscheinungen? Handelt es sich um osmotische oder andere physikalische, chemische oder physiologische Erscheinungen? Das sind Hypothesen, die wir gänzlich beiseite lassen können. Unser Schema stellt also einen sehr verwickelten Zusammenhang von Erscheinungen dar, die wir Ströme nennen, und von denen wir annehmen, daß sie Zentren oder Gruppen von Gehirnzellen verbinden, durch Wirkungen und Gegenwirkungen, die auf gewissen *Assoziationsbahnen* übertragen werden.

Die *zweite Hypothese* (die wir in ihrer engsten Form aussprechen) besagt, daß bei den Prozessen, die der logischen Entwickelung entsprechen, die Ströme als scharf *lokalisiert* betrachtet werden können auf Bahnen, die während des Prozesses zwischen gewissen Gruppen von Zellen oder Fasern fest bleiben.

Diese Hypothese kann in gewissem Grade durch zwei Überlegungen gerechtfertigt werden.

Die erste ist das Prinzip, daß „der Nervenstrom die Tendenz hat, in der Bahn zu verlaufen, die er schon einmal durchlaufen hat".

Dieses Prinzip, das keine genaue Kenntnis der Nervenströme erfordert, wird von den meisten Neurologen angenommen, was auch sonst ihre besonderen Ansichten über den Bau der Gewebe sein mögen, die den Sitz dieser Erscheinungen bilden.

In der Tat liegt diese Hypothese

1. der gewöhnlichen genetischen Erklärung der Reflexe zugrunde,
2. liefert sie den leitenden Faden für die Untersuchungen über die Lokalisation im Gehirn, deren Begriff, obgleich erweitert und kompliziert durch die Berücksichtigung der Unverletztheit des Organs, dennoch immer durch eine kleine Zahl von experimentellen Resultaten bestätigt wird, die mit den Beobachtungen an einigen klinischen Fällen übereinstimmen;
3. erklärt sie gut die Entwickelung der Ersatzfunktionen, die sich bei der Exstirpation von Teilen der Hirnrinde einstellen.

Nun hat die Eigenschaft der Nervenbahnen, für die Ströme, von denen sie wiederholt durchflossen werden, leichter durchlässig zu werden, die *Tendenz*, die Beständigkeit der Assoziationsbahnen zu erzeugen, und liefert so die natürlichste Grundlage für das psychologische Gesetz der Assoziation durch Gewohnheit, wie schon seit Descartes und Locke bemerkt worden ist.[1])

1) W. James, „Prinzipien der Psychologie" ital. Übers. S. 403, sagt, daß die moderne Wissenschaft an dieser alten Erklärung nichts zu verbessern gefunden hat.



Aber dieser Tendenz wirken die mannigfachen äußeren Reize und die Einwirkungen der Gehirnströme aufeinander entgegen.

Daher dürften in einem Modell, das die ganze Reihe der Gehirnvorgänge durch ein System von Strömen darstellen soll, die Assoziationsbahnen nicht streng lokalisiert sein.

Wenden wir uns jedoch einer anderen Betrachtung zu, nämlich der allgemeinen Tatsache der *Hemmungswirkung*, die von den höheren Zentren auf die niederen ausgeübt wird.

Wenn bei einem gegebenen Vorgang eine Hemmung sozusagen die Ströme gegen die störende Wirkung der Nachbarströme isoliert, so wird es natürlich erscheinen, anzunehmen, daß sie, solange die Hemmung andauert, auf festen Bahnen lokalisiert sind.

Unsere zweite Hypothese kann also als gerechtfertigt angesehen werden, wenn angenommen wird, daß „der Behauptung eines Objektes des logischen Denkens oder der Annahme eines Begriffs eine Hemmung entspricht, die in der angedeuteten Weise auf die physiologischen Vorgänge wirkt".

Die Hypothese der Lokalisation des Gedankens bei den logischen Prozessen kann übrigens in weitem Sinne verstanden werden. Die klarste Art, sie sich vorzustellen, besteht darin, daß man die Denkobjekte auf histologisch bestimmte Teile der Hirngewebe bezieht, wie sie sich der mikroskopischen Untersuchung darbieten, d. h. auf Gruppen von Zellen oder Fasern. Aber es ist wirklich nicht nötig, der Theorie diese genaue anatomische Bedeutung zu geben; das, worauf es in den folgenden Erklärungen im Grunde ankommt, ist eine gewisse Unveränderlichkeit der Gehirnvorgänge, die während der logischen Assoziation sich zu einem komplizierteren Vorgang zusammensetzen, und eine solche Unveränder-

lichkeit läßt sich gleich gut auf verschiedene Weisen denken.

## § 40. Erklärung der Axiome.

Sehen wir zu, wie die angenommenen Hypothesen über den Mechanismus des logischen Prozesses die Beziehung zu erklären erlauben, die durch die objektive Gültigkeit der Logik zwischen den Gesetzen des Denkens und den Tatsachen impliziert wird.

Die Grundbeziehung besteht darin, daß „die wirklichen Eigenschaften der Mengen von Gegenständen bei einer gewissen Unveränderlichkeit der letzteren durch dieselben Axiome ausgedrückt werden, die anderseits die logische Assoziation beherrschen".

Diese Beziehung findet ihre Erklärung darin, daß in unserem Schema die logische Assoziation der gleichzeitigen Bildung von Strömen entspricht, die in festen Bahnen verlaufen, woraus folgt, daß für die physiologische Betrachtung des Denkens Assoziieren gleichbedeutend ist mit der Zusammensetzung unveränderlicher Gehirnprozesse.

Nach der vorstehenden Erklärung könnte die Verifikation der Axiome beim Denken von einem Beobachter experimentell konstatiert werden, der imstande wäre, die entsprechenden Gehirnvorgänge zu verfolgen und festzustellen, daß sie (wenigstens bis zu einem gewissen Grade) nicht durch den Umstand modifiziert werden, daß sie gleichzeitig stattfinden. Die *logischen Fehler* beim Denken würden von einer Schwächung der Hemmungskraft herrühren, die zur Folge hätte, daß die erwähnten Vorgänge aufeinander einwirkten und die von den Strömen durchflossenen Bahnen veränderten, was der angenommene Beobachter feststellen könnte. Diese Hypothese findet eine Bestätigung in dem psychologischen Zustand der unlogisch veranlagten Menschen



wie schon im § 26 bemerkt), die nicht imstande sind, systematisch von den Gefühlen zu abstrahieren, die gewisse Assoziationen begleiten und ihre Ergebnisse zu verändern streben.

## § 41. Über die Ursachenvorstellung.

Dieselben Hypothesen geben Rechenschaft von den wesentlichen Umständen, die die vorstellungsmäßige Seite der Ursache betreffen.

Der psychische Zustand der *Erwartung*, den wir ausdrücken, wenn wir eine Beziehung zwischen Sinnesempfindungen, die sich *bisher nicht verändert* hat, als *unveränderlich* annehmen, kann psychologisch als Reizung gewisser Gehirnzentren gedeutet werden, die der Sitz gewisser sinnlicher Bilder sind. Diese Reizung kann vermöge fester Assoziationen stattfinden, wenn die mit ihnen verknüpften sinnlichen Bilder erweckt werden.

So müssen wir uns physiologisch die Vorstellung von Wirkung und Ursache vorstellen.

Damit also eine konstante Aufeinanderfolge von Empfindungen als eine kausale Verknüpfung vorgestellt wird, ist es notwendig, daß zwischen den Bildern des früheren und des späteren Vorganges sich eine psychologische Assoziation vollzieht.

In der kausalen Vorstellung, die wir durch das Wort „wie" bezeichnen, werden zwei klar unterschiedene Bilder vereinigt; bei derjenigen hingegen, die dem Wort „warum" entspricht, haben wir eine Reihe von durch Aneinandergrenzen assoziierten Bildern. In diesem letzteren Falle stellt sich also, im Gegensatz zum ersten, die Ursachenbeziehung dar als ein in seiner Stetigkeit klar definierter Gehirnprozeß, nämlich als ein Strom oder eine Reihe von Strömen, die eine Verbindung zwischen dem Bilde der Ursache und dem der Wirkung herstellen.

Nach dem Prinzip, daß die Ströme durch ihren Verlauf die Assoziationsbahnen bestimmen, haben wir hier nicht nur die Assoziation zwischen zwei *Bildern*, sondern auch *die physiologische Bedingung* derselben. Und das erklärt das Gefühl der Notwendigkeit, das diese Assoziation begleitet.

Die vorstehenden Beobachtungen enthüllen uns den physiologischen Unterschied zwischen den beiden Arten von Kausalvorstellungen, in deren einer Wirkung und Ursache die Endglieder einer stetigen Reihe sind, während sie bei der anderen klar getrennt bleiben. Im Falle der sogenannten *metaphysischen Erklärungen* ist die stetige Reihe von Erscheinungen, die die Ursache mit der Wirkung verbinden, nicht wirklich gegeben, sondern einfach angenommen.

Die psychologische Bedeutung einer solchen Annahme ist leicht zu verstehen: sie bildet ein *verbindendes Glied* zwischen den beiden Vorgängen, die man durch eine Kausalbeziehung verknüpfen will; dieses Mittelglied ist eine Reihe von bereits hergestellten Assoziationen durch Aneinandergrenzen, an die sich die besagten Vorgänge als Endglieder anreihen.

Demnach *erkennen wir in dem Streben nach metaphysischen Erklärungen vom physiologischen Standpunkt aus den Ausdruck eines Gesetzes geringsten Kraftaufwandes, demgemäß die neuen Assoziationen, welche Kausalbeziehungen darstellen, die Tendenz haben, sich in den bereits durch gewohnte Prozesse gewiesenen Bahnen zu vollziehen.*

Dies sind die Ergebnisse einer Analyse, die mit allem Vorbehalt angestellt uns nicht die Bezeichnung tollkühn und nichtig zu verdienen scheint, selbst nicht von seiten desjenigen, der weniger geneigt sein sollte, in ihr einen Schritt weiter zur Lösung eines großen Problems zu erblicken.

# Autorenverzeichnis.


Abdank-Abakanovich 11.
Airy 135.
Apaty 252.
Arago 109.
Archimedes 147. 164.
Ardigò 31.
Aristoteles 30. 31. 124. 155. 159. 166. 200.
Avogadro 149.

Bacon 156.
Bain 79.
Beethoven 67.
Beltrami 198.
Bernard 57. 126f.
Berthold 59.
Bertrand 143.
Bessel 207.
Bethe 252.
Bode 110.
Boetius 159.
Boole 161.
Boyle 145. 148.
Broca 68.
Bütschli 59.

Cantor 25.
Carlini 135.
Carnot 12.
Cawendish 135.
Cesaro 25.
Chabry 63.
Chun 113.
Cicero 185.
Clairaut 136.
Clarke 136.
Clifford 66.
Comte 5. 7. 45. 50. 56. 65. 68ff. 79.
Coulomb 141. 143.
Cournot 120.
Croce 116.
Crookes 53.
Cuvier 56.

Dalton 149.
Dante 190.
Darboux 136.
Darwin 62. 66.
Dedekind 199.
Delage 57. 60.
De Morgan 161.
Descartes (Cartesius) 2. 10. 254.
Digest 171.
Diogenes 14.
Driesch 63.
Du Bois Reymond 6. 25f.

Emery 64.
Enriques 165. 175. 191.
Euklid 164. 169. 186. 198f.

Fano 191.
Faraday 142f.
Fechner 66.
Fiorentino 185. 214.
Frege 161.

Galilei 67. 128f. 134.
Gauß 43. 142.
Gay-Lussac 145. 148.
Graßmann 161. 186.
Guarducci 175.

Haacke 62.
Haeckel 62.
Halphen 136.
Hamilton 161.
Hegel 216.
Helmholtz 66. 73. 77. 186.
Heraklit 216.
Herbart 156. 216.
Hermite 11.
Herschell 109. 136.
Heydweiller 207.
Hilbert 24. 165. 202.
Hugo 116.
Huyghens 132.

Jahn 149.
James 254.
Jevons 127. 130. 157.

Kant 30ff. 45. 76. 124. 156. 204ff. 248.
Kepler 67. 131ff. 222.
Kirchhoff 51
Klein 100.
Kries 213.

Lambert 161.
Landolt 207.
Laplace 136f.
Lavoisier 206. 208f.
Legendre 167. 169.
Leibniz 2. 23. 161.
Le Verrier 109f.
Levi-Civita 4.
Lewes 79.
Lie 100.
Lindemann 10.
Lipmann 42.
Locke 66. 254.

Mach 51. 71.
Maclaurin 136.
Maurolikus 200.
Maxwell 52. 65. 143f. 186.
Mayer 209.
Mendeleieff 111.
Mill 76. 79. 156. 214. 238.
Monge 83.

Naville, A. 107.
Naville, E. 127.
Newton 67. 109f. 131ff. 139. 222.

Ostwald 100.

Padoa 161. 202.
Pareto 247.
Parisina 116.
Parmenides 216.
Pasch 165.
Peacock 161.
Peano 161f. 165. 186. 199. 201. 208.
Peirce 161.
Pfeffer 148.
Pflüger 63.
Picard 3.
Pieri 161.
Plücker 164.
Poincaré 42. 51. 100. 208. 248.
Poisson 139ff.

Quincke 59.

Raleigh 207.
Raoult 149.
Ricardo 242.
Riemann 198.
Romanes 66.
Roux 62f.
Russell 26.

Schiaparelli 133.
Schopenhauer 87.
Schroeder 161.
Sigwart 213.
Smith 242.
Spencer 31. 49. 62. 64. 66. 77.

Thales 48.
Thomson, W. 52. 54.
Tisserand 136.
Tocco 159.
Thomas 126.
Torricelli 106. 127. 129.

Vacca 161.
Vailati 86ff. 107. 161. 186. 200.
Van der Waals 54.
Vanni 45.
Van 't Hoff. 54. 144. 148.
Venezian 213.
Veronese 24. 165.
Verworn 59. 66.
Volterra 247.

Walras 247.
Weber 66.
Weismann 62. 64f.
Wilson 63.
Wundt 66.

Zeno 14 216.

# Sachregister.

Abplattung der Erde an den Polen 136.
Absolut 16ff. 21. (26ff. 29ff. 37. 41. 47ff. 86. 178. 204f. 211. 234. 250.
— und relativ 17ff.
Abstoßungskräfte 9. 140ff.
abstrakt 174. 186f. 190. 211.
Abstraktion(en) 48. 107. 124. 129. 137. 184ff. 187. 189. 197. 200. 206 215. 222. 239.
Abu Hassans Abenteuer 81ff.
Aggregate 60. 62. 239.
agnostischer Verzicht 6ff.
Agnostizismus 6ff. 32.
Akkommodation des Auges 87.
aktual 23.
aktuale Beziehungen 194.
aktuale und genetische Betrachtung 150ff.
Alchimie 12ff.
Algebra der linearen Substitutionen 100.
Algorithmen 24. 161f.
algorithmisch 162. 199.
Alkoholvergiftung 96.
Allgemeinheit 102. 104. 107. 112. 121. 123. 158. 216.
Analogien 133. 160.
Analyse der Sinnesempfindungen 77.
— des Gedankenvorgangs 175.
— des logischen Gedankenprozesses 166.
— eines Begriffes 178.
Analysis des Unendlichen 23.
analytisch 164. 174.
Anatomie 113.
Anfangsimpuls 133.
Animismus 57. 60.
Anisotropie des Kernes 63.
Annäherung 134f.
— der Erkenntnis 101.
Annahme(n) 120ff. 126. 128. 141. 176. 182. 193. 199. 203. 205. 207ff. 211. 215. 222. 248.
Anpassung der Sinnesorgane 87.
Anpassungsfähigkeit 143.
Anschauung 196f.
Antezedentien 214.
Anthropomorphismus 31.
Antichresis 171.
Antinomie(n) 29. 33ff. 205.
Anwendung der Logik 202—250.
Anwendungsgebiet der Theorien 150.
Anziehung(skraft) 132ff. 140ff. 237.
a posteriori 106ff. 164f. 205. 222. 239.
a priori 33ff. 43. 106ff. 134. 136. 138. 142. 163. 192. 194f. 204f. 206. 208. 217. 229. 248. 251.
Approximation(en) 137. 239. 250.
Äquivalenz 133. 139. 143. 148f. 157. 180. 188f. 199. 203. 209.
Arbeit 148f.
Architektur 118
Arithmetik 162. 198ff. 218. 220f.
Art(en) 62. 111ff. 251.
Ascidien 63.
Assoziation(en) 48. 66. 89. 91. 129f. 132. 134. 138. 151. 160. 172. 175. 189. 191f. 197. 202. 218f. 240. 245. 249. 251. 253ff. 256f.

Assoziationsbahnen 253f. 258.
Astronomie 107 ff. 121. 223.
Äther 47. 50 ff. 60. 123. 237.
Atom 52ff. 60. 123. 149. 222.
Attraktion 132. 135.
Aufeinanderfolge 104. 112. 213 ff.
Aufgaben der positiven Erkenntnislehre 71.
Aufmerksamkeitserscheinungen 87.
Auge 87.
Augenblick 90. 116.
Ausdehnung 54. 76. 125. 178.
Ausdruck äußerer psychischer Zustände 94.
Ausdrucksformen 93.
ausgeschlossenes Drittes 193.
Aussagen 190ff.
Auswahl 211.
Auswertung von Flächeninhalten 11.
Axiome 187ff. 194. 200. 202. 218f. 256ff.

Bankrott der Wissenschaft 6.
Basis der natürlichen Logarithmen(*e*) 11.
Bedingtheit 104. 107. 121.
Bedingung(en) 86. 88. 181. 183ff. 191. 201ff. 204f. 208. 211ff. 214f. 217. 220. 250f.
Bedingung der Positivität 17.
Bedingungen der Möglichkeit der Begriffe 193ff.
—, subjektive und objektive 102.
Begriff(e) 42. 60. 70ff. 105. 124f. 128ff. 137ff. 150ff. 165ff. 171ff. 175f. 177ff. 180ff. 184f. 193ff. 206. 216. 221. 224. 229. 240.
Begriffsbildung 71. 125. 138. 150ff.
Begriffselemente 215.
Begründung 73.
Beharrlichkeit 141.
Behauptung(en) 171. 251.
Beispiele impliziter Definitionen 178ff.
Beobachtung(en) 126f. 129f. 131. 137f. 156. 163. 172. 174. 176.
Beobachtungsfehler 229. 241.
Beobachtungspsychologie 66.
Beobachtungstechnik 71.
Bereich der Elemente 101.
berühren 102.
Beschleunigung 132. 134.
Beschreibungen 170f. 172.
Bestandteil(e) 125.
objektiver 35. 38. 70.
subjektiver 35. 70.
Bestandteil(e) hypothetische 120ff.
Bestätigung(en) 90. 122. 128. 197. 207. 218f. 223f. 227. 232f. 238ff.
Bestätigung der impliziten Hypothesen 238ff.
Bestätigungsproben 92.
Bestimmtheit 234.
Bestimmung des osmotischen Drucks 147f.
Bestimmungen, allgemeine 201f.
bewegen, sich 102.
Bewegung(en) 17ff. 76. 88. 105. 131ff. 175. 216. 241.
Beweis der Möglichkeit einer formalen Logik 165.
— der Realität 86. 197.
— experimenteller 197.
— logischer 196. 202.
Bewußtseinszustand, fremder 93.
Beziehungen 65. 85. 88ff. 94. 138. 143. 162. 165. 170. 174ff. 177. 181f. 187ff. 193ff. 201. 203f. 217. 224. 240.
Bilder 47. 50. 59. 62. 65. 123. 139. 142. 150. 160. 164. 172. 219. 257f.
Biochemie 56ff.



biogenetisches Grundgesetz, (Haeckels) 62.
Biologie 49. 56. 110ff.
biologische Bedeutung des Glaubens an die Wirklichkeit 98ff.
Blastomeren 63.
Blutdruck 67.
Botanik 111.
Brechung 104.

canevas de la réalité 107.
Chemie 110f. 222.
Chromosome 58ff.
Circulus vitiosus 197. 247ff.
Comte als soziologischer Metaphysiker 69ff.
consensus 94ff.
credo quia absurdum est 28ff.
culpa 212.

Darstellung durch Begriffe 197.
— grammatikalische oder symbolische 166.
— künstlerische 116.
— logische 204f.
Dasein an sich 86.
— realer Dinge in der Zeit 88.
Daten 32. 40. 42. 73. 78. 85. 124ff. 156. 173f. 210. 223. 238.
Deduktion(en) 127. 129f. 132. 151. 155. 157. 162f. 166. 173. 176. 181f. 189. 203. 205. 215. 221ff. 225. 238f. 245ff. 250.
deduktive und induktive Logik. 157f.
Definition(en) 166ff. 178ff. 240f.
— der Wirklichkeit 85ff. 101.
— des Sinnes 165.
Definitionen, explizite 174ff. 179.
definitorische Bedingung 208f.
Degeneration 252.
Delirium 96.
— tremens 96.
Denken 75. 127. 153. 155ff. 159f. 162ff. 182ff. 188. 190f. 194. 196. 201. 204. 215. 217f. 250f. 252. 255f.
Denkfehler 160.
Denkökonomie 71.
Denkprozeß 162.
Denkvorgänge 163f.
Determinismus 120. 212.
Deutung der Begriffe 196f. 224. 228.
— der Erfahrung 247f.
— der Experimente 232ff. 236.
Deutungsmittel 177.
Dialektik 155. 216.
Dichogamie 112.
Dichte 145.
Differentialrente 242ff.
Differentiation 222.
diffundible Substanz 144f.
Diffusion 145.
Ding an sich 32.
Dinge 47. 87ff. 218. 220. 223.
Disgregation 145.
Diskontinuitäten, qualitative 78.
diskret 225ff. 233.
Dispersionsvermögen der Spitzen 142.
Disposition von Experimenten 125.
Dissogonie 113.
Dissoziation(en) 175.
— der Moleküle 54.
Divinationsgabe 127.
dolus 212.
Doppelsinnigkeit 160.
Doppelsterne 136.
Dreieck 186.
Dreiteilung des Winkels 9.
Druck 143. 145ff. 224. 239.
Durchschnitt 184f. 187ff.
dynamisch 206. 209. 246.

e Basis der natürlichen Logarithmen 11.
Ebene 175f. 181. 191.
Echo 84.
Ei 62ff. 112.
Eigenschaften 218ff. 223ff. 233.
Eigentum 171. 179f.
einleuchtend 203.
Eleaten 216.
elektrisch 209.

Elektrizität 65. 76. 140ff.
Elektrostatik 144.
elektrostatische Theorie Poissons 139ff.
Element(e) 36ff. 39. 51. 61. 67. 89. 92. 101. 110. 174. 182ff. 187ff. 191f. 193. 200f. 206. 217f. 227ff.
Elementargeometrie 169. 173.
elementare Typen der Definition 185ff.
Elimination 44. 124. 151.
Embryo 63. 78.
Embryologie 56. 64. 113.
embryologisch 252.
Empfindungen 85ff. 88. 90ff. 92. 100ff. 121ff. 125. 127. 257.
Empfindungskomplex 172.
Empirismus 87. 125ff.
empiristisch 251.
Energetik 148. 209.
Energie 100. 206ff. 209f.
Entwickelungshypothese 57.
Entwickelungslehre 49. 57ff.
Entwickelungsmechanik 63.
Entwickelungspsychologie 78.
Entwickelungsstadien 137.
Enzymhypothese 64.
epigenetisch 251.
Epileptiker 97.
Erde 131. 134ff. 211. 214.
Ereignis(se) 88ff. 91. 120. 185.
Erfahrung(en) 33ff. 84. 98ff. 106ff. 122. 125. 178. 196f. 201. 204f. 207f. 212. 219. 225f. 227.
Erinnerung 90ff.
Erinnerungsfehler 91.
Erkenntnis 34ff. 45ff. 50. 70. 75. 93. 100ff. 108. 120f. 123f. 130. 139.
— a priori u. a posteriori 106ff. 150. 154. 156. 164. 178. 189. 202. 204f. 206. 215.
Erkenntnisse 36ff. 48. 50. 76. 106ff. 118. 204f. 224.
Erkenntnislehre 73. 80.
Erkenntnisproblem 13ff. 71ff. 77ff. 80.
Erkenntnisprozeß 155. 157. 202.
Erkenntnistheorie 73. 79. 106ff. 152. 155.
erklären 250f.
Erklärung der Axiome 256ff.
erlauschen 85.
Erleichterung der Voraussicht 125.
erschauen 85.
Erscheinung(en) 29ff. 51. 59. 67. 88. 104. 127. 129. 139f. 144. 206. 209. 211. 217. 222. 224. 251ff.
Erscheinungswelt 217f. 225. 250.
Erwärmung der Körper beim Schlag 103.
Erwartung(en) 86. 90ff. 93. 98ff. 257.
Erweiterung der Erkenntnis 101.
Erwerbung der Erkenntnis 127ff.
Evolution 62.
Existenz 205. 208.
Experiment(e) 125ff. 138. 143. 156f. 172. 174. 176. 197. 199. 206f. 210f. 224f. 227ff. 240. 248. 253.
Experimentiertechnik 71.
explizit 174. 181. 224f. 233. 238ff. 246f.
Exstirpation der Gehirnlappen 212.
— von Teilen der Hirnrinde 254.
Extrapolation 232.

Faktum 65. 73. 79. 85. 89. 98. 101. 103. 112. 118ff. 123. 148. 249.
Fall schwerer Körper 104. 128.
Falschheit 153f. 156. 158.
falsche Schlüsse 153f.



Faser 253. 255.
Fata Morgana 83.
Fehler 40. 49. 71. 174. 231. 239f. 256.
Fehlergesetz 41.
Fehlertheorie 43.
Figuren 167f. 175. 181.
— kariokinetische 59.
fixe Idee 96.
Fixsterne 18.
Flächeninhalte 11.
Fluida 50. 60. 140ff.
Flüssigkeit(en) 47. 140. 143. 146f. 149.
Folgerungen 31. 139. 165. 203.
Form 35. 70. 136. 140. 153ff. 158.
formal 176. 208 217f.
formaler Gesichtspunkt 174.
formale Logik und abstrakte Geometrie 164ff.
Formationsbeziehungen zweiten Grades 53ff.
Forschung 126f.
Fortpflanzung 113.
Fortschreitungsbewegung der Sonne 18.
Fundamentalgrößen 178.
Funktion(en) 212. 222. 225f. 231f. 251ff.
Furcht 99

g (Galileische Konstante) 134.
Gallium 111.
Gase 145ff. 239.
Gastheorie, kinetische 54. 145f.
Gastrulastadium 113.
Gedanke(n) 201. 215. 217. 253. 255.
Gedankenprozeß 192.
Gefahren der Sprache 16ff.
— des Historizismus 75.
„gegeben" 190ff. 199. 203.
Gegenstände 181ff. 185. 188f. 190f. 193f. 196. 199ff. 204f. 206. 215ff.
Gegenwart 89ff. 90ff.
Gegenwirkungen 253.
Gehalt 137. 143.
Gehirn 251ff.
Gehirnfunktionen 130.
Gehirnprozesse 66. 256f.
Gehirnvorgänge 67.
Gehirnwindung, Brocasche 68.
Gehörsempfindungen 85.
Gehörshalluzinationen 96.
Genauigkeit 149. 156. 174. 178. 214. 226.
Genauigkeitsgrad 138.
Generationswechsel 113.
genetisch 23. 48. 150ff. 194. 254.
Genie 127. 130.
Genie und Induktion 131.
Geologie 119.
Geometrie, analytische 10. 72. 78. 152. 161f. 164ff. 166ff. 174. 176. 181. 186. 198f.
— euklidische 10. 198f.
Geographie 110.
Gerade 167ff. 175f. 187. 191.
Geranium 111.
Gerechtigkeit 20.
Gesamtheit(en) 185. 189. 194. 218.
Geschichte 68ff. 115ff.
— der Philosophie 76.
— der Wissenschaft 76. 197.
— des Denkens 75.
geschichtliches Faktum als Invariante der Quellen 118ff.
Geschichtsphilosophie 120.
Geschichtsschreibung als Kunst und als Wissenschaft 116ff.
Geschwindigkeit 128. 132.
Gesetz(e) 104ff. 117. 126. 179f. 194. 203. 218. 250ff.
Gesetz der drei Stufen 68.
— — großen Zahlen 230ff.
— — logischen Grundbeziehungen 189f.

Gesetz des geringsten Kraftaufwandes 258.
Gesetzeswissenschaften 107.
Gesicht 84.
Gesichtsempfindungen 85.
Gesichtshalluzinationen 96.
Gesichtswahrnehmung 84.
gesunder Menschenverstand 153 f.
Gewicht 206 f.
Gewißheit 231. 233 f.
Gezeiten 136.
Glaube 84 ff. 89. 91. 94. 98 ff.
gleich 224.
Gleichheit 184. 186. 188 f. 206. 214.
Gleichgewicht 142. 146 f. 244.
Gleichungen 177 f. 222. 224.
Gleichwertigkeit 137 ff. 187.
Gleichzeitigkeit 112.
Glied, letztes 24. 41. (verbindendes) 258.
Glieder (allgemeine) 200.
Gotik 118.
Grammatik 67.
grammatikalische Logik 190.
Gravitation 131 ff. 140. 237.
Grenze (n) 23 ff. 214.
Größen 177 f. 186. 224. 226.
Grundbegriffe 170 f. 173 f. 176.
Grundgesetz, biogenetisches (Haeckels) 62.
Grundlagen der Arithmetik 199 ff.
grundlegende Hypothesen 252 ff.
Grundoperationen 182 ff. 188 f.
Grundpostulate 176.
Grundproblem 223.
Grundsätze 174. 183. 193 ff. 216 ff.
Grundsymbole 176.
Grundtatsachen, psychische 66.
Grundtypen 182.
Grundvorstellungen 193.
Gruppe 183.
Gruppe (n) von Transformationen 100 ff.
— von Zuordnungen 175.

Halluzinationen 95 ff.
Hemmungswirkung 255.
Hermaphroditismus 112 ff.
Heterogonie 113.
Hilfshypothesen 138.
Himmelskörper 7. 135 f. 237.
hinschauen 102.
Hirnrinde 98.
historisch 68 ff. 73. 88. 91 ff. 179.
Historizismus 75.
Hoffnung 99.
homo oeconomicus 242. 245 f.
hören 85.
horror vacui 106.
Hyperästhesie 130.
Hypothese (n) 52 ff. 61. 119. 121 ff. 125. 127. 129. 132 ff. 137 ff. 148. 150. 157 f. 171. 177. 191 f. 197. 202 f. 207. 223 f. 227. 232 f. 238 ff. 247. 250 ff.
hypothetisch 174.
Hysterische 97.

idealer Maßstab 178.
Idealismus 14 ff. 45. 86.
Idee, fixe 96.
Ideen 219.
—, allgemeine in der Wissenschaft 1 ff.
— assoziation 53.
Identität 189. 193. 216.
Ideographie 161.
Ignorabimus, das ewige 6.
Illusion 71. 106.
immanent 211.
Immanenz 216.
implizit 173 ff. 176. 181. 224. 233. 238 f. 246 f.
indifferent 139. 143. 148.
Individuum (duen) 183. 186. 190. 217. 251.
Induktion (en) 104. 106. 131. 141. 151 f. 155. 157 f. 200. 202. 227 f. 238. 250.
Infinitesimalrechnung 23 ff.
Inhalt 155 f. 158. 160. 176.



Integraph 11.
Interpolation (en) 229 ff.
Interpretation 229 f.
Invarianten 91. 100 ff. 119 f. 124. 193 f. 196. 204. 206. 215. 222 f. 240.
Invariantes 88 ff. 91.
Invarianz 88. 193 ff. 215. 218.
Ionen 54. 149.
Irreduzibilität 110.
isoliert 209 f.
Isomerie 54.
Isotropie 63.

Jupiter 131. 133.

Kapillarität 137.
Kategorie (n) 204.
Kausalbeziehung 258.
Kausalreihen 237.
Kausalvorstellungen 256.
Keimblätter 64.
Keimelemente 58.
Keimplasma 64.
Keimzelle 58 ff.
Kenntnisse 178.
kinetisch 54. 154 f. 209.
Klasse (n) 183 ff. 187 ff. 200. 204. 206. 219. 225 ff.
Klassifikation 113 f.
Koexistenz (en) 104. 204. 206. 215. 217.
Kohlenstoffverbindungen 53.
Kokain 96.
Kollektivpsychologie 129.
Kometen 133.
kommunizierende Gefäße 146 f.
kommutativ 189.
Kongruenz 175.
Konjunktion 183.
konkret 165. 167. 169. 172. 176. 178. 198. 206. 210. 218. 220. 232. 242.
Konsonanz 93 ff.
konstant 207. 229 f.
Konstante 40. 134. 138. 142. 207 ff.
Konstanz 207 ff. 226. 249.
Konstanz der Masse 207 ff. 249.
Konstitution 61. 64.
konstruierte logische Beziehungen 187 ff.
Konstruktion (en) 11. 50. 87. 151. 178. 196. 201. 219. 238 f.
Konversion 159 f.
Konzentration 145. 148 f.
Koordinaten 108. 199.
Korrektur der impliziten Hypothesen 240 f.
Kraft 49. 51. 128. 130. 132 ff. 140 f. 145 ff.
Kreis (e) 176. 181.
Krisis in der zeitgenössischen Volkswirtschaftslehre 241 ff.
Kriterien der Vereinbarkeit von Postulaten 197 ff.
— der Verifikation 233.
Kriterium (ien) 98 ff. 114. 123. 143. 150. 161. 211. 224. 228. 238. 247.
Kriterium der Wirklichkeit 84 ff. 95 ff.
Kritik 45 ff. 72. 74. 79. 95. 107. 129. 137 ff. 149. 151. 161 166 ff. 179 ff. 190.
— des metaphysischen Idealismus 14 ff.
kritische Perioden 27.
Kritizismus 34.
Kunst 67. 155.

Lageenergie 209 f.
Länge einer Linie 168.
Leben der Theorien 151.
— — tierischen Aggregate 62.
— des Plasmas 61.
Lebenskraft 57.
Lehre von den Zellen 56.
Lehrsätze 174.
Leiter (gute und schlechte) 140 ff.
Licht 65. 42. 76 ff. 104. 236 f.
Lichtbrechung 83.
Lichterscheinungen 51. 77. 236.
Lineal 10.
Linie 165. 167 ff. 173. 192.
Logarithmen 11.
Logik 72. 124. 127.
— reine 153—202.
Logik und Physiologie 250 ff.

Logik und Psychologie 163f.
— und Wirklichkeit 218f.
logische und psychologische Definition 171ff.
logisches Verfahren 180ff.
Lösungen 144ff.
Luftdruck 127.
Luftperspektive 39.

magnetisch 209.
Manteltiere 64.
Masse(n) 128. 141ff. 145. 223. 241. 249.
Maß 41ff.
— der praktischen Genauigkeit 174.
Maßeinheit 40.
Maßstab 178.
Materialismus 69.
Materie 39. 42. 56. 60. 100. 140. 206ff. 235.
Mathematik 162. 164f. 166. 180.
mathematische Folgerungen 165.
— Logik 161f.
— Logiker 189.
Mechanik 67. 72. 142. 152. 241.
Mechanismus 67. 256.
Medium 140. 144.
Membran 146ff.
Menge 26. 140f. 183ff. 218—220.
Mengenlehre 25.
Meßinstrumente 40.
Messung des Druckes 129.
Messungen 177f.
— geodätische 136.
Messungsprozeß 39.
Metagenesis 113.
Metamorphose 113.
Metaphysik 5. 34. 46. 48ff. 59. 69. 80. 87.
metaphysische Erklärungen 258.
Methode(n) 51. 66. 73ff. 77. 115. 126. 192. 207. 222f. 229. 239. 242.
Methodenstreit in der Volkswirtschaftslehre 246f.
Mittel 42.
— arithmetisches 43.
— arithmetisches des genauen Maßes 41.
— der Erkenntnis 139.
Modell 169. 173.
— (System von Bildern) 49. 62. 65.
Möglichkeit 122. 183. 187. 193ff. 204f.
Molekül 53ff. 149.
Mond 131. 134.
monoton 232.
Morphologie 112.
Motiv(e) 129.
Myelinisation 252.

Nationalökonomie 117. 241f.
Naturwissenschaften 72. 111ff.
negativ 140. 144. 227. 239.
Neotenie 113.
Neptun 110. 135.
Nerven 87. 251ff.
Nervenfasern 252f.
Nervenphysiologie 253f.
Nervenströme 253f.
Nervensystem 252.
Nervenzellen 252f.
Neuronentheorie 252.
nichteuklidische Theorien 198.
Nichtleiter 140.
Nichtvererbbarkeit 64.
nisus formativus 57.
nominal 181f.
normativer Charakter 163.
Notwendigkeit 105ff.
Noumenon 30ff.
Nutzen der atomistischen Hypothese 53.

Oberfläche 173.
Objekt(e) 41. 88ff. 104. 139. 164. 175f. 177. 183. 189. 195. 227.
objektiv 32ff. 40. 43ff. 50. 70ff. 204.
objektive Gültigkeit der Arithmetik 220f.
— — der Logik 218f.
— — der logischen Grundsätze 194ff.
ofelimità 247.
Ohr 84.
Ökonomie der Theorien 149ff. 208.
Ontogenese 62.
Ontologien 47ff. 49. 59.



Operationen 182ff. 187ff. 192ff. 198. 200. 218. 251.
Optik 77. 87.
optisch 83ff. 209.
Ordnung 183f. 189. 192f.
Organisation der wissenschaftlichen Arbeit 2ff.
Organismen 61.
Organismus 63. 223.
organizistische Erklärung der Lebensvorgänge 60ff.
Ovisten 63.

Pädogenese 113.
parallel 187.
Paranoiker 96.
partikulär 190.
Pasigraphie 161.
per accidens 159.
Periodizität 113.
Permanenz 208. 216.
Permutationen 192.
perpetuum mobile 8. 11ff.
Pfand 171.
Pflicht 19ff.
Phänomenalismus Machs 86.
Phänomen(on) 30. 211.
Phantasiegebilde 138f. 144.
Philosophie 4ff. 32ff. 45. 75ff. 78. 98ff. 155. 158. 216. 248.
Phylogenese 58. 62.
Physik 50ff. 56ff. 66. 74 104. 107. 114. 120. 182. 223.
physikalische Bedeutung indifferenter Hypothesen 139.
physikalisch gegebene Begriffe 177f.
— Erfahrung 196f.
Physiologie 56ff. 66. 115. 223.
physiologische Seite der Logik 250 bis 258.
Physizismus 60.
Planeten 131ff. 223. 237.
Plasma 58ff.
Polarisation des Lichtes 104.
Polygon 181. 185.
positiv 45ff. 53. 55. 61ff. 70. 80. 87. 140f. 144. 179. 205f. 227. 233f. 239. 249.
Positivismus 33. 65ff. 68ff. 79.
— biologischer 55ff.
— in Geschichte und Soziologie 68ff.
— physikalischer 50ff.
— psychologischer 65ff.
— und Metaphysik 46ff.
Positivisten 234.
positivistisch 33. 45. 50. 52. 66. 70.
Positivität 17. 61.
Postulat(e) 168. 174ff. 177. 182f. 191. 194ff. 198. 200ff. 204f.
Postulat der Erkenntnis 99ff. 219.
Postulat der Stetigkeit 234ff.
— der Theorie 224.
— der Unveränderlichkeit der Masse 241.
— der Ursache 214ff.
— des Mittels 42ff.
Potentialfunktion 182.
potentiell 33.
Präformation 62ff.
Präformationslehre 63.
präformistisch 62ff. 251.
Präsumtion 106.
Prinzip, archimedisches 146.
— cartesisches 76.
— der Energetik 209.
— der Erhaltung der Energie 12. 209.
— der formalen Permanenz 208.
— der Identität 216.
— der mathematischen Induktion 200. 202.
— der Nichtvererbbarkeit 64.
— des Widerspruchs 216.
Prinzipien 233.
— der Geometrie 161. 165.
Problem(e) 1ff. 43. 57. 62. 71ff. 74ff. 77. 88. 120. 125. 136. 149. 151f. 179. 250ff.
— der Logik 153 bis 258.
— sog. unlösbare 8.

problematischer Charakter des Lavoisierschen Gesetzes 208f.
Produktion 1. 245.
Prophetie 130.
Protisten 66.
Protoplasma 58.
Prozesse 159.
— assoziative 191ff. 195.
— dissoziative 193.
— geistige 151.
— induktive 156.
— logische 151. 182. (er) 193.
Psychologie 22ff. 65ff. 70. 87.
psychologisch 26. 28. 35. 50. 65ff. 68. 70ff. 74ff. 94. 96. 149ff. 162ff. 167. 170ff. 175. 178ff. 182ff. 193. 196f. 199. 201f. 213. 217. 234. 246. 250ff.
—er Wert des Absoluten 26ff.
Psychophysik 39.
Punkt(e) 165. 167ff. 173. 175f. 181. 191f.
$\pi$ (die Zahl) 10.
*πάντα ρεῖ* 216.

Quadratur des Kreises 8ff. 11.
qualitativ 76ff. 196. 198. 225f. 229. 233.
Qualität 76ff.
Quantifikation des Prädikats 161.
quantitativ 76ff. 196. 209. 219. 225f. 229. 233.
Quantität 76ff. 245.
— der Materie 206. 208.
Quellenkritik 68.

Radioaktivität 207.
radius vector 131f.
Räsonnement 72. 90. 126. 128ff. 153. 157f. 202.
rational 205.
Rationalismus 125ff.
Raum 208.
Raumvorstellung 78.
realer Wert der logischen Grundsätze 216f.
Realität 34. 70ff. 85ff. 126. 130. 163. 177. 194. 201.
Real- und Nominaldefinitionen 171ff.
Recht 179f. 185.
Rechtswissenschaft 179.
Reduktionsverfahren 166f.
Reflexion 104. 126.
Regeln der Deduktion 189.
Reich der Gleichheit 70.
Reihe(n) 23ff. 119. 124. 183ff. 187f. 199ff. 204. 225. 235f.
— divergente 24f.
— konvergente 24f.
Reihe(n) ohne Grenze 24.
— unbestimmte 24f.
— unendliche 24f.
— von Schwingungen 51.
Reihenfolge der Summanden 25.
Rekonstruktion 116f. 192.
relativ 17ff. 21. 197. 205. 210. 215. 221f. 240.
Relativität 178.
— der Unterscheidung von subjektiv und objektiv 37ff.
— des Absoluten 21.
Religion 67.
Resultante der Motive 129.
Resultante von Kräften 135.
Richtung einer Geraden 187.

Satelliten 131ff.
Scandium 111.
Schatz 171.
Schein 29ff. 38.
Scheinwesen 123.
Schemata 158ff. 162f.
Schlaf, hypnotischer 97.
Schlüsse 203f. 207f. 216. 232ff. 247ff.
Schmelzpunkt 225.
Schmelztemperatur 104. 149. 229.
Schmerz, fremder 93.
Schule, alexandrinische 67.
— deutsche 198.



Schule, englische empiristische 99.
— englische geometrische 161.
— historische 246.
— italienische arithmetrische 198.
— klassische 242.
— mathematische 246.
— nationalökonomische 246.
— positivistische 70.
Schwerkraft 63. 134f.
Schwierigkeiten im Begriff der Ursache 213.
Schwingungen 51.
Seestationen 115.
sehen 85ff. 94. 102. 154.
Sicherung der impliziten Hypothesen 238ff.
Siedetemperatur 104. 149. 229.
singulär 190.
Sinne 102.
Sinnesempfindungen 77. 85.
Sinnesgegenstände 219.
Sinnesorgane 87.
Sinnestäuschungen 71. 82ff.
Sinneswahrnehmung 126.
Skeptizismus 75. 205.
Sonne 121. 131. 133.
Sophismen 159f.
sozial 45. 69ff. 80. 94f. 100. 116f. 150. 179. 213. 246.
Soziologie 68ff. 117.
Spektralanalyse 7.
Spekulation(en) 6. 33. 46. 87. 213. 234.
Spermatisten 63.
Spermatozoon 63. 112.
Spielschachtel 35.
Sprache 16ff. 67. 117. 158ff. 167.
Stein der Weisen 8.
Sternschnuppen 133.
stetig 225ff. 234ff.
Stetigkeit 234ff.
Stetigkeit der Kausalreihen 236f.
Stetigkeitsvoraussetzung 229.
Störungen 135f.
Strahlungen 208.
Strenge 204f.
streng logischer Aufbau einer Theorie 166.
Ströme als scharf lokalisiert betrachtet 253.
Struktur des Plasmas 60.
Strukturformeln 53. 223.
Subjekt 41. 190. 217.
subjektiv 32. 36ff. 43ff. 45. 48. 51ff. 70ff 86. 173. 202f.
Subjektives und Objektives bei der Messung 38ff.
Subjektiv und Objektiv im Aufbau der Wissenschaft 43ff.
Substanz(en) 29ff. 47. 204. 216. 234. 238.
substituierbar 184.
Substitutionen 100.
Sukzession(en) 204. 217.
Supposition 100. 185. 193. 195.
Symbole 174. 176.
symbolische Logik 194.
symbolische und psychologische Logik 163ff.
symmetrisch 144.
Synthese 178.
synthetisch 57. 91ff. 154f. 204. 206.
System(e), 5. 47ff. 57. 65. 130f. 139. 142. 145. 150. 161. 165. 174. 176f. 179. 188f. 194. 196. 203. 209f. 221. 223f. 240. 250f.
Systematik 112.

Tastempfindungen 85.
Tastsinn 84.
Tatkraft 99.
Tatsache(n) 70ff. 80ff. 101ff. 107ff. 120ff. 176f. 203ff. 207. 211ff. 215ff. 220f. 242. 251. 256.
Tatsachenbegriff 71. 251.
Tatsachenerkenntnisse 45. 72.
Tatsachenhypothesen 61ff. 65. 122.
Tatsachen und Gesetz 104.
Tatsachen und Theorien 81ff.

Täuschungen, optische 83ff.
Tausend und eine Nacht 81ff.
Temperatur 145. 148. 178. 224.
Theorie(n) 81—125. 128ff. 137ff. 144ff. 149ff.
— allgemeine über den Bau der Keimzellen 59.
— äquivalente 51.
— atomistische 54.
— biologische 62.
— deduktive 171.
— desAnimismus57.
— epigenetische 63.
— mechanische des Lichtes 77.
— metaphysische 50.
— mikromeristische 60.
— organizistische 60.
— physiko-mathematische 177.
— positive 61.
— präformistische 63.
thermisch 209.
Thermodynamik 12. 149.
Thermometer 178.
Tierphysiologie 114.
Tonalität 67.
Transformationsgruppen 100.
Transformation von Theorien 164.
transitiv 189.
transzendent 21ff. 25. 32ff. 44. 48ff. 61. 80. 86. 184. 192.
transzendente Prozesse 22ff.
transzendental 41. 107. 124. 208. 234.
Transzendentalismus 49.
Traum und Wirklichkeit 81ff.
Trennung(en) 183.
Trugschlüsse 160. 216.
Trust(s) 245.
Typus 225f.

Übereinstimmung der Experimente 240.
Überlegung(en) 42. 126. 128. 154. 163. 171. 217. 221. 226. 254.
Überzeugung 99. 206.
Umformung(en) 177. 191. 202f.
umkehrbar 203.
Umkehrung 184.
Umlaufszeiten 131.
Umschreibung 170.
Unbekannte, das 31ff.
Unbeständigkeit des Homogenen 49.
Unbestimmtheit 156f.
undefiniert 175. 177.
unendlich 23ff. 191f. 210.
Unendlichkeit der Welt 48.
unendlich klein 23ff. 231.
unerkennbar 47. 86.
Universalität des Systems 48.
unlogisch 153f. 256.
Unordnung 154.
unstetig 226ff.
unstreng 166. 173. 205. 215.
Unteilbarkeit des Atoms 53.
Unterschied zwischen subjektiv und objektiv nach Kant 32ff.
— — — — positiv betrachtet 34ff.
Unterschiede 123. 184.
Unveränderlichkeit 183. 188. 196. 205ff. 208ff. 215f. 220ff. 241. 246f. 249. 255f.
Unvollständigkeit 177.
unwahrscheinlich 228.
unwirkliche Dinge 87.
Unwirkliches 91.
Unwirklichkeit 99.
Unzulänglichkeit der Logik als Erkenntniskriterium 154ff.
Unzulänglichkeit der physiologischen Psychologie 66ff.
Uranus 109.
Ursache(n) 128f. 151. 204f. 210ff. 223. 234ff. 238f. 257f.
Ursache und Wirkung 211. 234. 237. 257f.
Ursachenvorstellung 257f.
Urteil(e) 159. 190f. 194. 203. 206.

Vakuum 140. 145.
Variation(en) 57. 62. 135. 235.
— nervöser Tonalität 67.
Varietäten 111.
Verallgemeinerung des Experiments 227f.
Veränderlichkeit 219. 222f.
Veränderung der Begriffe 151.
Veränderung(en) 209. 212. 214ff. 221.
Verantwortlichkeit 212f.
Verbindung(en) 183. 222f.
Verdoppelung des Würfels 9.
Vereinbarkeit 183. 195ff. 202.
Vereinbarung(en) 209. 248.
Vereinigung 183. 185. 187ff. 192. 215.
Vererbung 57. 64ff. 151. 251.
Vergangenheit 91. 115ff.
Vergleichung(en) 163. 189. 240.
Verifikation(en) 127. 130. 203. 215. 222. 226. 229. 232f. 240. 244. 247. 256.
Verknüpfungen 85. 122. 139. 234. 257.
Verkürzung der Polarachse 136.
Vernunft 80.
verschieden, Verschiedenheit 193ff.
Versuch(e) 196f. 206ff. 212. 229ff. 233.
Verteilungsgesetz 142f.
Vertrag 171.
Verwandlung der Metalle in Gold 8, 12ff.
Verwerfung der Psychologie im Systeme Comtes 65.
Vieldeutigkeit mechanischer Erklärungen 51.
Volkswirtschaftslehre 241ff.
vollständige und unvollständige Induktion 227.
Volumen 145f. 178.
voraufgehende Sicherung 238.
Voraussage(n) 38. 70. 98ff. 116f. 129f. 137f. 143. 218. 220. 235. 242. 245.
Voraussetzung(en) 125. 199. 201. 203.
Voraussetzungen im Begriff der Wirklichkeit 87ff.
Voraussicht 36. 38. 42. 124f. 150. 221f.
Vorgänge in der Hirnrinde 98.
—, physikalisch-chemische 56.
Vorgänge, physiologische 56.
—, psychologische 96.
Vorstellung(en) 30. 36ff. 50. 52. 55. 60. 87. 91ff. 105ff. 149. 164. 167. 169f. 172ff. 193. 206. 213. 216. 252.
vor und nach 193.

Wahrheit 99. 116. 153ff. 156. 158. 163. 216.
Wahrnehmung(en) 89. 91. 93. 122. 173. 220.
Wahrscheinlichkeit 228ff. 233. 240.
Wärme 76. 148f. 209. 235. 239.
Wärmeempfindung(en) 178.
Wasser als Ursprung aller Dinge 48.
Wellenlänge 42.
Welt, physikalische und metaphysische 138.
Weltall 216.
Welten 223.
Wert 187. 216f.
— der Philosophie 4ff.
— der wissenschaftlichen Erkenntnis 123f.
Werturteile 123.
Wesen, einzellige 60.
— (= Substanz) 29ff.
Wesenheiten 47.
Wesen und Schein 29.

Widerspruch 193. 195. 197. 216. 241. 250.
Widerspruchslosigkeit 196ff.
wie und warum 234ff. 257.
Willen 87. 93. 97ff. 105ff. 129. 179. 195. 212.
Willenshandlungen 87.
Willenskrisen 28.
Willensregungen 91ff. 100ff.
— u. Empfindungen als gleich betrachtet 92.
— als ähnlich betrachtet 92.
Willkürlichkeit 125. 150.
Wirkliches 85ff. 91. 100. 192. 196.
Wirklichkeit 38. 43. 48. 81. 84ff. 89ff. 94ff. 98ff. 139. 160. 177. 196. 202f. 204f. 206. 215f. 217ff. 236.
— als Invariante 100ff.
Wirklichkeitsglaube 94.
Wirklichkeitskriterium 95ff.
Wirklichkeitsproblem 86ff.
Wirkung (en) 211. 253. 257.
Wirkungsweise 252.
Wirtschaftslehre 187.
Wissenschaft 1. 4. 6. 43ff. 67ff. 70. 76ff. 80. 124ff. 150f. 154. 171. 174. 176. 197. 205. 210. 219. 234f. 247ff.
— und Philosophie 4ff.
Wissenschaften 221.
— biologische 55ff.
— historische und soziologische 68ff.
— juristische 212.
— physikalische 50ff.
— psychologische 70.
— soziale 70. 223.
wissenschaftliche Bedeutung astronomischer Entdeckungen 108ff.
Wollen 70. 98.
Worte 162. 182.
Worterklärung 172.
Wortschema 158ff.

Zahl (Begriff) 42.
— $\pi$ 10.
— $e$ 11.
Zahlen 230ff.
—, ganze 198.
Zahlsystem 230ff.
Zählen 199.
Zählsystem (dyadisches) 201.
Zeichen 158ff. 161ff. 165. 182. 223.
Zeichenlexikon 162.
Zeit 23. 88ff. 193f. 223.
Zelle 56ff.
Zellen 253f.
Zellenlehre 56ff.
Zellkern 58.
Zellplasma 63.
Zentralkräfte 137.
Zentrifugalkraft 132.
Zeugung 57. 113.
Zirkel 10.
Zoologie 111ff. 114. 172. 186.
Zuchtwahl 151.
Zufall 126.
Zufallstheorie Cournots 120.
Zukunft 90ff.
Zuordnung (en) 175. 184. 192.
Zusammenfassung 124.
Zusammenhang der biologischen Wissenschaften 114f.
Zusammenhang der Erkenntnis als Kriterium der Wirklichkeit 91ff.
Zusammenhang, physikalischer 209.
Zusammenhänge zwischen Willensregungen und Empfindungen 100ff.
Zweck 19ff. 68.
— heiligt nicht die Mittel 20.
— der psychologischen Forschung 68.
Zweifeln 97.
Zug 143.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

**Verlag von G. B. Teubner in Leipzig und Berlin**

**Cornelius, Dr. Hans,** Professor an der Universität München, Einleitung in die Philosophie. [XIV u. 357 S.] gr. 8. 1902. Geh. *M* 4.80, in Leinw. geb. *M* 5.60.

„Es kann nicht die Aufgabe einer Rezension dieses bedeutenden und inhaltsschweren Buches an dieser Stelle sein, alle philosophischen Wege aufzuzeigen, die der Verfasser mit großer Sorgfalt und wissenschaftlicher Gewissenhaftigkeit durchgeht. Der Umstand jedoch, daß das Buch sich nicht ins einzelne der Fachwissenschaft und Fachpolemik verliert, sondern in einer in Ansehung des Gegenstandes leicht verständlichen Sprache und zugleich in liebenswürdiger Weise, die hier und da auch die Wiederholung dem rekapitulationsbedürftigen Leser zuliebe nicht scheut, seine Themata abhandelt, berechtigt zu der lebhaften Mahnung an alle irgendwie philosophisch Interessierten, nicht daran vorüberzugehen."
**(Theologischer Literaturbericht.)**

—— Psychologie als Erfahrungswissenschaft. [XV u. 445 S.] gr. 8. 1897. Geh. *M*. 10.—.

„Zu den an erster Stelle stehenden Leistungen der psychologischen Wissenschaft, auf welche diese Namen hinweisen, gehört auch das vorliegende Werk ... An neuen ‚Psychologien' war in den letzten Jahren gewiß kein Mangel, die aber großenteils sich mehr als Zusammenfassungen bereits bekannter Tatsachen und Standpunkte, denn als selbständige Darstellungen zu erkennen gaben, und vielfach die eigentlich wichtigen, prinzipiellen Fragen der Psychologie hinter Einzelheiten zurücktreten ließen. Im Gegensatz hierzu sucht das vorliegende Werk überall gerade diese prinzipiellen Fragen der Psychologie zu beantworten und weiß, bei strikter Wahrnehmung der empirischen Methode, den Mechanismus der Bewußtseinsvorgänge in überzeugender Klarheit von den elementarsten bis zu den kompliziertesten Prozessen auf Grund einer Reihe wesentlich neuer Gesichtspunkte und Betrachtungsweisen vor uns zu entwickeln."
**(Allgemeine Zeitung.)**

—— Einleitung in die Erkenntnistheorie für Naturwissenschaftler. [ca. 20 Bogen.] gr. 8. In Leinw. geb. [In Vorbereitung.]

**Emden, Dr. R.,** Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. [VI u. 498 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. *M* 13.—.

Untersuchungen über den Bau und die fortschreitende Entwicklung gasförmiger Himmelskörper liegen nur in einigen, z. T. schwer zugänglichen Abhandlungen vor, von denen in erster Linie diejenigen von H. Lane, W. Thomson, G. Darwin und A. Ritter zu erwähnen sind. Verfasser hat diese Untersuchungen neu aufgenommen, von möglichst allgemeinen Gesichtspunkten aus durchgeführt und die erhaltenen Resultate in Form eines kurzen Lehrbuches niedergelegt. Die notwendigen mechanischen Quadraturen sind sehr exakt ausgeführt; dadurch ist ein wertvolles Zahlenmaterial als Grundlage weiterer Forschung gewonnen. Der 2. Teil des Buches behandelt die Anwendungen dieser Untersuchungen auf kosmische Staubmassen, Nebelflecke, die Erde nebst ihrer Atmosphäre und die Sonne. Die Strahlenbrechung in einer kugelförmigen Gasmasse, die durch innere Gravitation zusammengehalten wird, ist eingehend behandelt, was mit Hinblick auf einige neuere Ansichten über die Strahlenbrechung auf der Sonne von besonderer Wichtigkeit sein dürfte.

**Galilei, Galileo,** Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von E. Strauß. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. Geh. *M* 16.—.

Das Buch verdient als Quelle der vielen landläufigen Argumente für das kopernikanische System, als farbenprächtiges Gemälde des Ringens mittelalterlicher mit neuzeitlicher Weltanschauung, als Ausgangspunkt für eine Menge physikalischer Untersuchungen der Folgezeit die höchste Beachtung. Die Darstellung ist so klar, daß die meisten Partien einem Primaner völlig verständlich sind und für ihn eine belehrende und anregende Lektüre bilden würden, wie andererseits der Kulturhistoriker in keiner Geschichte der Philosophie eine anschaulichere Schilderung vom Stande der damaligen Naturphilosophie finden kann. — Eine Einleitung, die unter anderem eine biographische Skizze Galileis enthält, und eingehende historische und sachliche Anmerkungen werden das Verständnis und die Würdigung des Werkes erleichtern und mancherlei irrige Ansichten des Verfassers berichtigen; auch Irrtümer, wenn als solche erkannt, und namentlich Irrtümer eines Mannes wie Galilei sind belehrend und verschaffen Einblick in die Geschichte der Wissenschaft.

**Günther, Ludwig,** Direktor in Fürstenwalde, die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers, besonders seiner Gesetze und Probleme. Mit 13 Figuren, 1 Tafel und vielen Tabellen. [XIV u. 156 S.] 8. 1909. Geh. *M* 2.50.

„... Die schwierige Aufgabe, Keplers Lebensarbeit gemeinverständlich darzustellen und ihr Verhältnis zum heutigen Stande der Astronomie aufzuhellen, ist dem Verfasser trefflich gelungen. Ein knapper, klarer Überblick der Alten bis zu Kepler schafft den historischen Hintergrund und damit besseres Verständnis für die im folgenden ausgeführten Gesetze und Kräfte der Sternenwelt in ihrem Zusammenhange. Beigefügte Abbildungen und Tabellen erleichtern das Verständnis. Besonders lichtvoll ist dargestellt, welche Wege Kepler zur Erforschung der Himmelskörper einschlug, um sein großes Ziel zu erreichen. Lehrer seien auf dieses Buch ganz besonders aufmerksam gemacht." (Badische Schulzeitung.)

**Hensel,** Dr. **Paul,** Professor an der Universität Erlangen, Hauptprobleme der Ethik. Sieben Vorträge. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 1.60, geb. *M* 2.20.

Der Verfasser geht vom Wege der Ethik als der Wissenschaft vom menschlichen Handeln aus, die uns dessen geschichtliche Entwicklung und seine Gesetze erkennen lehrt. Gegenüber dem Utilitarismus hebt er hervor, daß nicht der Erfolg für den Wert unserer Handlungen maßgebend sein kann, sondern die Gesinnung, durch die sie veranlaßt werden. Die Gesinnungsethik allein bietet in dem pflichtmäßigen Handeln einen sicheren Maßstab der Beurteilung. Je dringender die Gegenwart eine Auseinandersetzung mit den verschiedenen geistigen Strömungen fordert, je mehr die Persönlichkeit wieder nach festen Normen des Handelns verlangt, um so mehr Aufmerksamkeit wird man diesem Buche schenken müssen, das diese Fragen in klarer und ansprechender Weise behandelt.





**Holzmüller,** Dr. **Gustav,** Professor in Hagen i. W., elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte. Mit 8 Figuren im Text. [VI u. 98 S.] 8. 1906. Geh. *M* 1.80.

Die kosmischen Betrachtungen beziehen sich zunächst auf die Himmelsmechanik. Die Ableitung der drei Keplerschen Gesetze aus der Newtonschen Anziehungshypothese gelingt ihm auf elementarem Wege. Auch das Gesetz für kleine Störungen wird einfach entwickelt. Mit den mechanischen Betrachtungen werden sofort die wärmetheoretischen Entdeckungen von Rob. Mayer und H. v. Helmholtz und andere physikalische Probleme behandelt. Der gegenwärtige Zustand der Sonne wird nach den neuesten Forschungen dargestellt. Die Stoffauswahl geschah in der Absicht, eine kritische Besprechung der von Kant und Laplace aufgestellten Theorien über die Bildung des Sonnensystems zu ermöglichen, die durchaus ablehnend ausfällt.

„... Wie prächtig ist das Büchlein, das da der einstige Leipziger Dozent auf Grund eines Würzburger Ferienkursus herausgibt! Wem eine solche Darstellung nicht Lust und Mut zur näheren Beschäftigung mit der neueren Philosophie macht, dem wird kaum etwas anderes helfen. Edle und doch allzeit klare Bildlichkeit des Ausdrucks, eine übersichtliche Disposition, vorsichtiges und doch aufrichtiges Urteil: alles hilft zusammen, um die Lektüre zur Freude zu machen."
(Wissenschaftliche Beilage der Leipziger Zeitung.)

**Lipps,** Dr. **G. F.,** Professor an der Universität Leipzig, das moderne Bildungsideal und der wissenschaftliche Schulunterricht. [ca. 300 S.] gr. 8. Geh. [Erscheint Ostern 1910.]

**Petzoldt,** Dr. **Joseph,** Oberlehrer am Gymnasium zu Spandau, Einführung in die Philosophie der reinen Erfahrung. Erster Band: Die Bestimmtheit der Seele. [XIV u. 356 S.] gr. 8. 1899. Geh. *M* 8.—. Zweiter Band: Auf dem Wege zum Dauernden. [VIII u. 342 S.] gr. 8. 1904. Geh. *M* 8.—.

Das Buch bietet eine Einführung in den Anschauungskreis, als dessen hauptsächlichste Vertreter Richard Avenarius und Ernst Mach zu gelten haben. Ihre Philosophie, insbesondere die schwer verständliche Kritik der reinen Erfahrung von Avenarius, leicht zugänglich zu machen, ist eine der Hauptaufgaben des Werkes. Es gewinnt aber auch durch die eingehende Begründung und Anwendung der beiden Prinzipien der Eindeutigkeit und der Tendenz zur Stabilität die Mittel zur Beurteilung, Um- und Weiterbildung jener Philosophie.

**Riehl,** Dr. **Alois,** Professor an der Universität Berlin, zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Acht Vorträge. 3., durchgesehene und verbesserte Auflage. [VI u. 274 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M* 3.—, in Leinwand geb. *M* 3.60.

„Riehls Buch gehört zu denen, welche eine Empfehlung nicht mehr nötig haben. In meisterhafter Darstellung führt er uns auf historischem Wege zu dem Punkte philosophischer Entwicklung, den er als Höhepunkt ansieht: Kant. Aber die Philosophie darf auch bei Kant nicht stehen bleiben, denn die besonderen Probleme werden ihr von der forschenden Wissenschaft geliefert. Und diese exakte Wissenschaft beherbergt heute

den philosophischen Geist. Rob. Mayer, Helmholtz, Hertz sind seine Vertreter, und das Energiegesetz ist ‚der größte Fortschritt der allgemeinen Wissenschaftslehre seit der Kritik der reinen Vernunft'. Auf Grund solcher Anschauung rückt Riehl auch die Erörterung über naturwissenschaftlichen und philosophischen Monismus in den Mittelpunkt."

(Straßburger Post.)

**Volkmann, Dr. P.**, Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Fähigkeiten der Naturwissenschaften und Monismus der Gegenwart. [38 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 1—.

Während der Verfasser in einer früheren Rede den naturwissenschaftlichen Monismus einer Betrachtung unterzogen hat, wendet er sich in dem vorliegenden Vortrage dem vulgären und philosophischen Monismus zu. Im besonderen finden sich behandelt: Die Rolle des entwicklungsgeschichtlichen Gedankens und der Formalismus im Monismus.

—— Die materialistische Epoche des neunzehnten Jahrhunderts und die phänomenologisch-monistische Bewegung der Gegenwart. [30 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 1.—.

Die Rede nimmt Stellung zu einer Reihe aktueller Fragen; von besonderem Interesse ist vielleicht als Beitrag zu einer Psychologie der Völker die Behandlung von Kant als Typus des deutschen Idealismus, von Laplace als Typus des französischen Materialismus. Wie man Frankreich als Wiege des Materialismus bezeichnen kann, wird man von einer Empfänglichkeit der germanischen Rasse für den Monismus sprechen können.

**Voß, Dr. A.**, Professor an der Universität München, über das Wesen der Mathematik. [98 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 3.60.

„... Den größten Genuß wird die Schrift den Mathematikern selbst bereiten, insbesondere durch den neben der eigentlichen Rede einhergehenden, ihr an Umfang fast gleichen kritischen Apparat, in welchem der Autor zu vielen strittigen Fragen, vornehmlich zu solchen, die dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie angehören, Stellung nimmt. Dadurch erhebt sich die kleine Publikation über den Rahmen einer bloßen Gelegenheitsschrift und erlangt bleibenden Wert."

(E. Czuber in der Neuen Freien Presse.)

**Weinstein, Geheimer Regierungsrat, Professor Dr. B.**, Privatdozent an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen, gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. ℳ 9.—.

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften. Der Ableitung eines Systems der Grundlagen geht die Untersuchung über ihren Inhalt voraus und folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, welche für die Ermittelung der Grundlagen maßgebend sind. Bei der Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Innenwelt kommen insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen: der Begriffder Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substanzialität und Ursächlichkeit, sowie das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Welterhaltung und Weltentwicklung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen.





# DIE KULTUR DER GEGENWART

## IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

### HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

In 4 Teilen. Lex.-8. Jeder Teil zerfällt in einzelne inhaltlich vollständig in sich abgeschlossene und einzeln käufliche Bände (Abteilungen).

Teil I: **Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.** I. Hälfte. Religion und Philosophie, Literatur, Musik und Kunst (mit vorangehender Einleitung zu dem Gesamtwerk).

Teil II: **Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.** 2. Hälfte. Staat und Gesellschaft, Recht und Wirtschaft.

Teil III: **Die naturwissenschaftlichen Kulturgebiete.** Mathematik, Anorganische und organische Naturwissenschaften, Medizin.

Teil IV: **Die technischen Kulturgebiete.** Bautechnik, Maschinentechnik, industrielle Technik, Landwirtschaftliche Technik, Handels- und Verkehrstechnik.

Die „Kultur der Gegenwart" soll **eine systematisch aufgebaute, geschichtlich begründete Gesamtdarstellung** unserer heutigen Kultur darbieten, indem sie die Fundamentalergebnisse der einzelnen Kulturgebiete nach ihrer Bedeutung für die gesamte Kultur der Gegenwart und für deren Weiterentwicklung in großen Zügen zur Darstellung bringt. Das Werk vereinigt eine **Zahl erster Namen aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis** und bietet Darstellungen der einzelnen Gebiete jeweils aus der Feder des dazu Berufensten **in gemeinverständlicher, künstlerisch gewählter Sprache auf knappstem Raume.**

„... Wenden wir aber unseren Blick zu den einzelnen Leistungen, die hier in reichlichster Fülle geboten sind, dann wissen wir in der Tat nicht, was wir herausgreifen und nennen sollen. Aus jedem der angedeuteten Gebiete hat ja ein Meister seines Faches das Wichtigste kurz und übersichtlich gegeben, bald aus seiner Geschichte das Wesen des behandelten Gegenstandes erläuternd, bald ihn in mehr prinzipieller und schematischer Form vor dem Leser ausbreitend. Abgesehen von dem Wert der hervorragenden Einzelleistungen erhält das ganze Unternehmen, zu dem es gehört, seinen besonderen Wert dadurch, daß es versucht, unser Wissen und Können zu einer möglichst systematischen Einheit zu verarbeiten. Damit wird es einem gebieterischen Bedürfnis unserer aus der seelischen Zerklüftung zur Einheit strebenden Zeit gerecht und steht so da als ein bedeutsames Zeichen der Zeit."

**(Deutsche Zeitung.)**

**Probeheft und Sonder-Prospekte** über die einzelnen Abteilungen (mit Auszug aus dem Vorwort des Herausgebers, der Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, dem Autoren-Verzeichnis und mit Probestücken aus dem Werke) werden auf Wunsch umsonst und postfrei vom Verlag versandt.

# DIE KULTUR DER GEGENWART

Von Teil I und II sind erschienen:

**Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart.** (I, 1.) Bearbeitet von W. Lexis, Fr. Paulsen, G. Schöppa, A. Matthias, H. Gaudig, G. Kerschensteiner, W. v. Dyck, L. Pallat, K. Kraepelin, J. Lessing, O. N. Witt, G. Göhler, P. Schlenther, K. Bücher, R. Pietschmann, F. Milkau, H. Diels. [XV u. 671 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 16.—, in Leinwand geb. *M.* 18.—

**Die orientalischen Religionen.** (I, 3, 1.) Bearbeitet von Edv. Lehmann, A. Erman, C. Bezold, H. Oldenberg, J. Goldziher, A. Grünwedel, J. J. M. de Groot, K. Florenz, H. Haas. [VII u. 267 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 7.—, in Leinwand geb. *M.* 9.—

**Geschichte der christlichen Religion.** Mit Einleitung: **Die israelitisch-jüdische Religion.** (I, 4, 1.) Bearbeitet von J. Wellhausen, A. Jülicher, A. Harnack, N. Bonwetsch, K. Müller, A. Ehrhard, E. Troeltsch. 2. stark vermehrte und verbesserte Auflage. [X u. 792 S.] Lex.-8. 1909. Geh. *M.* 18.—, in Leinwand geb. *M.* 20.—

**Systematische christliche Religion.** (I, 4, II.) Bearbeitet von E. Troeltsch, J. Pohle, J. Mausbach, C. Krieg, W. Herrmann, R. Seeberg, W. Faber, H. J. Holtzmann. 2. verbesserte Auflage. [VIII u. 279 S.] Lex.-8. 1909. Geh. *M.* 6.60, in Leinwand geb. *M.* 8.—

**Allgemeine Geschichte der Philosophie.** (I, 5.) Bearbeitet von W. Wundt, H. Oldenberg, J. Goldziher, W. Grube, T. Inouye, H. v. Arnim, Cl. Baeumker, W. Windelband. [VIII u. 572 S.] Lex.-8. 1909. Geh. *M.* 12.—, in Leinwand geb. *M.* 14.—

**Systematische Philosophie.** (I, 6.) Bearbeitet von W. Dilthey, A. Riehl, W. Wundt, W. Ostwald, H. Ebbinghaus, R. Eucken, Fr. Paulsen, W. Münch, Th. Lipps. 2. Auflage. [X u. 435 S.] Lex.-8. 1908. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die orientalischen Literaturen.** (I, 7.) Bearbeitet von E. Schmidt, A. Erman, C. Bezold, H. Gunkel, Th. Nöldeke, M. J. de Goeje, R. Pischel, K. Geldner, P. Horn, F. N. Finck, W. Grube, K. Florenz. [IX u. 419 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die griechische und lateinische Literatur und Sprache.** (I. 8.) Bearbeitet von: U. v. Wilamowitz-Moellendorff, K. Krumbacher, J. Wackernagel, Fr. Leo, E. Norden, F. Skutsch. 2. Aufl. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die osteuropäischen Literaturen und die slawischen Sprachen.** (I, 9.) Bearbeitet von A. Bezzenberger, A. Brückner, V. v. Jagić, J. Máchal, M. Murko, F. Riedl, E. Setälä, G. Suits, A. Thumb, A. Wesselovsky, E. Wolter. [VIII u. 396 S.] 1908. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die romanischen Literaturen und Sprachen. Mit Einschluß des Keltischen.** (I, II, 1.) Bearbeitet von H. Zimmer, K. Meyer, L. Chr. Stern, H. Morf, W. Meyer-Lübcke. [VII u. 499 S.] 1909. Geh. *M.* 12.—, in Leinwand geb. *M.* 14.—

**Staat und Gesellschaft der neueren Zeit** (bis zur französischen Revolution). (II, 5, 1.) Bearbeitet von F. v. Bezold, E. Gothein, R. Koser. [VI u. 349 S.] Lex.-8. 1908. Geh. *M.* 9.—, in Leinwand geb. *M.* 11.—

**Systematische Rechtswissenschaft.** (II, 8.) Bearbeitet von R. Stammler, R. Sohm, K. Gareis, V. Ehrenberg, L. v. Bar, L. v. Seuffert, F. v. Liszt, W. Kahl, P. Laband, G. Anschütz, E. Bernatzik, F. v. Martitz. [X, LX u. 526 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 14.—, in Leinwand geb. *M.* 16.—



1/2 ℔ 22'-

DATE DUE

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| GAYLOR | | | PRINTED IN U.S.A. |

Q
175
E64
V.1

Enriques

Probleme der wissenschaft

330958

ENRIQUES 0330958

| DUE DATE | BORROWERS NAME | I D NUMBER |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

330958

Q
175
E64
V.1

# VOLUME 2

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE
XI 2

FEDERIGO ENRIQUES

# PROBLEME DER WISSENSCHAFT

II. TEIL

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

101 En 7 2

Columbia University
in the City of New York

Library

Special Fund

Given anonymously

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# Wissenschaft und Hypothese

## Sammlung von Einzeldarstellungen aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen.

Die Sammlung will die in den verschiedenen Wissensgebieten durch rastlose Arbeit gewonnenen Erkenntnisse von umfassenden Gesichtspunkten aus im Zusammenhang miteinander betrachten. Die Wissenschaften werden in dem Bewußtsein ihres festen Besitzes, in ihren Voraussetzungen dargestellt, ihr pulsierendes Leben, ihr Haben, Können und Wollen aufgedeckt. Andererseits aber wird in erster Linie auch auf die durch die Schranken der Sinneswahrnehmung und der Erfahrung überhaupt bedingten Hypothesen hingewiesen.

I. Band: **Wissenschaft und Hypothese.** Von Henri Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München. 2. Aufl. 1906. Geb. *M.* 4.80.

Dies Buch behandelt in den Hauptstücken: Zahl und Größe, den Raum, die Kraft, die Natur, die Mathematik, Geometrie, Mechanik und einige Kapitel der Physik. Zahlreiche Anmerkungen des Herausgebers kommen dem allgemeinen Verständnis noch mehr entgegen und geben dem Leser wertvolle literarische Angaben zu weiterem Studium.

II. Band: **Der Wert der Wissenschaft.** Von Henri Poincaré-Paris. Deutsch von E. und H. Weber-Straßburg. Mit einem Bildnis des Verfassers. 1906. Geb. *M.* 3.60.

Der geistvolle Verfasser gibt einen Überblick über den heutigen Standpunkt der Wissenschaft und über ihre allmähliche Entwicklung, wie sie sowohl bis jetzt vor sich gegangen ist, als wie er sich ihre zukünftigen Fortschritte denkt. Das Werk ist für den Gelehrten zweifellos von größtem Interesse; durch seine zahlreichen Beispiele und Erläuterungen wird es aber auch jedem modernen Gebildeten zugänglich gemacht.

III. Band: **Mythenbildung und Erkenntnis.** Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. Von G. F. Lipps-Leipzig. 1907. Geb. *M.* 5.—

Der Verfasser zeigt, daß erst durch die Widersprüche, die mit dem naiven, zur Mythenbildung führenden Verhalten unvermeidlich verknüpft sind, der Mensch auf die Tatsache aufmerksam wird, daß sein Denken die Quelle der Erkenntnis ist — er wird kritisch und gelangt zu der kritischen Weltbetrachtung. Die Entwicklung der kritischen Weltbetrachtung stellt die Geschichte der Philosophie dar.

IV. Band: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola-Pavia. Deutsch von H. Liebmann-Leipzig. 1908. Geb. *M.* 5.—

In der vom Verfasser und Übersetzer erweiterten deutschen Ausgabe wird wohl nicht nur den Mathematikern ein Gefallen erwiesen, sondern vor allem auch den vielen, welche, mit elementaren mathematischen Vorkenntnissen ausgestattet, Ziele und Methoden der nichteuklidischen Geometrie kennen lernen wollen. Man wird in der elementar gehaltenen und flüssigen Darstellung die Antwort auf viele Fragen finden, wo andere nur dem gründlich vorgebildeten Mathematiker zugängliche Quellen versagten.



V. Band: **Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels-Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer u. 43 Illustrationen. 1902. Geb. *M.* 6.80.

Nach einer Übersicht über die Erscheinungen der Ebbe und Flut, der Seeschwankungen, der besonderen Flutphänomene sowie der Beobachtungsmethoden werden in sehr anschaulicher, durch Figuren erläuterter Weise die fluterzeugenden Kräfte, die Theorien der Gezeiten sowie die Herstellung von Gezeitentafeln erklärt. Die folgenden Kapitel sind geophysikalischen und astronomischen Fragen, die mit der Einwirkung der Gezeitenkräfte auf die Weltkörper zusammenhängen, gewidmet.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von Max Planck-Berlin. 2. Auflage. 1908. Geb. *M.* 6.—

In drei Abschnitten wird behandelt: die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise; schließlich die Darlegung, wie man durch Anwendung des Prinzips zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Erscheinungswelt gelangen kann.

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert-Göttingen. 3. Auflage. 1909. Geb. *M.* 6.—

Diese Untersuchung ist ein Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zutage tritt.

VIII. Band: **Das Wissen unserer Zeit in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von É. Picard-Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann-München. [Unter der Presse.]

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über den Stand unseres Wissens in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts zu geben. Man findet die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen man heute den Begriff der wissenschaftlichen Erklärung betrachtet, ebenso wie die Rolle, die hierbei die Theorien bilden, eingehend erörtert.

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann-Königsberg i. P. 2. Auflage. 1910. Geb. *M.* 6.—

Durch die sichtliche Zunahme der erkenntnistheoretischen Interessen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften war dem Verfasser der Weg für die Neubearbeitung der inzwischen notwendig gewordenen zweiten Auflage vorgezeichnet, seine späteren erkenntnistheoretischen Untersuchungen in die Grundzüge einzuarbeiten und damit eine weitere Durcharbeitung des gesamten für ihn in Betracht kommenden Gegenstandes zu versuchen, ohne daß dabei Richtung und Ergebnis seiner bisherigen Studien eine wesentliche Änderung erfahren konnten.

**X. Band: Wissenschaft und Religion in der Philosophie unserer Zeit.** Von É. Boutroux-Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg i. E. 1910. Geb. ℳ 6.—

Die Frage nach den Beziehungen zwischen Wissenschaft und Religion ist ein Problem, mit dem sich wohl jeder denkende Mensch schon beschäftigt hat, und über das er gerne einigen Aufschluß haben möchte. Boutroux zeigt uns in klarer und anschaulicher Weise die Ideen einiger der größten Denker über diesen Punkt. Er übt aber auch strenge Kritik und verhehlt uns nicht alle die Schwierigkeiten und Einwendungen, die sich gegen jedes dieser Systeme erheben lassen. So darf das Werk allgemeines Interesse beanspruchen.

**XI. Band: Probleme d. Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-Göttingen. 2 Teile. 1910.

I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.** Geb. ℳ 4.—
II. — **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.** Geb. ca. ℳ 5.—

Der Plan des Werkes ist ein sehr umfassender. Es handelt sich um eine neue Theorie der Erkenntnis, welche der Verfasser durch eine gründliche Analyse der Fragen der Logik und Psychologie entwickelt, dabei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik, der Mechanik, der Physik, der Chemie bis zur Biologie, der Wirtschaftslehre und der Geschichte usw. berührend.

**XII. Band: Die log. Grundlagen d. exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp-Marburg. 1910. Geb. ℳ 6.60.

Das Buch, das gleichsam eine nach modernen Begriffen reformierte „Kritik der reinen Vernunft" darstellt, versucht eine in den Hauptzügen vollständige, geschlossene Philosophie der exakten Wissenschaften zu bieten, wobei ein strenger Systemzusammenhang, der von den logischen durch die mathematischen zu den mechanischen Prinzipien und damit zu denen der gesamten Physik herabreicht, angestrebt ist.

In Vorbereitung (genaue Fassung der Titel vorbehalten):

**Anthropologie und Rassenkunde.** Von E. v. Baelz-Stuttgart.
**Prinzipien der vergleichenden Anatomie.** Von H. Braus-Heidelberg.
**Die Erde als Wohnsitz des Menschen.** Von K. Dove-Jena.
**Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich.** Von K. Escherich-Tharandt.
**Prinzipien der Sprachwissenschaft.** Von N. N.
**Erdbeben und Gebirgsbau.** Von Fr. Frech-Breslau.
**Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften.** Von Dr. M. Frischeisen-Köhler-Berlin.
**Die pflanzengeographischen Wandlungen der deutschen Landschaft.** Von H. Hausrath-Karlsruhe.
**Reizerscheinungen der Pflanzen.** Von L. Jost-Bonn-Poppelsdorf.
**Geschichte der Psychologie.** Von O. Klemm-Leipzig.
**Die Materie im Kolloidalzustand.** Von V. Kohlschütter-Straßburg i. E.
**Vorfahren und Vererbung.** Von F. Le Dantec-Paris. Deutsch von H. Kniep-Freiburg i. B.
**Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie.** Von G. Linck-Jena.
**Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.
**Botan. Beweismittel f. d. Abstammungslehre.** Von H. Potonié-Berlin.
**Mensch und Mikroorganismen** unter besonderer Berücksichtigung des Immunitätsproblems. Von H. Sachs-Frankfurt a. M.
**Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper.** Von H. v. Seeliger-München.
**Meteorologische Zeit- und Streitfragen.** Von R. Süring-Berlin.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

FEDERIGO ENRIQUES

# PROBLEME DER WISSENSCHAFT

## ZWEITER TEIL
## DIE GRUNDBEGRIFFE DER WISSENSCHAFT

ÜBERSETZT VON
**KURT GRELLING**

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

# Inhaltsverzeichnis.

## Kapitel IV. Die Geometrie.

### A. Die reale Bedeutung der Geometrie.

Seite

§ 1. Einleitung . . . . . 259
§ 2. Realismus und Nominalismus . . . . . 260
§ 3. Raum und Räumliches . . . . . 261
§ 4. Kritik der räumlichen Beziehungen . . . . . 263
§ 5. Der neue Nominalismus H. POINCARÉS . . . . . 264
§ 6. Die Geometrie als Teil der Physik . . . . . 269
§ 7. Über die Genauigkeit der Geometrie . . . . . 273
§ 8. Der Raum als Begriff: die abstrakte Geometrie . . 276
§ 9. Historische Bemerkungen über die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie . . . . . 278
§ 10. Das Raumproblem . . . . . 284
§ 11. Die Nichtanschaulichkeit der nichteuklidischen Geometrien . . . . . 292
§ 12. Andere mögliche Geometrien . . . . . 294
§ 13. Die nichtarchimedische Geometrie und die Willkürlichkeit der Postulate . . . . . 295

### B. Die psychologische Entstehung der geometrischen Begriffe.

§ 14. Problemstellung . . . . . 297
§ 15. Beziehung zu dem biologischen Problem der räumlichen Orientierung . . . . . 299
§ 16. Das Programm der weiteren Untersuchungen . . . 302
§ 17. Die Quellen der Kritik . . . . . 303
§ 18. Allgemeine Bemerkungen über den räumlichen Gehalt der Wahrnehmungen . . . . . 304
§ 19. Die physiologischen Räume und der geometrische Raum . . . . . 306
§ 20. Die räumlichen Daten des Gesichtsinns und die projektive Geometrie . . . . . 308
§ 21. Die räumlichen Daten der Tastmuskelempfindungen und die metrische Geometrie . . . . . 316

Seite

§ 22. Vergleichung der geschichtlichen mit der psychogenetischen Entwickelung der geometrischen Postulate 320
§ 23. Die Postulate des Kontinuums: die Linie . . . . 324
§ 24. Postulate des zwei- und dreidimensionalen Kontinuums 330
§ 25. Postulate der projektiven Geometrie . . . . . 333
§ 26. Postulate der metrischen Geometrie . . . . . 335
§ 27. Vereinigung von metrischer und projektiver Geometrie: das Parallelenpostulat . . . . . 338
§ 28. Schluß . . . . . 344

## Kapitel V. Die Mechanik.

### Die reale Bedeutung und psychologische Entwickelung der Grundsätze.

§ 1. Die Mechanik als Erweiterung der Geometrie . . . 345
§ 2. Programm . . . . . 347
§ 3. Zeit: Aufeinanderfolge und Dauer . . . . . 348
§ 4. Psychologische und physikalische Zeit . . . . . 349
§ 5. Eigenschaften der zeitlichen Aufeinanderfolge . . . 351
§ 6. Die Zeitdauer . . . . . 352
§ 7. Das Postulat der Zeitmessung . . . . . 359
§ 8. Über die Unabhängigkeit der Zeit vom Orte . . . 362
§ 9. Die historische Entwickelung und die Evidenz der Prinzipien . . . . . 365
§ 10. Grundbegriffe . . . . . 370
§ 11. Mathematischer Nominalismus . . . . . 370
§ 12. Der Massenpunkt . . . . . 374
§ 13. Die Kraft . . . . . 376
§ 14. Geometrische Daten der Kraft . . . . . 380
§ 15. Die Prinzipien der statischen Symmetrie . . . . . 382
§ 16. Die Zusammensetzung der Kräfte . . . . . 383
§ 17. Die Begründung der Dynamik . . . . . 386
§ 18. Bewegung . . . . . 390
§ 19. Masse . . . . . 400
§ 20. Das Postulat der Masse und das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung . . . . . 408
§ 21. Das Grundgesetz der Bewegung . . . . . 413
§ 22. Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz . . . . . 418
§ 23. Die synthetische Bewertung der Prinzipien . . . . 421
§ 24. Die Statik der Systeme: die Verbindungen . . . . 423
§ 25. Hebel und schiefe Ebene: Prinzip der statischen Momente . . . . . 425
§ 26. Das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . . 428



Seite

§ 27. Die Dynamik der Systeme: das D'ALEMBERTsche Prinzip . . . . . 431
§ 28. Prinzip der lebendigen Kraft und des kleinsten Zwanges . . . . . 434
§ 29. Die Verifikation der Dynamik . . . . . 436

## Kapitel VI. Die Erweiterung der Mechanik.

### A. Die Physik als Erweiterung der Mechanik.

§ 1. Die Entwickelung der mechanistischen Philosophie . 444
§ 2. Quantität und Qualität: die Cartesische Hypothese . 446
§ 3. Beispiele: die Gewichte . . . . . 447
§ 4. Wärmemenge . . . . . 449
§ 5. Die Messung der Intensiven . . . . . 451
§ 6. Das natürliche oder absolute Maß: die Temperatur 453
§ 7. Zusammenfassung und Kritik . . . . . 455
§ 8. Die beiden Formen des Mechanismus: die CARTESISCHE und die NEWTONsche . . . . . 458
§ 9. Die Zurückführung der Kräfte auf den Stoß: die Gravitation . . . . . 461
§ 10. Die kinetische Gastheorie . . . . . 463
§ 11. Die Elastizitätstheorie: die festen Körper . . . . 465
§ 12. Die bleibenden Veränderungen . . . . . 469
§ 13. Die mechanische Wärmetheorie: die Erhaltung der Energie . . . . . 471
§ 14. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik . . . . 474
§ 15. Die irreversiblen Erscheinungen . . . . . 478
§ 16. Die energetische Mechanik . . . . . 483
§ 17. Materie und Energie . . . . . 486
§ 18. Lokalisation und Bewegung der Energie . . . . . 489
§ 19. Die elastische Erklärung der optischen und elektromagnetischen Erscheinungen . . . . . 491
§ 20. Die Optik . . . . . 491
§ 21. Die Elektrostatik . . . . . 495
§ 22. Der Elektromagnetismus . . . . . 497
§ 23. Der positive Gehalt der MAXWELLschen Theorie . . 500
§ 24. Die Elastizität als Bewegung betrachtet . . . . . 504
§ 25. Die Elektrodynamik der bewegten Körper: die HERTZsche Theorie . . . . . 508
§ 26. Die LORENTZsche Theorie . . . . . 513
§ 27. Kritik: das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung 517
§ 28. Das Relativitätsprinzip . . . . . 519

Seite

§ 29. Äther und Materie . . . . . 523
§ 30. Die Dynamik des Elektrons: die Strahlung . . . . 527
§ 31. Die elektrische Dynamik . . . . . 529
§ 32. Die elektrische Erklärung der Gravitation . . . . 532
§ 33. Ergebnisse: die allgemeine nichtnewtonsche Dynamik 533
§ 34. Physikalische Erklärung: der Wert der mechanischen Modelle und der Gleichungen . . . . . 540

B. Die mechanistische Hypothese und die Lebenserscheinungen.

§ 35. Einleitung . . . . . 545
§ 36. Im voraus zu machende Einwände . . . . . 547
§ 37. Der biologische Determinismus . . . . . 549
§ 38. Der psychologische Determinismus und die Willensfreiheit . . . . . 550
§ 39. Der Physizismus . . . . . 558
§ 40. Die teleologische Erklärung . . . . . 561
§ 41. Das Leben und die Hauptsätze der Thermodynamik 567
§ 42. Die mechanistische Hypothese und die Probleme der Entwickelung . . . . . 569
§ 43. Die Unerheblichkeit der mechanischen Erklärung in der Biologie . . . . . 572
§ 44. Schluß . . . . . 574

Autorenverzeichnis . . . . . 578
Sachregister . . . . . 581

## Kapitel IV.

# Die Geometrie.

## A. Die reale Bedeutung der Geometrie.

### § 1. Einleitung.

Der Geometrie muß man, scheint es, im Gebiete der philosophischen Studien einen Ehrenplatz anweisen!

In Griechenland war sie ein mächtiges Hilfsmittel der Verstandeserziehung und half zusammen mit der Rhetorik die Wissenschaft des Denkens auszubilden. Noch heute wirft die neue kritische Geometrie auf sie, wie wir sahen, ein lebhaftes Licht. Anderseits beginnt die Gedankenbewegung, der wir unsere moderne europäische Kultur verdanken, mit einer Schule von Philosophen, die zugleich Geometer waren. War doch Descartes der Begründer und Leibniz der Erneuerer jener rationalistischen Philosophie, die im Kampfe mit dem Empirismus die Geister erzog und so ein Werkzeug des Fortschritts wurde, aus dem die modernen Ansichten hervorgingen. Auch die beiden Denker, die den größten Einfluß auf die Spekulation des neunzehnten Jahrhunderts ausgeübt haben, Immanuel Kant und Auguste Comte verdankten einen großen Teil ihrer Kraft einer geometrischen Erziehung. Vor allem aber hat der Fortschritt der Geometrie in diesem Jahrhundert auf die Entwickelung des Rationalismus eingewirkt, der, nachdem er sich aus seinem Ursprungsland entfernt hatte, sich zu immer höheren und kühneren Flügen erhob, und zwar vermöge eines wahrhaft wunderbaren Resultates: der Konstruktion der nichteuklidischen

Geometrien. Durch sie wurde es klar, daß unsere geometrischen Begriffe, soweit sie sich auf die wahrnehmbare Wirklichkeit beziehen, keineswegs auf jene strenge Gewißheit Anspruch machen können, die als eines der stärksten Argumente für ihren apriorischen Charakter angesehen wurde.

Neue Gedanken und kühnere Versuche der Philosophie der Geometrie entstanden aus dieser Ansicht und versuchten auf verschiedenen Wegen das physikalische Problem der Struktur des Raumes zu erhellen. Diese Entwickelung reicht von den Untersuchungen der GAUSS, LOBATSCHEWSKY, BOLYAI, RIEMANN, HELMHOLTZ bis zu den allerneuesten, die wir in unserem auf S. 165 zitierten Artikel über die „Prinzipien der Geometrie" dargestellt haben, und auf die wir uns zum Teil in den folgenden Paragraphen beziehen.

## § 2. Realismus und Nominalismus.

Gegen die angedeuteten Entwickelungen oder wenigstens gegen ihre im allgemeinen von den Mathematikern angenommene Deutung wird noch immer von den Philosophen der KANTischen Schule der Einwand erhoben: man könne nicht von der Geometrie als von einer physikalischen Wissenschaft sprechen, weil der Raum kein wirklicher Gegenstand, sondern nur eine subjektive Form der Sinnesanschauung ist.

Und diese Behauptung kehrt, in anderem Gewande, in neueren kritischen Untersuchungen wieder.

Der Streit zwischen Realismus und Nominalismus in der Geometrie ist einer der schwierigsten und für die allgemeine Philosophie wichtigsten. Und es handelt sich nicht so sehr darum, zwischen zwei klar aufgestellten einander widersprechenden Behauptungen zu entscheiden, sondern, wie so oft, den Sinn zu bestimmen, in dem die



beiden Behauptungen ohne Widerspruch aufrecht erhalten werden können.

Durch eine solche Prüfung wird also klargestellt werden, daß das negative Ergebnis, zu dem gewisse Formulierungen des Raumproblems führen, nicht die Möglichkeit ausschließt, den geometrischen Realismus als berechtigt anzuerkennen, und daran schließt sich das positive Ergebnis, daß die in der Geometrie enthaltenen Tatsachen ins Licht gesetzt werden.

So tritt der Behauptung KANTS, die die Existenz eines wirklichen Gegenstandes, der dem Wort „*Raum*" entspräche, leugnet, mit HERBART die Erkenntnis der Realität der „*räumlichen Beziehungen*" gegenüber; und dem neuerdings von POINCARÉ verteidigten Nominalismus, der zeigt, daß diese Beziehungen keine wirkliche, *von den Körpern absolut unabhängige* Bedeutung haben, steht eine genauere Bewertung der als *Teil der Physik* aufgefaßten Geometrie gegenüber.

## § 3. Raum und Räumliches.

Stellen wir uns die Frage „was ist der *Raum?*", und suchen wir sie durch eine angemessene Kritik zu beantworten.

Betrachten wir irgendeinen Körper; sei es z. B. ein Stück Kupfer oder Eisen usw., das sich in Luft oder Wasser oder sonst einem beliebigen umgebenden Medium befinde. Die Kenntnis von diesem Körper erlaubt uns gewisse Empfindungen zu unterscheiden, die sich auf die Materie *innerhalb* oder *außerhalb* desselben beziehen.

Unzählige Fälle, die sich durch die materielle Beschaffenheit des Körpers oder des ihn umgebenden Mediums unterscheiden, zeigen doch etwas Gemeinsames, so daß wir nach *Abstraktion von den besonderen Sinnesqualitäten, die wir dem Kupfer oder dem Eisen,*

*der Luft oder dem Wasser zuschreiben*, den Begriff einer *„besonderen Art, Materie von Materie zu trennen"* erhalten, welche den objektiven Gehalt der Begriffe des *festen Körpers* und der *Oberfläche* ausmachen.

Sei nun eine Kugel gegeben, die imstande ist, immer größer zu werden. Man sagt dann, daß, wenn sie *unendlich groß geworden* ist, sie den ganzen *Raum* erfüllt.

Es ist kein Wunder, daß dieser transzendente Prozeß dazu führt, dem Wort „Raum" einen völlig illusorischen Sinn beizulegen! Da nämlich der Begriff einer Kugel eine Unterscheidung zwischen den Empfindungen, die sich auf das Innere und denen, die sich auf das Äußere beziehen, erfordert, so hat eine unendlich große Kugel, der keine derartige Unterscheidung entspricht, gar keine reale Bedeutung. Daher bleibt der so definierte Raum ein leeres Wort.

Bedarf es der Fortsetzung einer solchen negativen Kritik? Unbezwingbar steigt die Erinnerung auf an die Argumentation des Don Ferrante in den „Verlobten" von Manzoni, mit der er beweist, daß die Pestansteckung weder Substanz noch Akzidenz sein kann...

Die Untersuchung lehrt aber, daß außer dem transzendenten Sinn des Wortes auch noch eine wirkliche physikalische Bedeutung für die *räumlichen Beziehungen oder die Lagebeziehungen der Körper* übrig bleibt, deren Gesamtheit auch durch das Wort „Raum" im positiven Sinne bezeichnet werden kann.

Daß in der Tat in diesen Beziehungen eine wirkliche Erkenntnis enthalten ist, geht daraus hervor, daß die Beziehungen der Geradlinigkeit, der Äquidistanz usw. einer festen Übereinstimmung zwischen gewissen Willensakten und den aus ihnen folgenden Empfindungen entsprechen. Ja, es ist nichts genauer und fester als geometrische Voraussagen!



## § 4. Kritik der räumlichen Beziehungen.

Die Annahme des Wortes „Raum" als Bezeichnung für einen unendlich großen Körper ist nicht die einzige, die auf einem transzendenten Definitionsverfahren beruht und deshalb zu einem nominalistischen Schlusse führt. Auch die räumlichen Beziehungen können transzendent aufgefaßt werden, sei es, daß man ihrer *Allgemeinheit* einen *absoluten* Sinn unterlegt, sei es, daß man ihnen eine *unendlich hohe Genauigkeit* zuschreibt, zwei Auffassungen, die übrigens offenbar miteinander zusammenhängen.

Die Allgemeinheit der Geometrie besteht in folgendem: die räumlichen Unterscheidungen *hängen nicht* von der Materie *ab*, von der z. B. unterschieden wird, ob sie innerhalb oder außerhalb einer gegebenen Kugel ist. Nun bedeutet diese Unabhängigkeit aber nur das gleichzeitige Bestehen oder die Möglichkeit solcher Unterscheidungen, die sich auf *andere Stoffe* beziehen, nicht aber eine *absolut allgemeine* physikalische Beziehung, die *dem Raum an sich eigentümlich* wäre, und auch *bei Abwesenheit aller Materie* ihren Sinn behielte.

Der Anspruch, der Geometrie eine Bedeutung zu geben, die von den Körpern absieht, verknüpft sich mit demjenigen, in ihren Beziehungen eine unendlich große oder absolute Genauigkeit zu finden. Denn nachdem einmal diese Deutung der geometrischen Allgemeinheit zurückgewiesen ist, kann die Genauigkeit, die der mathematischen Theorie zukommt, nicht auf die physische Welt angewandt werden, wenn man bedenkt, daß kein wirklicher Gegenstand unter die mathematischen Begriffe des „Punktes", der „Linie", „Oberfläche", „Geraden", „Ebene", „Entfernung" usw. fällt.

Zu der trivialen Feststellung der Nichtexistenz solcher Gegenstände kann man noch hinzufügen, daß in

der physischen Wirklichkeit es nicht einmal möglich ist, sich den erwähnten geometrischen Figuren über eine gewisse Grenze hinaus anzunähern; vor allem gibt es eine von unseren Sinnen abhängige Grenze, die allerdings mit Hilfe geeigneter Instrumente hinausgeschoben zu werden vermag; aber in der Unvollkommenheit derselben entsteht eine neue Grenze, und nicht nur eine praktische, sondern auch eine theoretische; so setzt z. B. die Wellenlänge des Lichtes der Verfeinerung des Gesichtssinnes, auch wenn er mit dem Mikroskop bewaffnet ist, eine unübersteigbare Schranke.

## § 5. Der neue Nominalismus H. POINCARÉS.

Die Unmöglichkeit, den räumlichen Beziehungen einen Sinn beizulegen, der von den Körpern selbst absieht, und die Nichtexistenz wirklicher Objekte, die unter die mathematischen Begriffe des „Punktes", der „Geraden" usw. fallen, werden von H. POINCARÉ[1]) als endgültige Widerlegung des geometrischen Realismus angesehen.

Wenn auch in dem zitierten Werke sich keine Kritik des Raumbegriffes findet, so geht doch der transzendente Sinn, den der Autor den geometrischen Beziehungen beilegt, aus einigen unten angeführten Stücken seiner Schriften klar hervor:

„Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux; aucune d'elles ne porte, ni peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace" (op. cit. pag. 100).

„Direz-vous que si les expériences portent sur les corps, elles portent du moins sur les propriétés géométriques des corps.

1) Vgl. „La Science et l'Hypothèse" Paris Flammarion, ohne Datum.



Et d'abord, qu'entendez-vous par propriétés géométriques des corps? Je suppose qu'il s'âgit des rapports des corps avec l'espace..." (op. cit. pag. 101).

„....il n'existe pas de propriété qui puisse... être un critère absolu permettant de reconnaître la ligne droite et de la distinguer de toute autre ligne.

Dira-t-on par exemple: — 'cette propriété sera la suivante: la ligne droite est une ligne telle qu'une figure dont fait partie cette ligne peut se mouvoir sans que les distances mutuelles de ses points varient et de telle sorte que tous les points de cette ligne restent fixes?' —

Voila en effet une propriété qui ... appartient à la droite et n'appartient qu' à elle. Mais comment reconnaîtra-t-on par expérience si elle appartient à tel ou tel objet concret? Il faudra mesurer des distances, et comment saura-t-on que telle grandeur concrète que j'ai mesurée avec mon instrument matériel représente bien la distance abstraite?" (pag. 94—95).

Aus solchen Überlegungen folgt nun aber lediglich der Schluß, der schon oben ausgesprochen wurde, und der übrigens evident ist: die *reinen* geometrischen Beziehungen sind eine Abstraktion, der nichts Wirkliches entspricht; die elementaren geometrischen Begriffe (Punkt, Gerade usw.) sind gleichfalls eine Abstraktion, der kein Gegenstand genau entspricht. Sie dienen also als *Symbole*, um gewisse Lagebeziehungen der Körper mit Hilfe der geometrischen Sätze auszudrücken.

Wenn sich die Kritik POINCARÉS hierauf beschränkte, wäre sie wirklich unwiderleglich. Aber der berühmte Autor ist weiter gegangen und hat geschlossen, daß die geometrischen Sätze selbst keine wirklichen Tatsachen ausdrücken, sondern als ein *System von bloßen Vereinbarungen* angesehen werden müssen, durch welche die physikalischen Tatsachen dargestellt werden, etwa in derselben Weise, wie man Größen auf ein Maßsystem

bezieht. Das System kann bequem sein, aber nichts verbietet, es zu wechseln. Fragen, ob eine Erscheinung nach einer gewissen geometrischen Hypothese möglich, nach der entgegengesetzten unmöglich sei, hieße ebensoviel wie fragen, ob es Längen gibt, die in Metern ausdrückbar sind, aber nicht in englischen Fuß (vgl. op. cit. p. 93).

Dieser Schluß erscheint uns nicht annehmbar. Denn der Umstand, daß die geometrischen Sätze theoretisch durch Beziehungen zwischen Begriffen ausgedrückt werden, die in ihrer mathematischen Darstellung als Symbole gelten müssen, genügt nicht, um ihnen eine konventionelle Willkür in bezug auf die physische Welt zuzuschreiben, wo diese Symbole eine angenäherte Verwirklichung finden in gewissen Gegenständen, die so durch sie dargestellt werden.

Um Zweifel zu beseitigen, hat POINCARÉ seine Behauptung durch einige geniale und kunstvolle Konstruktionen zu stützen versucht. Es handelt sich darum, physikalische Bedingungen zu erdenken, unter denen *derselbe Raum*, in dem wir leben, *Eigenschaften zu besitzen scheinen würde, die* von denen unserer Geometrie *abweichen*. Dazu genügt es, anzunehmen, daß die Körper bei ihrer Bewegung nach gewissen Gesetzen deformiert würden, z. B. durch eine Temperaturveränderung, *die von ihrer Lage abhinge;* daß das Licht sich nicht geradlinig ausbreitete, sondern dem Einfluß eines brechenden Mediums unterworfen wäre, *das in geeigneter Weise in einem Raumfeld verteilt wäre*, usw. (op. cit. p. 84f.).

Eine genauere Prüfung dieser Beispiele jedoch zeigt, daß die angedeuteten Hypothesen, sofern sie im Hinblick auf die Relativität unserer Erkenntnis positiv gedeutet werden, eine *wirkliche* Veränderung des Raumes einschließen, d. h. der mit diesem Namen bezeichneten Beziehungen.



In unserer Welt sind die Körper meßbar in bezug aufeinander dank der Möglichkeit, sie unabhängig von der Veränderung ihres physikalischen Zustandes zu bewegen; die Erwärmung, die Abkühlung, der Druck verändern allerdings die für die Messung erforderlichen Vergleichselemente, aber diese Veränderung ist zufällig in bezug auf die gegenseitige Lage der Körper; deshalb braucht sich die Geometrie nicht um sie zu kümmern.

In der von POINCARÉ erdachten Welt wäre dagegen die Temperatur eine *geometrische Eigenschaft*, sintemalen jeder Körper (unseren Organismus eingeschlossen) die seiner Stelle entsprechende Temperatur besäße; da es dann aber auch nicht mehr möglich wäre, verschieden warme Körper in Berührung zu bringen und so ihre Dimensionen zu vergleichen, so könnte man nicht mehr sagen, daß „die Körper sich mit wachsender Temperatur ausdehnen". Demnach wäre in der betrachteten Welt die Geometrie *in Wirklichkeit* und nicht nur *scheinbar* von der unsrigen verschieden.

Die entgegengesetzte Behauptung betrachtet die Wirklichkeit als etwas der Erscheinung in einem transzendenten Sinne Gegenüberstehendes. Oder anders ausgedrückt: es widerspricht den Voraussetzungen der Hypothese, wenn man durch eine Erschleichung in jene Welt einen Richter einführt, der nach *unserem* Bilde geschaffen ist und sich den dort geltenden Gesetzen nicht unterwirft!

Eine entsprechende Kritik läßt sich an die Hypothese knüpfen, daß das Licht sich nicht geradlinig bewegt.

Nichts ist von einem abstrakten Gesichtspunkt aus leichter, als eine solche Hypothese anzunehmen! Wird sie nicht in der Tat gemäß den Brechungsgesetzen in jedem beliebigen heterogenen Medium erfüllt?

Aber die Heterogeneität, die durch geeignete physikalische Experimente festgestellt werden kann, ist wiederum etwas für die Erscheinung Zufälliges. Die Bahnen der

Lichtstrahlen können in diesem Falle geändert werden, wenn man die Lage des Mediums selbst im Felde unserer Beobachtung ändert. Was soll dagegen ein heterogenes Medium mit einer festen räumlichen Verteilung bedeuten, etwa ein Äther, von verschiedener Struktur, dessen Teile bei der Bewegung der Körper sich nicht gegeneinander bewegten? Würde man durch diese Hypothese nicht eine von der unsrigen, die wir als *homogen* erkennen, verschiedene *geometrische Welt* schaffen?

Um diese Fragen tiefer zu ergründen, ist es notwendig, sich die physikalische Bedeutung der „geraden Linie" klar zu machen.

Der Begriff der Geraden ergibt sich aus der Untersuchung verschiedenartiger Erscheinungen:

1. aus der der Bewegung *starrer* Körper, bei der die Gerade als *Achse* auftritt, deren Punkte bei einer Rotation unbewegt bleiben (von hier aus dann als gespannter Faden usw.);
2. aus der der Dynamik der *Massenpunkte*, wo die Gerade als *Bahn* eines Punktes erscheint, dessen Bewegung von den umgebenden Körpern nicht beeinflußt wird;
3. aus der der Optik und allgemein der Strahlungserscheinungen, wo die Gerade als *Strahl* oder Symmetrielinie der Erscheinung in einem beliebigen Medium auftritt, das mittels bestimmter vergleichender Experimente als *homogen* erkannt ist.

Prinzipiell dienen die erste und die dritte Eigenschaft dazu, die Gerade in bezug auf unseren Gesichts- und Tastsinn zu definieren, während die zweite vielleicht dazu verwendet werden könnte, sie in bezug auf den Muskelsinn zu definieren.

Nun erlauben diese Definitionen, eine wie die andere, auf sie ein geometrisches System zu gründen; im besonderen kann es eine *(metrische) Geometrie der starren Körper* und eine *optische* (oder *projektive*) *Geometrie* geben.



Die Übereinstimmung dieser verschiedenen Arten, die Gerade zu definieren, ist eine Grundtatsache, die uns erlaubt, diese verschiedenen Erscheinungen unter eine *einzige geometrische Darstellung* zu subsummieren. Auf diese lassen sich dann auch noch andere bekannte Erscheinungen und speziell die dynamischen zurückführen.

Die Grundlage dieser Darstellung ist der Umstand, daß gewisse Bedingungen der Homogeneität des Mediums zu einer *Symmetrie der Erscheinungen* in bezug auf gewisse Linien führen; in einer solchen Abhängigkeitsbeziehung besteht der eigentliche physikalische Sinn der *Homogeneität des Raumes*.

Nichts hindert uns, uns vorzustellen, daß die vielfältigen Übereinstimmungen, deren Gesamtheit die besagte Symmetrie ausmacht, nicht wirklich bestehen, wenn man die Tatsachen durch genauere Experimente untersucht; aber in einem solchen Falle würde es sich um etwas ganz anderes als um eine einfache Verbesserung der Theorie des Lichtes handeln; denn die Gesamtheit der Tatsachen, die durch die *Hypothese der Geraden* bezeichnet werden, würde dadurch bei dieser Stufe der Approximation als falsch erwiesen sein.

## § 6. Die Geometrie als Teil der Physik.

Die Philosophen, die durch eine transzendente Auffassung der Geometrie zum Nominalismus geführt werden, fallen offenbar einer fundamentalen Illusion zum Opfer, die daher kommt, daß sie die Erkenntnisse in ihrem *augenblicklichen* Zustand als etwas *Fertiges* betrachten, ohne sich um ihre *Entstehung* zu bekümmern.

Das ist die Ansicht von der Wissenschaft, die KANT aus dem System NEWTONS abstrahiert hat; das wissen-

schaftliche System, in dem die komplizierteren Beziehungen den einfacheren untergeordnet sind, wird von ihm in einem absoluten erkenntnistheoretischen Sinne aufgefaßt.

So verwandelt sich im besonderen der Umstand, daß in einer dogmatischen Darstellung die Geometrie der Mechanik und der Physik *vorhergeht*, und daß die geometrischen Erkenntnisse der experimentellen Methode der physikalischen Forschung zugrunde liegen, in die Beziehung einer notwendigen Abhängigkeit, die ihren Ausdruck in dem KANTischen „a priori" findet. Und indem man von der Kritik der wissenschaftlichen Erkenntnis zu der der vulgären aufsteigt, wird die Anschauung der räumlichen Beziehungen, die die Assoziationen unserer aktuellen Empfindungen (des Gesichts- und des Tastsinns) beherrscht, als a priori in bezug auf diese Empfindungen angesehen; und abgesondert von den Sinnesdaten (die man sich willkürlich als in Raum und Zeit isolierte einfache Elemente vorstellt), wird die räumliche Ordnung als ein *Rahmen* aufgefaßt, den der Geist hinzufügt und in dem sie ihre Stelle finden.

Nun ist aber diese ganze erkenntnistheoretische Konstruktion überwunden durch eine adäquatere Einsicht in die *Entwickelung* der Erkenntnisse, die die sicherste Errungenschaft der evolutionistischen Philosophie bildet.

Die allgemeine Tatsache, daß die Erfahrung mit Hilfe früherer Erkenntnisse gedeutet wird, und daß jede Phase des wissenschaftlichen Fortschritts in analoger Weise von einer früheren abhängt, wird heute in einem anderen Sinne verstanden; man stellt nicht mehr eine absolute Rangordnung der Wissenschaften auf, sondern man erkennt die Entwickelungsstufe einer jeden an, vermöge deren gewisse einfachere oder einer genaueren Definition fähige Begriffe sich aus der Masse



der empirischen Daten herausheben, so daß sie schließlich ein verhältnismäßig selbständiges Ganzes von Theorien bilden.

Demnach wird die Geometrie anstatt als der Physik vorangehend als ein Teil derselben angesehen, der allerdings einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht hat, vermöge der Einfachheit, der Allgemeinheit und der relativen Unabhängigkeit der in ihr enthaltenen Beziehungen.

Wenn nun die geometrischen Sätze physikalisch aufgefaßt werden, so ergibt sich, daß die konkreten Voraussagen, die sie enthalten, an Tatsachenelemente gebunden sind, die gewöhnlich nicht für geometrisch angesehen werden. Dadurch erscheinen die Lehrsätze der theoretischen Geometrie lediglich als symbolischer Ausdruck der unvollständig ausgedrückten physikalischen Beziehungen, die bei den konkreten Anwendungen näher bestimmt werden.

Infolgedessen weist die genaue Form der Sätze einen Grad der Genauigkeit auf, der dadurch noch weiter getrieben werden kann, daß man die *Gleichungen* in *Ungleichungen* verwandelt, wie aus dem folgenden Beispiel hervorgeht.

Nehmen wir den Satz: „Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich."

In der Wirklichkeit existieren Gegenstände, die mit einer gewissen Annäherung unter den Begriff des Dreiecks subsumiert werden können *(physische Dreiecke)*.

Konstruieren wir ein solches Modell aus drei dünnen Eisenstäben und einer Zeichnung auf dem Papier! Messen wir mit dem Maßstab zwei Seiten und mit dem Winkelmaß die beiden gegenüberliegenden Winkel!

Das wahre Maß einer Seite wird durch zwei Zahlen dargestellt, deren Differenz (sei sie 0,0001 m) von der

Vollkommenheit des Instrumentes abhängt; man wird das ausdrücken, indem man z. B. sagt, daß die Länge der Seite 3,4576 m mit einem Fehler von weniger als einem Zehntel Millimeter beträgt, d. h. daß sie zwischen 3,4576 m und 3,4577 m liegt.

Wenn die Maßzahl der beiden in Frage stehenden Seiten des Dreiecks in dem angegebenen Sinne die Zahl 3,4576 ist, so gilt das Dreieck als „gleichschenklig"; unsere Voraussetzung ist also, daß „die beiden Seiten sich um weniger als 0,0001 m unterscheiden".

Nun wird uns die Größe der beiden den erwähnten Seiten gegenüberliegenden Winkel durch das Winkelmaß gegeben.

Das ausgesprochene Theorem sagt uns, daß die Differenz zwischen den beiden Winkeln sehr klein sein wird, und daß daher ihre Maße mit einer Annäherung gleich sein werden, die von derjenigen abhängt, in der die (auf die Seiten bezügliche) Voraussetzung erfüllt ist.

Aber das ist nur eine unbestimmte Angabe.

Wenn man die genaue Bedeutung des Satzes in der Wirklichkeit haben will, so muß man ihn folgendermaßen umformen:

„Wenn zwei Seiten eines Dreiecks sich um weniger als eine gewisse Länge $\varepsilon$ unterscheiden, so unterscheiden sich die beiden gegenüberliegenden Winkel um weniger als eine Größe $\tau$, die von $\varepsilon$ nach einem gewissen Gesetze abhängt." Und man muß daher den Satz ergänzen, indem man eine Funktion $f(\varepsilon)$ von der Beschaffenheit findet, daß für $\varepsilon$ unterhalb einer gewissen Grenze, $\tau < f(\varepsilon)$[1]).

1) Auf derartige Fragen, die die Geometrie als physikalische Wissenschaft betreffen, hat F. KLEIN die Aufmerksamkeit gelenkt in seinen schönen Vorlesungen aus dem Sommer 1901. (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig, B. G. Teubner. 1902.)



Durch eine leichte Rechnung findet man (wenn $\tau$ in Graden ausgedrückt wird)

$$\tau < 61\,\frac{\varepsilon}{a},$$

wo $a$ mit einem Fehler, der kleiner als $\varepsilon$ ist, die Länge der merklich gleichen Seiten unseres Dreiecks ausdrückt; in unserem Falle

$$(\varepsilon < 0{,}0001, \quad a > 3)$$

ergibt sich

$$\tau < 1.$$

Wenn man in dem erläuterten Sinne die Lehrsätze der Geometrie aus Gleichungen in Ungleichungen verwandelt, so erkennt man, daß sie einen Teil der Lagebeziehungen zwischen den Körpern darstellen; das, was man bei den verschiedenen konkreten Anwendungen hinzufügen muß, bezieht sich auf die Natur dieser Körper selbst (auf die Wärme, auf die Kräfte, die auf sie wirken, usw.) und wird als der theoretischen Geometrie fremd angesehen.

Wenn auch die Unterscheidung zwischen Theorie und Anwendung nur durch Vereinbarung eingeführt ist, um das Verständnis der Wirklichkeit zu erleichtern, so ist diese Erleichterung doch nur möglich vermöge einer *statistischen Regelmäßigkeit*, die sich der *Unregelmäßigkeit der Erscheinungen* superponiert und die sich durch die Annahme allgemeiner und genauer geometrischer Tatsachen erklären läßt, die sich auf hypothetische einfache Bedingungen beziehen.

## § 7. Über die Genauigkeit der Geometrie.

Wir wollen versuchen, diese Betrachtung zu erklären und zu vertiefen im Hinblick auf eine Abschätzung der *Genauigkeit* der Geometrie.

Die *direkte* Verifikation einer geometrischen Eigenschaft kann in jedem einzelnen Falle einen gewissen

Grad der Approximation nicht überschreiten. Derselbe kann a priori in Beziehung gesetzt werden zu der Grenze, die wir bereits für die Verwirklichung geometrischer Begriffe erkannt haben. Wenn aber die in Frage stehende Eigenschaft als eine Hypothese betrachet wird, die von einfachen theoretischen Bedingungen abhängt, so bieten sich für die Verifikation so viele indirekte Wege, daß ihrer Genauigkeit a priori gar keine Grenze mehr gesetzt werden kann.

In diesem Sinne erscheint die Geometrie als ein System von *allgemeinen Voraussetzungen*, deren Bedeutung in den *Tatsachen* liegt, die sich aus ihnen ableiten lassen, und die daher von einer unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von Experimenten abhängt.

So haben wir die Existenz der geraden Linie gedeutet als die Annahme einer allgemeinen Symmetrie in den Erscheinungen, an die sich Verifikationen der Eigenschaften der Geraden knüpfen können, die viel genauer sind als diejenige, die unmittelbar durch die Eigenschaften der Rotationsachsen der starren Körper geliefert wird.

Dieser Punkt bedarf der Feststellung: die indirekten Verifikationen, die sich an die Annahme einer geometrischen Beziehung knüpfen, haben einen Sinn trotz der Unmöglichkeit (mit der erforderlichen Approximation) die einfachen Bedingungen zu realisieren, von denen die Beziehung selbst abhängt.

Das erhellt vor allem deutlich aus der statistischen Betrachtung, die wir oben angestellt haben. Die geometrische Hypothese leugnen heißt eine *systematische* Fehlerquelle annehmen, die sich den verschiedenen realen Bedingungen superponiert und so in einer großen Anzahl von Verifikationen als von den *zufälligen* Unregelmäßigkeiten verschieden zum Vorschein kommen kann.

Um ein schon früher betrachtetes Beispiel heranzuziehen, so kann die Unvollkommenheit der Modelle



und die Ungenauigkeit unserer Messungen einen Fehler in der Verifikation des Satzes, daß die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gleich sind, bewirken, aber in einer großen Zahl von auf diesem Satze beruhenden graphischen Konstruktionen haben die Fehler die Tendenz sich auszugleichen. In diesem Sinne ist es klar, daß die Ungenauigkeit der *Anwendung* die Genauigkeit des *Satzes* nicht erschüttert.

Man versuche jedoch mehrmals eine angenäherte Konstruktion, z. B. die von Specht für die Rektifikation des Zirkels, in einer Reihe von Zeichnungen auszuführen; in diesem Falle kommt eine systematische Fehlerquelle hinein, die bei einer großen Anzahl von Versuchen immer *merkbarer* werden wird.

Die *Genauigkeit der Geometrie* erhält nun also eine genau bestimmte Bedeutung: sie ist eine in jedem Moment des wissenschaftlichen Fortschritts durch die gemachten Erfahrungen *bis zu einem gewissen Grade* verifizierte Hypothese, die die Ergebnisse anderer möglicher Versuche vorwegnimmt. Und es ist klar, daß diese Hypothese niemals endgültig bewiesen werden kann, da die Reihe der möglichen Versuche unbegrenzt ist. Nichts hindert jedoch, daß sie *widerlegt* wird.

Jedenfalls gelingt es nicht, den hier sich erhebenden Zweifel anders zu beheben, als indem man zeigt, daß man eine entgegengesetzte Hypothese aufstellen kann, die nicht weniger bestimmt und widerspruchsfrei ist als die gewöhnliche Geometrie.

Dieser Beweis nun wurde durch die Konstruktion der nichteuklidischen Geometrie geliefert, welche zeigte, daß man, ohne den Tatsachen, auf denen die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe beruhen, zu widersprechen, Hypothesen aufstellen kann, die mit der Genauigkeit der gewöhnlichen Geometrie unvereinbar sind, die sich aber in *einer wirklichen und eigentlichen*

*von der unsrigen verschiedenen Geometrie* ausdrücken lassen.

## § 8. Der Raum als Begriff: die abstrakte Geometrie.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, wollen wir mit der folgenden Betrachtung beginnen.

Der Raum, betrachtet im Geiste des Geometers, ist nicht nur eine Anschauung, durch die die sinnlichen Bilder geordnet werden, sondern auch ein *Begriff*, wie dies die Geometer seit LEIBNIZ zu versichern nicht aufgehört haben.

Es war ein Fehler der KANTischen Kritik, diese psychologische Bedeutung des Wortes „Raum" übersehen zu haben, die die Geometrie nicht entbehren kann, wenn sie die logische Form einer deduktiven Wissenschaft beibehalten will.

Vergebens erwidert man, daß ein Begriff mehrere mögliche Bestimmungen voraussetzt, von denen der Raum einer besonderen entspräche. Diejenigen, die diesem alten Argument noch irgendeinen Wert beimessen, scheinen die abstrakte logische Bedeutung nicht zu kennen, die der Raum bei den zeitgenössischen Geometern erhalten hat.

Der Begriff des Raumes in seiner mathematischen Fassung stellt die Gesamtheit der (geometrischen) Beziehungen zwischen den *Punkten* dar, abgesehen von den besonderen Empfindungen, die sich an das Bild des Punktes knüpfen. Der Raum wird dabei gedacht als eine *Mannigfaltigkeit von irgend welchen Elementen*, denen der *Name* „Punkte" gegeben wird, weil sie in gewissen Ordnungsbeziehungen stehen, die geeignet sind, mit großer Annäherung die Lagebeziehungen darzustellen, die zwischen sehr kleinen Körpern *(physischen Punkten)* stattfinden.



Wir hatten schon Gelegenheit, daran zu erinnern, daß PLÜCKER gelehrt hat, aus dieser Unbestimmtheit, die dem als „Punkt" bezeichneten Gegenstand anhaftet, Nutzen zu ziehen, indem man unter dem Namen Raum sehr verschiedene geometrische Formen studiert.

Man bezeichnet z. B. als „Punkte" die „Kreise" einer Ebene und setzt in geeigneter Weise fest, was man unter der „Entfernung" zweier Kreise verstehen will, welche Systeme von Kreisen man als „Gerade" bezeichnen will und welche als „Ebenen". Diese Definitionen müssen so geschehen, daß die elementaren geometrischen Eigenschaften des gewöhnlichen Raums (Postulate) in Sätze übergehen, die für die Kreisgeometrie gelten.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird dadurch eine Zuordnung hergestellt zwischen dem gewöhnlichen Punktraum und dem Kreisraum; jeder Punktfigur entspricht eine *Kreisfigur* und jedem Satz über die eine gemäß der bestehenden *Dualität* ein solcher über die andere.

Wenn man das PLÜCKERsche Prinzip auch auf die angewandte Geometrie überträgt, so erscheint es natürlich, dem physikalischen Raum auch Mannigfaltigkeiten von Elementen entsprechen zu lassen, in denen die Eigenschaften, die die Übersetzung der geometrischen Postulate ausdrücken, nur teilweise vorhanden sind.

Dadurch entsteht eine Reihe von *abstrakten Räumen*, in denen *verschiedene Geometrien* gelten, die jedoch alle auf einer gemeinsamen Grundlage aufgebaut sind.

Man konstruiert z. B. eine Reihe von nichteuklidischen Räumen, in denen das Parallelenpostulat nicht erfüllt ist. Und diese Reihe, die von dem Werte einer Konstanten abhängt, die mit einem ungeeigneten Namen *Krümmungsmaß* genannt wird, fällt unter den Begriff eines Raumes, der allgemeiner ist als der gewöhnliche.

Durch eine weitere Verallgemeinerung kann man unter diesem Begriff die Reihe der *mehrdimensionalen Räume* begreifen oder andere noch weiter von dem physikalischen Raum abliegende Mannigfaltigkeiten.

Man darf diesem Verallgemeinerungsprozeß keine Grenze setzen, da er nur von einer *Verabredung* abhängt, die der Mathematiker im Interesse seiner Studien zu treffen für nützlich erachtet.

Die Theorie der abstrakten Räume ist ein wesentlicher Teil des im verflossenen Jahrhundert aufgeführten geometrischen Gebäudes!

Indem wir auf die Betrachtung dessen verzichten, was sie uns im Gebiete der mathematischen Analysis gelehrt hat, wollen wir vielmehr untersuchen, was für ein Interesse sie für den Philosophen haben kann.

Das Interesse ist ein doppeltes, einmal bezieht es sich auf die Frage des physikalischen Raums, anderseits betrifft es den Ursprung und die Entwickelung unserer geometrischen Kenntnisse.

## § 9. Historische Bemerkungen über die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie.

Seit der Zeit des EUKLID bis zum Anfange des verflossenen Jahrhunderts wurde allgemein angenommen, daß wir im Begriff des Raumes, wie er durch die Postulate der griechischen Geometrie definiert wird, eine vollkommen genaue Darstellung der physikalischen Lagebeziehungen besitzen.

Ein Zweifel an dieser Genauigkeit mußte jedem als Tollheit erscheinen, solange diese Darstellung als die *einzig mögliche* angesehen wurde. Es ist daher keine allzukühne Annahme, daß auch das größte Genie nicht auf den Gedanken einer so kühnen Kritik gekommen wäre, wenn man nicht durch einen Mangel im logischen



Aufbau der euklidischen Geometrie darauf geführt worden wäre.

Da man damals glaubte, daß die Grundsätze der Geometrie den Charakter von notwendigen Axiomen hätten, wie die logischen, und daß sie ihrer Natur nach von diesen nicht verschieden wären, so konnte man sich schwer entschließen, diesen den weniger evidenten Satz beizugesellen, der in dem fünften euklidischen Postulat über die Parallelen ausgesprochen ist.

Es ist nötig, sich an dieser Stelle daran zu erinnern, was dieses Postulat fordert und welches der Inhalt der Voraussetzungen ist, auf denen die euklidische Geometrie beruht.

Nach der Auffassung EUKLIDS beruht die Geometrie auf Definitionen, Axiomen und Postulaten. Diese letzteren fordern die Möglichkeit gewisser elementarer Operationen und haben den Zweck, die *Existenz* der geometrischen Grundelemente zu sichern, gemäß der Rolle, die die Griechen der geometrischen Konstruktion zuschrieben (ZEUTHEN).

Aber in Wirklichkeit sind noch andere Hypothesen, die von den logischen Axiomen klar unterschieden sind, versteckterweise sowohl in den Definitionen als in den Axiomen des EUKLID enthalten. Und die moderne Kritik, die die geometrischen Grundbegriffe nicht definiert, spricht sie gleichfalls unter dem Namen von *Postulaten* aus (Kap. III).

Es gibt verschiedene Arten, die für die euklidische Geometrie notwendigen Voraussetzungen auszusprechen und anzuordnen[1]). Es sei uns gestattet, uns auf die Anordnung in unserer Sammlung „Questioni riguardanti la Geometria elementare"[2]) zu beziehen, die überein-

1) Vgl. unseren S. 165 zitierten Artikel über die Prinzipien.
2) Bologna, ZANICHELLI 1900.

stimmt mit unseren pädagogischen Anweisungen in den „Elementi di Geometria“[1]), die wir zusammen mit U. Amaldi herausgegeben haben; denn dort wird das, was der Hypothese über die Parallelen vorangeht, in geeigneter Weise ins Licht gesetzt.

Wir wollen also die Voraussetzungen aufzählen, die betreffen:

1. die Postulate, die sich auf die Bestimmung von Geraden und Ebenen und ihre wechselseitige Zugehörigkeit beziehen;
2. die Grundeigenschaften der *geraden Linie* als System von Punkten (*natürliche Ordnungen*, *Abschnitte* usw.)[2]);
3. die Eigenschaften der *Ebene* in bezug auf ihre Geraden (Teilung, Winkel);
4. die Teilung des Raums in bezug auf eine Ebene;
5. die Möglichkeit der *Bewegungen*, d. h. die Prinzipien der *Kongruenz* der Figuren (aus denen die Sätze über die Kongruenz und Inhaltsgleichheit von Dreiecken usw. folgen).
6. das Parallelenpostulat (fünftes euklidisches Postulat):

Wenn zwei Geraden in einer Ebene von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der mit ihr gebildeten konjugierten Winkel auf einer Seite weniger als zwei Rechte beträgt, so schneiden sich die beiden Geraden auf dieser Seite.

Auf dieses Postulat (das man auch ersetzen kann durch die Aussage, daß durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele existiert, usw.)

1) Bologna, Zanichelli 1903; 2. Aufl. 1905.

2) Unter diesen Eigenschaften kommt die Stetigkeit der Geraden vor. Diese erscheint nicht bei Euklid, sondern dort wird sie an einigen Stellen durch besondere Sätze ersetzt, die von ihr abhängen. Man vergleiche den Artikel IV von G. Vitali in der Sammlung von F. Enriques „Questioni ...“ op. cit.



beziehen sich unzählige Beweisversuche, angefangen von den ersten Kommentatoren des Euklid (Proklus, Nasir Eddin ...) bis auf Legendre.

Aber alle vorgeschlagenen Beweise beruhen entweder ausdrücklich oder versteckterweise auf irgendeinem anderen Satz, der dem fünften euklidischen Postulat äquivalent ist und nicht in dem Bereich derjenigen geometrischen Eigenschaften enthalten ist, die auf den Hypothesen 1.—5. beruhen.

Ohne näher auf die Geschichte dieser Versuche einzugehen, genügt es und ist es auch notwendig, sich wenige Namen und Daten gegenwärtig zu halten, die enger mit der Erfindung der nichteuklidischen Geometrie verbunden sind[1]).

John Wallis (1663) hat entdeckt, daß das Parallelenpostulat eine unentbehrliche Grundlage für die Theorie der Ähnlichkeit ist, so daß der Beweis dieses Prinzips aus der Annahme der Existenz ähnlicher Dreiecke hergeleitet werden kann.

Girolamo Saccheri geht in seinem „Euclides ab omni naevo vindicatus ...“ (1733) von der Konstruktion eines Vierecks mit drei rechten Winkeln aus und unterscheidet drei Fälle, die unter Berücksichtigung der Eigenschaften 1.—5. für den vierten Winkel a priori als möglich erscheinen: er kann ein rechter, ein stumpfer und ein spitzer sein. Er beweist, daß jeder der Fälle unter den angegebenen Bedingungen für *jedes* Viereck stattfinden müßte, wenn er für ein bestimmtes zutrifft.

Er stellt daher für die drei Fälle die Grundeigenschaft zweier Geraden einer Ebene, die auf einer dritten senkrecht stehen, fest:

1) Über ihre Geschichte und eine gedrängte Darstellung der sie bildenden Theorien s. den Art. VI von R. Bonola in unserer zitierten Sammlung.

im ersten wären sie überall gleich weit entfernt (woraus das euklidische Parallelenpostulat folgt);

im zweiten Falle würden sie sich vom gemeinsamen Lot an *einander nähern;*

im dritten sich voneinander *entfernen.*

Der Fall des stumpfen Winkels wird daher von SACCHERI als der *Unendlichkeit der Geraden* widersprechend ausgeschaltet. Gegen die Annahme des stumpfen Winkels führt er falsche Argumente an; aber er war a priori überzeugt, daß dieser Fall sich als unmöglich erweisen lassen müßte!

Dieser Irrtum, mit dem das Werk SACCHERIS schließt, hebt den Wert der Ergebnisse, zu denen er gelangt, und die wir oben aufgeführt haben, nicht auf. Dazu kommt folgendes:

Wenn der Fall des stumpfen Winkels zutrifft, ist die Summe der Winkel in einem beliebigen Dreieck immer größer als zwei Rechte; im Falle des spitzen Winkels dagegen ist sie kleiner als zwei Rechte. Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel gleich zwei Rechten ist, so ist dasselbe in jedem anderen Dreieck der Fall und die euklidische Annahme trifft zu.

Dieser letztere Schluß ist ein Jahrhundert später von LEGENDRE am Schluß seiner langen Untersuchungen über die Theorie der Parallelen wiedergefunden worden.

J. H. LAMBERT diskutiert in seiner „Theorie der Parallellinien", die im Jahre 1786 veröffentlicht, aber, wie es scheint, schon zwanzig Jahre vorher geschrieben wurde, von neuem die drei Fälle SACCHERIS, dessen Arbeit, nach einer plausiblen Annahme SEGRES, ihm bekannt sein konnte. Er kommt zu dem Schluß, daß der Fall des spitzen Winkels nicht so leicht ausgeschlossen werden könne, wie der andere, der der Unendlichkeit der Geraden widerspricht.



Indem wir das Werk von F. C. SCHWEIKART und F. A. TAURINUS, die die historische Kritik von ENGEL und STÄCKEL unter die nächsten Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie eingereiht hat, übergehen, können wir sagen, daß ihre endgültige Aufstellung GAUSS, LOBATSCHEWSKY und BOLYAI zu verdanken ist.

Die Untersuchungen des ersteren, die zwischen 1792 und 1797 begannen und bis 1832 fortgesetzt wurden, sind uns erst durch Briefe des großen Geometers bekannt geworden.

Das Werk LOBATSCHEWSKYS ist in den Veröffentlichungen enthalten, die im Jahre 1826 in den Kasaner Berichten begannen, während die erste Publikation seines ungarischen Kollegen über diesen Gegenstand auf das Jahr 1829 zurückgeht.

Von LOBATSCHEWSKY und BOLYAI wurden ohne weiteres die Folgerungen aus der dritten Annahme SACCHERIS gezogen, nach der zwei in einer Ebene liegende Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, divergieren; diese Folgerungen bilden nun ein zusammenhängendes abstraktes geometrisches System, das von GAUSS als „nichteuklidische Geometrie" bezeichnet wurde.

Daraus ergab sich dann der Beweis der *Unmöglichkeit, das Parallelenpostulat* EUKLIDS dadurch *zu beweisen*, daß man es aus den oben angegebenen Voraussetzungen ableitet.

Dieser Beweis wird implizite geliefert durch die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie, wie sie LOBATSCHEWSKY und BOLYAI angegeben haben. Immerhin gelang es den erwähnten Geometern nicht, diesen Beweis so streng zu machen, daß die Möglichkeit ausgeschlossen wurde, jemals im weiteren Verlaufe der nichteuklidischen Geometrie auf einen Widerspruch zu stoßen. Und selbst GAUSS, der für sich die Hauptsätze dieser Geometrie schon lange gefunden hatte, scheint sich von

ihrer logischen Möglichkeit erst gegen 1830 überzeugt zu haben.

Diese Einzelheiten haben heute nur ein historisches Interesse. Die logische Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie und damit die Unbeweisbarkeit des gewöhnlichen Parallelenpostulats (im angegebenen Sinne) steht heute außer Frage.

Man hat weiter erkannt, daß auch noch eine *andere* Geometrie möglich ist, bei der aus den Voraussetzungen 1.—5. die Annahme der Unendlichkeit der Geraden fortgelassen wird (indem man die Gerade als eine *geschlossene Linie* ansieht); man erhält dann ein abstraktes geometrisches System, das den Namen RIEMANNS bekommen hat, und das ebenso widerspruchsfrei ist wie die LOBATSCHEWSKYsche Geometrie. Während diese Geometrie dem von SACCHERI betrachteten Fall des spitzen Winkels entspricht, entspricht die RIEMANNsche Geometrie dem Fall des stumpfen Winkels.

Doch wir können die Aufzählung der Erfolge, die die mathematische Wissenschaft auf diesem Gebiete errungen hat, nicht weiter verfolgen; wir unterlassen es deshalb, zu erzählen, welche Beiträge Mathematiker wie HELMHOLTZ, BELTRAMI, CAYLEY, KLEIN, CLIFFORD, LIE, POINCARÉ, VERONESE, HILBERT zu diesen Untersuchungen geliefert haben[1]).

Wir werden im folgenden z. T. darauf zu sprechen kommen. Jetzt wollen wir den Begründern der nichteuklidischen Geometrie zu den philosophischen Erwägungen folgen, die durch ihre Entdeckung veranlaßt wurden.

## § 10. Das Problem des Raumes.

Es ist eine eigentümliche Eigenschaft des menschlichen Geistes, in der wirklichen Welt die konkreten

1) Vgl. unseren zitierten Artikel über die Prinzipien.



Vorbilder seiner Schöpfungen zu suchen. Diese Neigung schleicht sich fast unbemerkt bei solchen Menschen ein, deren Geist nicht durch abstrakte Studien erzogen ist, weil die Begriffe, die sie bilden, aus Assoziationen hervorgehen, die durch Sinneswahrnehmungen veranlaßt sind, und sich deshalb von vornherein als Vorstellungen von wirklichen Gegenständen darstellen. Immerhin ist auch in diesem Falle der Prozeß, der die experimentelle Beobachtung verallgemeinert, ein Abstraktionsprozeß, durch den ein Begriff entsteht, dem man die neuen Beobachtungen unmittelbar unterzuordnen strebt.

Wenn es sich aber um Menschen handelt, deren Geist durch die abstrakten Wissenschaften gebildet ist, so entfernt sich der Prozeß der Begriffsbildung immer mehr von den durch die Wahrnehmung hervorgerufenen Assoziationen, und die daraus hervorgehende Schöpfung erscheint daher gänzlich abseits von aller Wirklichkeit; daher erweist sich das Bestreben, das Abstrakte zu objektivieren, als eine Eigentümlichkeit jener anderen Geister.

Wenn jemand dies für einen tadelnswerten Mangel der mathematischen Geister erklärt, so kann man wohl sagen, daß seine Prüfung die Oberfläche der Frage nicht durchdrungen hat!

Der Fehler der mathematischen Begabung bei ihren kleineren Repräsentanten ist nämlich gerade das Gegenteil; er besteht darin, nicht zu begreifen, daß ein Denken, das sich mit abstrakten Konstruktionen begnügt, ohne die wenn auch unbestimmte Hoffnung, darin die Form irgendeiner Wirklichkeit zu finden, ein unfruchtbares dialektisches Instrument wäre.

„Jeder wie auch immer definierte Begriff ist die *mögliche* Vorstellung einer Wirklichkeit", das ist die leitende Maxime derjenigen, die mit dem Abstraktionsvermögen ein hohes Bewußtsein von dem wissenschaftlichen Zweck verbinden, zu dem es angewandt wird.

Und man kann denjenigen nicht tadeln, der hinter den idealen Konstruktionen, die sich von den Daten der unmittelbaren Wahrnehmung entfernen, jene *mögliche* Realität sucht; mit demselben Rechte könnte man das Genie für die Kühnheit der Hypothesen tadeln, mit denen es den den Alltagshorizont begrenzenden Nebel zu durchdringen sucht.

Diese Kühnheit wäre nur dann tadelnswert, wenn die nur mögliche Hypothese ohne ausreichende Verifikation als wahr oder wahrscheinlich angesehen würde oder sonst auf irgendeine Weise die Tatsachen verdunkelte, die sich als ihr widersprechend erweisen.

Die Begründer der nichteuklidischen Geometrie waren sicherlich kühn, indem sie ihren abstrakten Entwickelungen die Bedeutung von wirklichen Hypothesen zuschrieben; aber sie verdienen, wie wir sehen werden, nicht den oben erwähnten Tadel. Mathematiker und Philosophen zugleich, stellten sie sich eine Frage, die den glänzendsten Triumph des kritischen Geistes bedeutet; und als Philosophen waren sie Positivisten im besten Sinne, indem sie die Antwort auf ihre Zweifel in den Tatsachen suchten und indem sie diese ohne Vorurteil prüften.

Während KANT sich bemühte, den psychologischen Charakter der Raumanschauung zu beweisen und ihren physikalischen Sinn zu zerstören, wandte GAUSS seine Aufmerksamkeit der genauesten Ausmessung der Winkel des geodätischen Dreiecks: Brocken, Hoher Hagen, Inselsberg zu[1]), um aus ihr innerhalb der auf der Erde in Betracht kommenden Genauigkeitsgrenzen eine experimentelle Bestätigung der Geometrie zu entnehmen;

1) Von diesem Dreieck, dessen Seiten 69, 85, 197 km lang sind, spricht GAUSS im § 28 seiner „Disquisitiones circa superficies curvas".



und LOBATSCHEWSKY befragte die Parallaxen der entfernten Sterne, ob bei solchen Größenordnungen die gewöhnliche Parallelentheorie noch gültig bleibt oder ob man sie durch eine nichteuklidische ersetzen muß, woran schon SCHWEIKART gedacht hatte, indem er dieser Geometrie den Namen der „astralen" gab.

Wir wollen versuchen, die Bedeutung solcher Experimente festzustellen.

Nach dem, was wir gesagt haben, kann die Frage der Parallelen *theoretisch* durch Ausmessung eines einzigen Dreiecks entschieden werden: wenn in diesem die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, so gilt die Annahme EUKLIDS, ist sie kleiner, die LOBATSCHEWSKYS, ist sie größer, die RIEMANNS. Wenn man in den beiden letzten Fällen mit $\alpha$ die Differenz zwischen der Winkelsumme und zwei Rechten bezeichnet (die im RIEMANNschen Fall positiv ist) und mit $A$ den Inhalt des Dreiecks, so kann man bzw. setzen

$$\frac{\alpha}{A} = -\frac{4}{\pi k^2},$$

oder

$$\frac{\alpha}{A} = +\frac{4}{\pi k^2},$$

und man kann dann zeigen, daß der Wert von $k$ von dem besonderen Dreieck unabhängig ist.

Die Konstante $\frac{\alpha}{A}$ erhält die Bezeichnung *Krümmungsmaß* (wegen gewisser Analogien mit der Flächentheorie); sie wird $= 0$ bei der euklidischen Hypothese, die man als Grenzfall der anderen für $k = \infty$ erhält.

Es ergibt sich demnach, daß das Parallelenproblem *physikalisch* nur dadurch gelöst werden kann, daß man durch genaue Messungen beweist, daß in irgendeinem Dreieck die Winkelsumme *merklich* kleiner oder größer als zwei Rechte ist. Findet man aber diese Summe merklich gleich zwei Rechten, so bleiben zwei Fälle möglich:

a) die euklidische Geometrie gilt physikalisch für beliebig genaue Messungen;
b) es gilt eine der beiden nichteuklidischen Geometrien, aber das (positive oder negative) Krümmungsmaß des Raumes ist sehr klein und folglich der Lobatschewskysche Parameter $k$ sehr groß, nämlich um so größer, je weniger die Winkelsumme unserer Dreiecke von zwei Rechten abweicht, abgesehen von den Beobachtungsfehlern.

Nun ergeben die genauesten Messungen an irdischen Dreiecken, wie dem von Gauss gemessenen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit, eine Bestätigung der euklidischen Geometrie. Daraus geht hervor, daß $k$ in bezug auf irdische Dimensionen eine gewisse Grenze überschreitet.

Wenden wir uns zur Astronomie. Hier findet man Dreiecke von Dimensionen, die im Vergleich zu den auf der Erde beobachteten ungeheuer sind; da der Nenner des Bruches

$$\frac{4}{\pi k^2}$$

viel größer ist, so kann man hoffen, die Größe $\alpha$ zu messen, obgleich $k$ die oben erwähnte Grenze überschreitet. Allerdings können wir bei himmlischen Dreiecken nicht mehr die *drei* Winkel messen, deren Summe um $\alpha$ von zwei Rechten abweichen soll, sondern nur *zwei* von ihnen. Betrachtet man z. B. einen Stern von zwei gegenüberliegenden Punkten der Erdbahn, etwa von den beiden Enden der großen Achse der Ekliptik, so kann man nicht den Winkel $x$ messen, unter dem man diese Achse von dem Stern aus sehen würde, sondern nur die beiden Winkel $a$, $b$, die von den nach dem Stern hinlaufenden Sehstrahlen mit ihr gebildet werden.

Nach der euklidischen Annahme hat man

$$a + b + x = 2\,\mathrm{R}$$



und folglich wird der Winkel $x$ durch die *Parallaxe* des Sterns $2\,\mathrm{R} - (a - b)$ gegeben, die gewöhnlich für den Fall bestimmt wird, daß einer der Winkel $a$, $b$ ein Rechter ist. Je weiter der beobachtete Stern entfernt ist, um so kleiner wird seine Parallaxe, bleibt aber immer positiv.

Im Falle der Lobatschewskyschen Hypothese dagegen wären die Parallaxen sämtlicher Sterne oberhalb einer gewissen (von $k$ abhängigen) Grenze; bei der Riemannschen Hypothese schließlich müßten sehr weit entfernte Sterne eine negative Parallaxe haben.

Folgendes ist zu beachten: wenn die Parallaxen alle positiv und oberhalb einer gewissen Grenze gefunden werden, so kann man offenbar daraus noch nicht schließen, daß die euklidische Annahme über die Parallelen widerlegt ist; die näherliegende Annahme wäre vielmehr, daß die Entfernungen aller dieser Sterne unterhalb einer gewissen Grenze bleiben. Immerhin würde dadurch nicht der Zugang zu genaueren Untersuchungen der irdischen Dreiecke oder der Mechanik des Planetensystems versperrt sein, aus denen sich eine experimentelle Bestätigung der Lobatschewskyschen Geometrie ergeben *könnte*.

Würde jedoch die Parallaxe irgendeines Sternes negativ gefunden werden, so würde dies bei Beibehaltung der Annahme der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes ein Beweis für die Gültigkeit der Riemannschen Geometrie sein.

Aber *die Beobachtung sagt uns, daß die Parallaxen der Sterne alle positiv oder merklich Null sind;* und dies ist das Ergebnis, zu dem uns *die nächsten* Sterne führen, d. h. diejenigen, die eine mit unseren Instrumenten meßbare Parallaxe haben.

Aus der Parallaxe von 1″ schließt Lobatschewsky, daß sein Parameter $k$ 200 000 mal größer ist als die

große Achse der Erdbahn, die ungefähr 300 Millionen Kilometer mißt. Es gibt aber auch Sterne, deren Parallaxe kleiner als 0,1″ ist, woraus folgt, daß *k* die besagte Achse 2 Millionen mal übertrifft; und der größte Teil der Sterne ist noch weiter entfernt, so daß er keine meßbare Parallaxe ergibt!

Demnach kann der physikalische Raum als euklidisch betrachtet werden, mit einer Annäherung, die die derzeitige Genauigkeitsgrenze unserer vollkommensten Instrumente überschreitet.

Dies ist die Schlußfolgerung Lobatschewskys, die sich in die Worte zusammenfassen läßt:

*Nach dem augenblicklichen Stand unserer Kenntnisse ist der physikalische Raum als euklidisch zu betrachten.*

Aber das rechtfertigt nicht die Behauptung, die Sache *könne nicht* anders sein.

Und es ist ungerecht, die Geometer deswegen anzuklagen, weil sie einen Zweifel erhoben haben, der nur für die Gegenwart beseitigt ist und auf eine vielleicht ferne Zukunft verschoben ist.

Wenn man gefunden hätte, daß die Parallaxen der Sterne alle oberhalb einer gewissen Grenze liegen, so ist nicht anzunehmen, daß man bei der Annahme der Entfernungen unterhalb einer Grenze stehen geblieben wäre. Wenigstens konnte man der geometrischen Annahme Lobatschewskys dadurch eine bestimmtere Form geben, daß man für den Parameter *A* einen nicht *zu* großen Wert wählte. Es wäre dann möglich geworden, sie, wie oben angegeben, in mehrfacher Weise zu kontrollieren, entweder indem man die Genauigkeit und die Zahl der irdischen Messungen vergrößerte oder indem man die mechanischen Folgen der Annahme untersuchte in bezug auf das Planetensystem. Es hätte dann sehr gut sein können, daß gewisse kleine Abweichungen von dem Newtonschen Gesetz eine Korrektur erfahren



hätten, die durch die bessere Übereinstimmung der Resultate befriedigt hätte.

Erst recht hätte man für die Annahme der später von Riemann formulierten nichteuklidischen Hypothese ein festes Fundament gehabt, wenn sich die Parallaxe irgendeines Sternes als negativ herausgestellt hätte.

Man kann auch nicht sagen, daß es genügt hätte, einfach die Hypothese der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes abzuändern. Es ist freilich leicht, die Dinge a priori in Übereinstimmung zu bringen, wenn man sicher ist, nicht durch die Erfahrung Lügen gestraft zu werden!

Zunächst kann ja diese Hypothese nicht angenommen werden, wie wir sahen, mit Rücksicht auf eine homogene Verteilung der Materie in dem umgebenden Medium, ohne das der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie gemeinsame Fundament zu erschüttern; wollte man aber konkret eine Einwirkung der Materie auf die Ausbreitung des Lichtes in den Himmelsräumen annehmen, so wäre eine solche Wirkung auf mehrere Arten einer indirekten Beobachtung zugänglich.

Anderseits könnte die Riemannsche Geometrie noch eine andere Bestätigung erhalten. In dieser Geometrie wäre nämlich die Gerade eine geschlossene endliche, wenn auch sehr lange Linie, so daß ein entfernter Stern zu gleicher Zeit von zwei Beobachtern gesehen werden könnte, die sich auf entgegengesetzten Punkten der Erde befänden.

Schließlich müssen wir wiederholen, daß, wenn auch vielleicht die geometrische Frage der Parallelen durch optische Beobachtungen auf dem Gebiete der Fixsternastronomie nicht endgültig hätte *gelöst* werden können, dennoch diese Beobachtungen den Zweifel der nichteuklidischen Geometer befestigen und bestimmter hätten gestalten und so dazu führen können, daß man dafür

in der Mechanik des Planetensystems eine indirekte Bestätigung suchte.

Wenn wir die Gültigkeit der euklidischen Geometrie mit einem Grade der Annäherung behaupten, der positiv mit der exakten Gültigkeit zusammenfällt, so sagen wir damit, daß *heute*, abgesehen von den *(zufälligen)* Fehlern, welche der Anwendung der durch die Geometrie symbolisch ausgedrückten Hypothesen anhaften, in den Hypothesen selbst kein Fehler ist, der durch die direkte oder indirekte Prüfung ihrer Folgen bemerkbar würde.

Die Bedeutung des durch LOBATSCHEWSKY erhobenen Zweifels besteht in dem bescheidenen Eingeständnis, daß wir nicht wissen, ob nicht in ferner Zukunft ein solcher Fehler festgestellt werden wird. Nur diese *Möglichkeit* wird von denen bestritten, die das Urteil der modernen Kritik über die *strenge* Gültigkeit unserer Geometrie nicht zugeben wollen.

## § 11. Die Nichtanschaulichkeit der nichteuklidischen Geometrien.

Was bleibt nun an Einwänden gegen diese Möglichkeit bestehen?

Der Bewertung der Erfahrungen steht nur das alte Argument entgegen, nach dem *unmöglich* ist, was *undenkbar* oder besser *unanschaubar* ist.

Allerdings stehen wir trotz der Konstruktion eines adäquaten Begriffssystems vor der *psychologischen Unmöglichkeit, uns die wirklichen Erscheinungen in einer von der gewöhnlichen Anschauung abweichenden räumlichen Form vorzustellen.* Aber dieses *Gefühl der Notwendigkeit*, das unsere Raumanschauung begleitet, sagt uns gar nichts über die Konstruktion des Raumes selbst, sintemalen die physische Wirklichkeit in keiner



Weise verpflichtet ist, sich nach der Vorstellung zu richten, die wir uns von ihr machen.

Um die Frage zu erklären, hat GAUSS einen Beweisgrund angeführt, der später von HELMHOLTZ und von CLIFFORD wieder aufgenommen wurde, und gewöhnlich unter dem Namen des ersten dieser beiden Philosophen geht.

Stellen wir uns *Flächentiere* vor, d. h. Tiere, die auf einer Fläche plattgedrückt wären und imstande wären, sich auf ihr kriechend zu bewegen. Versehen wir sie mit einer Raumanschauung, die dazu diente, in dem zweidimensionalen Gebilde (der Fläche), das *ihren Raum* darstellt, ihre Empfindungen zu ordnen und ihre Bewegungen zu leiten.

Zwei ähnliche Tiere, von denen das eine sich in einer Ebene, das andere auf einer schwach gekrümmten Fläche bewegte, könnten durch dieselbe geometrische Anschauung geleitet werden, indem sie sich beide ihren Raum als Ebene vorstellten.

Die Tatsachen, die im zweiten Falle dem Tiere erlauben würden, eine Kenntnis von der *Krümmung* seiner Fläche zu erlangen, ohne aus ihr herauszugehen (da es, nach Annahme, die dritte Dimension nicht kennt), sind ganz analog denjenigen, die uns Menschen die Falschheit der im strengen Sinne aufgefaßten Parallelentheorie anzeigen würden; aber diese Tatsachen würden sich der Kontrolle des Tieres entziehen, wenn es sehr klein wäre im Verhältnis zu der Fläche, auf der es lebt, und zu deren Krümmung.

Und dennoch, wenn sich in der Tiergesellschaft Philosophen befänden, wer weiß, ob nicht einer von ihnen aus der Anschauung, die sie sich von ihrer eigenen Umgebung als von einer ebenen Fläche gebildet hätten, auf die strenge und notwendige Ebenheit der Fläche selbst schließen würde?!

## § 12. Von anderen möglichen Geometrien.

In seiner Erinnerungsschrift „GAUSS zum Gedächtnis" sagt SARTORIUS: „GAUSS betrachtete die Geometrie als ein logisches Gebäude, nur sofern die Parallelentheorie als Axiom angenommen würde; aber er war zu der Überzeugung gelangt, daß dieser Satz sich nicht beweisen ließe, wenn man auch durch Erfahrung wisse, daß er annäherungsweise wahr sei."

Wir wissen nicht, ob der zweite Teil dieser Bemerkung wirklich den reifsten Ansichten von GAUSS entspricht; wir sind sogar geneigt, daran zu zweifeln, in anbetracht der Beobachtungen, die er mit dem Theodoliten anstellte, um das Postulat der Geraden zu bestätigen.

Wie dem auch sei, die Meinung, die SARTORIUS GAUSS im ersten Teile des aus seiner Rede zitierten Abschnitts zuschreibt, ist nicht annehmbar. Denn keinem der geometrischen Postulate kann der Charakter eines logischen Axioms zugeschrieben werden; und jede der (vom logischen Standpunkte, wie wir erkannt haben, fehlerhaften) Definitionen der geometrischen Grundbegriffe schließt eine Existenzbehauptung ein.

Wir haben schon bemerkt, daß die Grundeigenschaft der geraden Linie die Annahme einer gewissen Symmetrie in den Erscheinungen erfordert, d. h. eines Systems von Übereinstimmungen, ohne die es nicht möglich wäre, so viele verschiedenartige Tatsachen in einer *einzigen* geometrischen Vorstellung zu vereinigen.

Von dieser Hypothese können wir sagen, daß sie zurzeit von allen unseren Erfahrungen bestätigt wird, aber nicht mehr. Es erscheint nicht leicht, eine Abschätzung des Grades ihrer Genauigkeit zu geben, obgleich wir nicht fehlgehen dürften, wenn wir behaupten, daß ihre relative Genauigkeit ungeheuer groß ist.



Aber wenn man auch die Hypothesen, die den Grund der *Einheit* der (metrischen, optischen ...) Geometrie bilden, als Postulate annimmt, so darf man doch nicht glauben, daß damit *ein einziges* allgemeines geometrisches System, eine Pangeometrie, möglich sei, in der nur die Frage der Parallelen offen bliebe.

Im Gegenteil lehren uns die neuesten mathematischen Untersuchungen, daß dann noch unendlich viele verschiedene geometrische Systeme nicht nur logisch, sondern auch physikalisch möglich bleiben.

Als Beispiel führen wir die räumlichen Formen von CLIFFORD-KLEIN an, welche mögliche physikalische Beschaffenheiten des Raumes darstellen, die ganz verschieden sind für einen Beobachter, der den engen Grenzen unserer Erfahrung unterworfen ist, und für einen, der sie beträchtlich erweitern kann.

## § 13. Die nichtarchimedische Geometrie und die Willkürlichkeit der Postulate.

In den vorstehenden Beispielen drücken die *Postulate*, die den verschiedenen Geometrien entsprechen, *verschiedene physikalische Hypothesen* aus; die in der vorliegenden Erfahrung noch nicht festgestellte Abweichung kann immer noch durch weitere mögliche Erfahrungen festgestellt werden. Aber man kann, und das ist in den letzten Jahren in der Tat geschehen, andere logisch voneinander verschiedene Geometrien konstruieren, denen dennoch keine hypothetischen physikalischen Verschiedenheiten entsprechen. Das schönste Beispiel bietet die *nichtarchimedische Geometrie*, die von VERONESE (1891) konstruiert und neuerdings von D. HILBERT und seiner Schule mit Beziehung auf andere wichtige mathematische Probleme weiterentwickelt worden ist.

Diese Geometrie beruht auf der Leugnung des sogenannten Postulates, von dem man erkannte, daß es

von den gewöhnlichen anderen geometrischen Voraussetzungen unabhängig ist. Man nimmt also die „Existenz von Strecken an, derart, daß jedes noch so große ganze Vielfache der einen kleiner als die andere ist".

Eine solche Annahme hat einen bestimmten mathematischen Sinn als Beziehung zwischen gewissen Begriffen, aber sie hat *keinen physikalischen Sinn*, da sie in keiner Weise der Erfahrung zugänglich ist: eine *(aktual unendlich kleine)* Strecke, von der jedes ganzzahlige Vielfache kleiner ist als unsere Maßeinheit, wäre in bezug auf diese und auf unsere Sinne (z. B. den Tastsinn) transzendent definiert, so daß die Annahme einer solchen Strecke direkt keinen Gegenstand möglicher Sinneswahrnehmung darstellt.

Aber mehr noch, diese Hypothese hat auch keine indirekte physikalische Bedeutung. In der Tat hat Veronese gezeigt, daß sich die Sätze der nichtarchimedischen Geometrie bei *unendlich hoher Annäherung* als identisch mit denen der gewöhnlichen deuten lassen, so daß man schließen kann: „*die archimedische und die nichtarchimedische Geometrie drücken vermittelst verschiedener Begriffssysteme dasselbe System von Annahmen über die Lagebeziehungen der Körper aus.*"

Demnach sind „*Postulate von verschiedener Form imstande, dieselbe physikalische Wirklichkeit darzustellen*".

Die nichtarchimedische Geometrie bietet eine interessante Illustration dieser *verhältnismäßigen Willkürlichkeit der Postulate* in bezug auf die wirkliche Welt, eine Willkürlichkeit, die F. Klein in seinem Gutachten für Kasan beleuchtet hat, und der Poincaré, unserer Ansicht nach, einen zu breiten Platz einräumt, wenn er jedes Postulat als eine *Verabredung* ansieht. Ein konventionelles Element ist allerdings in den Postulaten enthalten, insofern „Systeme von Postulaten existieren, die in verschiedener Weise dieselben physikalischen



Hypothesen ausdrücken"; aber neben diesen untereinander äquivalenten Systemen von Postulaten gibt es, wie wir sahen, auch solche, denen experimentell unterscheidbare physikalische Möglichkeiten entsprechen. Eine willkürliche Auswahl, die nur durch die an die räumliche Darstellung zu stellenden *ökonomischen* Anforderungen bestimmt wird, ist nur dann erlaubt, wenn es sich entweder um äquivalente Systeme handelt oder um solche nichtäquivalente, zwischen denen eine Entscheidung zu treffen der bisherigen Erfahrung noch nicht gelungen ist; aber im ersten Falle ist die Wahl gänzlich *konventionell* und frei, im zweiten dagegen enthält sie eine Hypothese über Tatsachen und nimmt daher das Ergebnis möglicher Erfahrungen vorweg, von denen nicht ausgeschlossen ist, daß sie jene Hypothese widerlegen werden.

## B. Die psychologische Entstehung der geometrischen Begriffe.

### § 14. Die Problemstellung.

Wir haben gesehen, daß die Bewertung der Experimente dazu führt, verschiedene physikalisch mögliche Geometrien anzunehmen, und die mathematische Kritik zeigt schließlich, daß es möglich ist, ein und dasselbe System von Hypothesen über den wirklichen Raum durch verschiedene Begriffs- und Postulatensysteme darzustellen. Aber trotz der Willkürlichkeit, die infolgedessen der geometrischen Konstruktion anhaftet, trifft die Anschauung, wie sie sich in jedem Geiste ausbildet, eine bestimmte Wahl, indem sie eine psychologisch wohldefinierte Vorstellung des Raumes hervorbringt. Es erhebt sich demnach das für den Psychologen interessante Problem, diese Anschauung zu erklären.

Aber in welcher Richtung soll man eine solche *Erklärung* suchen?

Die Antwort schwankt zwischen zwei einander entgegengesetzten leitenden Gesichtspunkten, die sich gegenseitig den Rang streitig machen: dem *Nativismus* und dem *Empirismus*. Aus der KANTischen Behauptung, daß „die räumlichen Beziehungen solche seien, die der Geist zwischen möglichen Empfindungen herstellt", leitet sich der Nativismus ab, der die Anschauung von diesen Beziehungen an die anatomisch-physiologisch-psychologische Struktur des Menschen knüpft. Aus der Behauptung, daß „die räumlichen Beziehungen zu den Gegenständen der Sinneswahrnehmung (Gesichtssinn, Tastsinn usw.) gehören", folgert die empiristische Philosophie, daß die Anschauung der räumlichen Relationen einfach die Wiederholung vorhergegangener Sinneswahrnehmungen sei und sich letzten Endes auf eine Summe von durch Wahrnehmung vermittelten Kenntnissen und Tatsachen zurückführen lasse.

Nun scheinen die Voraussetzungen des Nativismus sowohl als des Empirismus bis zu einem gewissen Grade wahr zu sein, aber die daraus gezogenen Folgerungen einseitig und unvollständig. Der Nativismus verfährt so, als ob es möglich wäre, sich eine Seele zu denken, die vor der Anwendung der Sinne und unabhängig von der äußeren Welt gebildet wäre; der Empirismus wiederum führt alle psychische Aktivität auf eine passive Rezeptivität zurück.

Die beiden Ansichten können miteinander ausgesöhnt werden, wenn man versucht, *die Anschauung dadurch zu erklären, daß man sie als das Ergebnis einer von den Sinneswahrnehmungen ausgehenden psychischen Entwickelung auffaßt, wobei die Struktur des Subjekts berücksichtigt wird.*



## § 15. Beziehungen zu dem biologischen Problem der räumlichen Orientierung.

Aber das Problem kompliziert sich dadurch, daß zu der psychologischen eine biologische Untersuchung hinzukommt, die offenbar vorher angestellt werden muß.

Der empiristischen Behauptung, daß die räumlichen Beziehungen zu den Gegenständen der Sinneswahrnehmung gehören, stellen die Nativisten die Erwägung gegenüber, daß „eine Kenntnis der Lagebeziehungen als Bedingung der Möglichkeit des Gebrauchs der Sinne angesehen werden kann (Anpassung des Sinnesorgans an das Objekt)". Hier erhebt sich das Problem der *Orientierung im Raume*, d. h. der *Zuordnung der Bewegungen zu den Wahrnehmungen*, von dem viele glauben, daß die psychologische Frage sich ohne weiteres darauf zurückführen ließe.

Nachdem so der Gegenstand des Problems verschoben worden ist, dehnt die Entwickelungslehre die Untersuchung vom Menschen auf das Tier aus, und von dem tierischen Individuum auf die Art. Und der Empirismus verbindet sich mit der epigenetischen Ansicht LAMARKS in der Lehre SPENCERS[1]), der die Orientierung im Raume als eine Fähigkeit ansieht, die durch den häufigen Gebrauch der Sinne erworben, durch Vererbung übertragen und so in der Art befestigt worden ist.

Demgegenüber findet der Nativismus seinen biologischen Ausdruck in den präformistischen und neopräformistischen Theorien, die die Ursache der phylogenetischen Variation systematisch in den inneren mechanischen, physischen und biologischen Zuständen des Lebewesens suchen und es dem DARWINschen Prinzip der natürlichen

1) Vgl. besonders seine „Principes de Psychologie", übers. von RIBOT und ESPINAS. 1874 (Bd. II Kap. XIV).

Zuchtwahl überlassen, den Gegensatz gegen die äußere Umgebung zu beseitigen.

Wir beabsichtigen nun nicht, das Raumproblem unter diesem Gesichtspunkt zu untersuchen[1]). Es genügt hervorzuheben, daß in der Ersetzung des ursprünglichen Empirismus durch die SPENCERsche Lehre bereits das Zugeständnis liegt, daß in der räumlichen Orientierung des menschlichen oder tierischen Individuums etwas Angeborenes liegt.

Von dem hier Gesagten wollen wir uns vor allem das Ergebnis merken, daß „die Entwickelung der Zuordnung

1) Abgesehen von den allgemeinen biologischen Gesichtspunkten halten wir es für ziemlich zweifelhaft, ob sich ein Fortschritt in der angeborenen Zuordnung von Bewegungen und Sinneswahrnehmungen feststellen läßt, wenn man die zoologische Leiter hinaufsteigt. Während das Kind drei Jahre braucht um gehen zu lernen, und der erwachsene Blindgeborene, dem das Augenlicht wiedergegeben wird, drei Monate, um seinen Gebrauch mit den Bewegungen in Einklang zu bringen, zeigt sich bei den Küchlein eine bewundernswerte Schnelligkeit der Anpassung (s. die Experimente, die SPALDING an Küchlein vornahm, denen er Kapuzen aufgesetzt hatte, in dem Buche von ROMANES über „die geistige Entwickelung der Tiere" — S. 155 der frz. Übers.).

Anderseits zeigt die Überlegung, daß die Entwickelung des Organs der Zuordnung eine andere sein muß als die der Funktion. Diese hat die Tendenz, vom *Bewußten* zum *Unbewußten* überzugehen; ursprünglich ein *Willensakt*, wird sie immer mehr zum *Reflex* (vgl. LEWES „Physiology of common life"), jene dagegen strebt nach einer immer komplizierteren und bewußteren Funktion, je mehr sich die Nervenbahnen und ihre Verbindungen vermehren. Indem demnach die Mannigfaltigkeit der möglichen Koordinationen im Laufe der phylogenetischen Entwickelung sich vermehrt, so scheint es, als ob die Bedeutung des empirisch erworbenen Bestandteils in der Orientierung des Tieres ständig zu wachsen, während dagegen die ursprünglichen Orientierungsmethoden, die ziemlich unveränderlich geworden sind, mehr der Struktur des Organismus bei den niederen Formen anzugehören scheinen.



zwischen Bewegungen und Empfindungen, d. h. die räumliche Orientierung sowohl bei den Tieren als beim Menschen das Ergebnis von Erfahrungen ist, die unter gewissen anatomisch-physiologischen Bedingungen gemacht worden sind"[1]), ohne zu untersuchen, ob und wieweit diese Bedingungen mit den mechanischen Gesetzen des Organismus zusammenhängen.

Dabei müssen wir aber gleich gegen die Behauptung einiger neukantischer Philosophen Einspruch erheben, daß diese in dem anatomisch-physiologischen Bau des menschlichen Organismus liegenden Bedingungen sich in gewissen apriorischen Eigenschaften der Raumanschauung widerspiegelten, indem sie der Geometrie ihre Postulate lieferten, sobald einmal die geometrischen Begriffe aus Empfindungen gebildet seien. So versucht W. WUNDT in den „Grundzügen der physiologischen Psychologie"[2]) (Bd. II S. 27) die *Ebenheit* des Anschauungsraumes aus der Anordnung der Augen zu erklären, die eine geradlinige Bewegung bevorzuge, obgleich es doch einleuchtet, daß der Bewegungsapparat der Augen ungefähr wie zwei zusammengesetzte Pendel wirkt, bei denen eine geradlinige Bewegung nur durch komplizierte Kompensationen erreicht werden kann. E. G. HEYMANS[3]), der sich bestimmter die psychologische Erklärung der geometrischen Postulate zur Aufgabe macht, betrachtet die gerade Linie als eine „gleich-

1) In seiner Untersuchung „Über die Raumwahrnehmung des Tastsinnes" (Berlin, Reuter-Richard, 1898) sieht sich V. HENRI genötigt, beim Menschen das Vorhandensein einer ursprünglichen anatomisch-physiologischen Anlage zuzugeben, vermöge deren ein peripherischer Reiz Reflexbewegungen hervorruft, die das Tastorgan in die Nähe der gereizten Stelle führen.

2) Leipzig, Engelmann, 1880.

3) „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie". 1888. Bd. XII, S. 279.

förmige Innervationsreihe" (?) und gibt vor, daraus a priori ihre Grundeigenschaft, durch zwei Punkte bestimmt zu sein, abzuleiten, und zwar mit Hilfe eines analytischen Symbolismus, dessen Anwendung uns ganz willkürlich scheint.

Aber allen derartigen Versuchen müssen wir von vornherein entgegenhalten, daß, wenn auch die Orientierung von dem anatomischen Bau abhängt, sie uns doch nur durch gewisse Empfindungen (Muskel-, Tast-, Gesichts- usw. -empfindungen) zum Bewußtsein kommt, und die rohen Daten dieser Empfindungen gestatten nicht, die Willkür zu beseitigen, die der Auswahl der Postulate anhaftet, und besonders nicht ihnen den Charakter der Exaktheit zuzusprechen, der den anschaulich vorgestellten räumlichen Beziehungen zukommt.

Es handelt sich also hier um eine psychische Entwickelung, um eine Verarbeitung und Vereinfachung der Sinnesdaten, deren subjektive Bedingungen im Geiste selbst zu suchen sind und nicht im anatomischen Bau der Muskeln, Knochen usw.

## § 16. Programm der weiteren Untersuchungen.

Unserer Untersuchung wird es nun gelingen, diese Entwickelung als einen *Assoziations- und Abstraktionsprozeß* darzustellen und *die erwähnten Bedingungen auf die logischen Operationsgesetze zurückzuführen*, woraus sich dann gewisse formale Eigenschaften der Postulate und das mit ihnen verbundene Gefühl der Evidenz oder der Notwendigkeit erklären[1]).

Genauer: nachdem wir die *Entstehung der geometrischen Begriffe*, deren Beziehungen die Postulate ausdrücken, verstanden haben, werden wir sehen, daß diese Postulate sich in zwei Teile teilen lassen: der eine drückt einfach einen irgendwie evidenten Tatbestand aus, der aber die *Bedingung* dafür darstellt, daß eine gewisse Reihe von verschiedenen Vorstellungen, die unbegrenzt fortsetzbar ist, unter einen einzigen Begriff gebracht werden kann; der andere reduziert sich auf ein logisches Prinzip oder Axiom und gehört zu der bereits oben untersuchten logischen Funktion des Denkens (Kap. III).

1) Vgl. F. Enriques, „Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria". Rivista filosofica, Pavia 1901.



Da der Begriff einer Figur als Repräsentant eines wirklichen Gegenstandes aufzufassen ist, der mehreren verbundenen Empfindungen entspricht, so stellt die Existenz oder die Möglichkeit eines hypothetischen Gegenstandes, der einer gegebenen Verbindung von Empfindungen entspricht, den *geometrischen Tatbestand* dar, der durch die Postulate ausgedrückt wird; die *Form* dagegen, in der sie vor der Anschauung des Geometers erscheinen, und die Evidenz, mit der sie verbunden sind, rühren von den *logischen Sätzen* her, *die sich auf denselben Tatbestand beziehen.*

## § 17. Quellen der Kritik.

Aber man kann in den Sinn dieser Erklärung nicht tiefer eindringen, ohne vorher das Problem gelöst zu haben, die Entstehung der geometrischen Begriffe zu erklären.

Die Tatsachen, die unsere Aufmerksamkeit verdienen, gehören einerseits der physiologischen Psychologie, anderseits der Geometrie an.

Denn es ist Sache der Physiologie, uns zu erklären, in welcher Weise die Ausdehnungsbeziehungen durch den Gesichts-, den Tast- oder den Muskelsinn wahrgenommen werden; um aber diese Ergebnisse in passender Weise zu deuten, muß man wissen, in welcher Weise

sich diese wahrgenommenen Beziehungen mit den geometrischen Begriffen verbinden.

Der physiologische Gesichtspunkt allein genügt noch nicht, um über die Probleme der Unterscheidung der gleichzeitigen Empfindungen oder der Lokalisation einer Empfindung oder der Bestimmung einer Lage im Raume hinauszukommen, und diese Probleme haben, wie unser Landsmann G. Cesca[1]) mit Recht bemerkt, noch nichts mit der psychologischen Erklärung der Entstehung der räumlichen Kenntnisse zu tun.

Helmholtz hat mit Recht auf die hier vorliegende Notwendigkeit aufmerksam gemacht, die physiologische Forschung im Lichte einer Kritik der geometrischen Postulate zu leiten und zu interpretieren. Aber es scheint, daß man diese Lehre nach ihm nicht beherzigt hat, und daß gerade deswegen die experimentelle Arbeit, die von verschiedenen Seiten fortgesetzt wurde, nicht den Erfolg gehabt hat, den sie zu versprechen schien.

Indessen haben die Forschungen über die Grundlagen der geometrischen Wissenschaft, die zur Zeit von Helmholtz eben anfingen sich der Hilfsmittel zu bedienen, die in den höheren mathematischen Disziplinen für sie bereit lagen, dank derselben eine ungeheure Entwickelung genommen. Und die Ergebnisse, die in dem dazwischenliegenden halben Jahrhundert erreicht worden sind, sind derart, daß kein Physiologe, der über die psychologische Raumfrage arbeitet, ihrer Kenntnis entbehren kann.

## § 18. Allgemeine Bemerkungen über den räumlichen Gehalt der Wahrnehmungen.

In jeder Wahrnehmung findet sich ein räumlicher Bestandteil oder kann sich darin finden. Es scheint,

1) „Le teorie nativistiche e genetiche della localizzazione spaziale". Verona-Padova, 1883.



daß bei den Hunden der Geruchssinn in hervorragender Weise an der Orientierung beteiligt ist. Und beim blindgeborenen Menschen sollen sich, nach dem Zeugnis von Hitschmann[1]) die räumlichen Vorstellungen gewöhnlich mit dem Gehör verbinden. Aber in der Regel sind es beim Menschen die Muskel-, Tast- und Gesichtsempfindungen, die durch ihr Zusammenwirken die räumlichen Vorstellungen erzeugen.

Gegenstände derselben sind *Punkte*, *Linien* und *Flächen*. Die Linien können durch Bewegung eines Punktes, die Flächen durch Bewegung einer Linie *erzeugt* werden; dennoch entsprechen die Linien und Flächen, sobald man sie sich verwirklicht denkt, Gruppen von Empfindungen, die von denen verschieden sind, welche die Variation des erzeugenden Gebildes liefert.

Hieraus ergibt sich eine zweifache Art, sich Linien und Flächen vorzustellen, auf die wir gleich die Aufmerksamkeit des Lesers lenken wollen, nämlich eine *genetische* und eine *aktuale*.

Die vollständige Vorstellung, die wir uns von einer Linie oder einer Fläche bilden, müssen wir uns entstanden denken aus der Verbindung der diesen beiden Betrachtungsweisen entsprechenden Empfindungsgruppen.

Aber nicht erst die Fläche oder die Linie, sondern bereits der *Punkt* darf nicht als *Gegenstand einer einzelnen Empfindung* betrachtet werden, sondern muß als etwas angesehen werden, *das einer Gruppe von verbundenen Wahrnehmungen entspricht*.

Die Behauptung der Existenz eines Punktes hat vor allem eine Bedeutung relativ zu der Lage des Beobachters und schließt die Aussage ein, daß gewisse

1) „Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane", III, S. 388.

Tast- oder Gesichtsempfindungen gegebene Muskelempfindungen, durch die gewisse Bewegungen subjektiv definiert sind, begleiten oder auf sie folgen. Nur in diesem Sinne, durch den eine Beziehung hergestellt wird zwischen einem expressiven und einem rezeptiven Sinn, kann man von der „Wahrnehmung eines Punktes" sprechen.

Aus diesem Gesichtspunkt löst sich auch das Problem der *räumlichen Lokalisation* nach der sogenannten *assoziativen Theorie* von BAIN, TAINE und DELBOEUF.

Es kommt hinzu, daß die *Unterscheidung der gleichzeitigen Tast- und Gesichtsempfindungen* durch die sogenannten *Lokalzeichen* LOTZES möglich wird, indem man nämlich die Unterschiede zwischen den Punkten der Haut und zwischen denen der Netzhaut berücksichtigt, besonders im Hinblick auf ihre Beziehungen zu den benachbarten Punkten; es gibt also eine ziemlich befriedigende Lösung des Problems, physiologisch zu erklären, „wie es möglich ist, eine Lage im Raume zu bestimmen".

## § 19. Die physiologischen Räume und der geometrische Raum.

Da die Feststellung eines Punktes als rohe Tatsache von der Stellung des Beobachters abhängt und die Beziehungen zwischen den Punkten bei einer Veränderung dieser Stellung dem Subjekt als verschieden erscheinen, so bildet die Gesamtheit der so aufgefaßten Punkte einen von dem Beobachter selbst abhängigen *physiologischen Raum*, der von dem *geometrischen* verschieden ist. Diese grundlegende Unterscheidung findet sich in den „Beiträgen zur Analyse der Empfindungen" von E. MACH[1]) und in den von ihm zitierten Untersuchungen von HERING (op. c. 5. Aufl. S. 102).

1) Jena, G. Fischer, 1886.



Auch andere Autoren haben ihre Aufmerksamkeit dem Umstande zugewandt, daß der physiologische Raum nicht die Eigenschaften der Homogeneität und der Isotropie besitzt, die wir dem geometrischen Raume zuschreiben, z. B. H. POINCARÉ in seinem bereits zitierten Buche. Die Sache erscheint uns im übrigen so einleuchtend, daß wir es für unnötig halten, länger bei diesen Unterschieden zu verweilen.

Aber aus dieser Feststellung ergibt sich das Problem, zu erklären, wie man aus der gegebenen Raumwahrnehmung zu der geometrischen Vorstellung aufsteigt.

Man muß hier zu den Assoziationen der Wahrnehmungen einen *Abstraktionsprozeß* hinzunehmen.

Die Aussage, daß *„der geometrische Raumbegriff durch Abstraktion aus den verschiedenen möglichen physiologischen Räumen in bezug auf einen beweglichen Beobachter hervorgeht"*, kann jedoch nicht als eine erschöpfende Antwort auf die oben gestellte Frage angesehen werden, solange nicht aufgeklärt ist, wie der physiologische Raum selbst vermöge der Assoziationen und Abstraktionen sich einer quasi-geometrischen Vorstellung *in bezug* auf den Beobachter annähert, und anderseits, wie die unsymmetrischen Bestandteile, die den verschiedenen Räumen anhaften, bei ihrer Zusammenfassung beseitigt werden.

Die erste dieser Fragen zu lösen, wollen wir einer genaueren Analyse der Sinneswahrnehmungen überlassen, in bezug auf die zweite jedoch wollen wir bemerken, daß eine systematische Dissymmetrie in bezug auf die Bewegungen des Beobachters in der vertikalen Richtung durch die Schwerkraft gegeben wird; auch diese Bemerkung rührt von MACH her.

Wir glauben daher zu dem Schluß berechtigt zu sein, daß der Fortschritt von der physiologischen Vorstellung zur geometrischen auf einer Vergleichung der verschie-

denen möglichen *Sehräume* beruht, in die die Elemente, die von anderen Sinnen herrühren, bereits aufgenommen sind. Jene mechanische Dissymmetrie besteht nämlich nicht für die optischen Erscheinungen.

Eine ernstere Schwierigkeit, die von einem mehr verstandesmäßigen Abstraktionsprozeß herrührt, wird sich also bei der Entstehung des Raumbegriffs bei den Blindgeborenen einstellen; und eine ähnliche Schwierigkeit ergibt sich bei der *mechanischen Vorstellung* des Raumes, wie wir später zu bemerken Gelegenheit haben werden.

Wir wollen nunmehr dazu übergehen, im besonderen die begrifflichen Elemente zu untersuchen, die von den verschiedenen Sinnen der Raumvorstellung geliefert werden. Wir werden dieses Thema vor allem in einer Weise behandeln, die unsere Gedanken auch demjenigen zugänglich macht, der keine spezielle mathematische Vorbildung auf diesem Gebiete besitzt, und die die Notwendigkeit, in diesen Fragen solche Überlegungen anzustellen, deutlicher erkennen läßt.

## § 20. Die räumlichen Daten des Gesichtsinnes und die projektive Geometrie.

Es wird genügen, wenn wir aus den zahlreichen Forschungsergebnissen über die Physiologie des Gesichtsinnes (auf die sich die Beobachtungen und Experimente von Lotze, Weber, Volkmann, Fechner, Helmholtz, Panum, Donders, Hering, Wundt, James, Mach usw. beziehen) ein Grundschema des Prozesses entnehmen, ohne uns auf eine Diskussion der Einzelheiten einzulassen.

Die elementaren Tatsachen des Sehens sind die folgenden:

1. Die Entstehung des *Bildes* auf der Netzhaut, das einer ebenen Zentralprojektion des Gegenstandes entspricht.



2. Die *Augenbewegungen*, die normalerweise um das sogenannte Donderssche Zentrum erfolgen, und annähernd dem Listingschen *Gesetz* gehorchen und ferner dem der *konstanten Orientierung*, das davon abhängt.
3. Die *Vereinigung* der entsprechenden Bilder beim *binokularen Sehen*. Hierbei ist zu bemerken, daß normalerweise diese Vereinigung nicht nur dann stattfindet, wenn die Bilder in *(identische)* Punkte fallen, die auf den beiden Netzhäuten entsprechende Stellen einnehmen, sondern innerhalb gewisser Grenzen, bei den Bildern, die einem und demselben äußeren Punkte entsprechen, so daß infolge verschiedener Nebenumstände eine *Anpassung* des Organs stattgefunden hat; der einzelne Punkt wird ungefähr in der Richtung des Strahls gesehen, der den Winkel zwischen den beiden Sehstrahlen halbiert.

Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, sind wir in der Lage, das viel umstrittene Problem zu diskutieren, *„ob der Gesichtsinn uns eine unmittelbare Wahrnehmung der Entfernung zwischen zwei Punkten, d. h. der Größe des Objektes vermittelt"*.

Die einfache Tatsache des binokularen Sehens nach der Adaptation stellt sich als eine *bizentrale Projektion*, d. h. als eine doppelte und gleichzeitige Projektion des Objektes von zwei Zentren auf zwei Ebenen dar.

Wenn wir den Mathematiker fragen, was aus dieser Darstellung zu entnehmen ist, so braucht er sich nur auf die Untersuchungen über *Photogrammetrie* zu beziehen, mit der sich die neueren Arbeiten von Hauck und Finsterwalder beschäftigen.

Zwei Projektionen des Objektes genügen, wie ersichtlich, um es zu rekonstruieren, wenn das *System der Projektion*, d. h. die respektiven Zentren und Ebenen,

*gegeben* sind. Dann kann auch die Entfernung zweier Punkte, deren Bilder bezeichnet werden, bestimmt werden, und zwar auf Grund gewisser Maße, die dem *gegebenen System* angehören, nämlich der Entfernung der Sehzentren der beiden Netzhäute und der Neigung ihrer Ebenen zueinander bei jeder gegebenen Adaptation.

In Ermangelung dieser Elemente genügen vier Bilder, um das Objekt, abgesehen von einer Ähnlichkeit, zu rekonstruieren; fünf Bilder, zwischen denen die nötigen Beziehungen bestehen, bestimmen außerdem noch seine Größe.

Was folgt aus diesen Resultaten für unser Problem?

Die Daten, die uns der Gesichtsinn beim Bewegen der Augen an den mannigfachen Bildern übermittelt, die wir uns von einem Gegenstand bilden können, enthalten die Elemente, aus denen mathematisch eine Vergleichung der Entfernungen abgeleitet werden kann; aber dies *hat* bei den einzelnen Bildern *keinen Sinn;* dazu kommt, daß man die Beurteilung der Entfernungen nicht als unmittelbar durch das Sehen gegeben betrachten kann, weil die metrischen Elemente des entsprechenden Projektionssystems zum Teil anatomische Daten sind und zum Teil solche, die von der Akkommodation abhängen und nicht als dem Beobachter *vor* der Erfahrung und vor der Vergleichung und Assoziation mit anderen Sinnen, die dazu nötig ist, *bekannt* angesehen werden können.

Daher muß die Erweiterung des Sehvermögens zu einer Wahrnehmung der Form und Größe der Gegenstände auf empirischem Wege erworben sein.

Die Notwendigkeit, bei dieser Entwickelung andere mit dem Gesichtsinn verbundene Empfindungen zu berücksichtigen, folgt auch aus der Theorie, die den Gesichtsinn als Ergebnis einer im Laufe der Entwickelung erfolgten Differentiation aus dem allgemeinen



Tastsinn betrachtet. In diesem Falle muß man eine gewisse unmittelbare Wahrnehmung der Entfernungen, die rein subjektiv ist, annehmen, vermöge deren mit dem Auge die *scheinbare Entfernung* zweier Punkte wahrgenommen wird, auf Grund der Länge ihrer Projektion auf die Netzhaut. Diese angeborene Beurteilung, die auch den Muskelempfindungen bei der Bewegung des Auges zukommt, kann nur durch eine ausgebreitetere Erfahrung, bei der die Bewegungen des Beobachters und die anderen Empfindungen hinzukommen, korrigiert werden.

Die vorstehenden Induktionen beruhen auf der Betrachtung des anatomisch-physiologischen Baues des Sehorgans. Sie werden unterstützt durch eine Untersuchung der Frage vom psychologischen Standpunkt.

Unter den mannigfachen Tatsachen, die von Helmholtz (Physiologische Optik) und seiner Schule festgestellt worden sind, wollen wir besonders den *Irrtum* anführen, der in manchen Fällen bei der *Vergleichung der Entfernungen* vorkommt. Die Erfahrung hat bewiesen, daß dieses vergleichende Urteil (dessen praktische Möglichkeit auf ein ziemlich enges Gebiet beschränkt ist) nicht gleichförmig und genau ausfällt, wenn die zu vergleichenden Entfernungen nicht vom Beobachter gleichweit entfernt sind, und daß ferner die Abschätzung viel unvollkommener wird, wenn sie verschiedene Richtung haben. Es kommt der Irrtum hinzu, der bei der Abschätzung des Parallelismus zweier Geraden vorkommt und der merkbarer ist als derjenige, der beim Erkennen der Konvergenz stattfindet, usw.

Helmholtz hat nun diese Tatsachen dadurch erklärt, daß er zeigte, daß das vergleichende Urteil über die Entfernungen nicht unmittelbar durch das Sehen gegeben wird, sondern ein Ergebnis der Gewohnheit ist, das Gesehene mit den Tast- und Muskelempfindungen zu kombinieren.

Nach allem Vorangehenden sind wir berechtigt, diese Unterscheidung als begründet anzusehen. Wir erkennen also als *unmittelbar durch den Gesichtsinn gegeben* den Komplex von geometrischen Eigenschaften des Objektes, die sich als *Eigenschaften der Projektionen* ausdrücken und nicht von seiner besonderen Lage und Entfernung von den Augen abhängen. Die Längen oder Entfernungen kommen darunter nicht vor und müssen als mittelbar durch Erfahrung festgestellt angesehen werden, nämlich durch die Verbindung mit den Tast- und Muskelempfindungen und nicht durch die Gesichtswahrnehmungen, die sich aus einer Ortsveränderung des Beobachters ergeben.

Aber diese Ergebnisse können nur von demjenigen richtig verstanden werden, der die Grundbegriffe der modernen Geometrie beherrscht! Gerade auf der Unkenntnis dieser Begriffe beruhen die unsinnigen Deduktionen, mit denen sich noch immer einige Philosophen abmühen.

Bei der Unmöglichkeit eines vergleichenden Urteils über die Entfernungen zwischen Punkten und folglich über die Größe der Objekte sollte man meinen, daß den unmittelbaren Daten des Gesichtssinnes alle geometrischen Vorstellungen fremd seien.

Dieser Irrtum kann nur durch ein Studium der projektiven Geometrie beseitigt werden, wie sie sich im vergangenen Jahrhundert seit Poncelet, Möbius und Steinert entwickelt hat, bis sie ihre endgültige Darstellung in dem Lehrbuch von Staudt[1]) erhielt.

Nur so kann man sich einen Begriff von einer Wissenschaft machen, die die zwischen den elementaren Begriffen

1) Vgl. den historischen Anhang in den „Lezioni di Geometria proiettiva" von Enriques. Bologna, Zanichelli, 1898. 2. Aufl. 1904 (d. Übers. v. Fleischer. Leipzig, B. G. Teubner, 1903).



der *Geraden* und der *Ebene* bestehenden *qualitativen Beziehungen* untersucht, die gänzlich unabhängig sind von den *quantitativen* (oder *metrischen*) *Beziehungen*, die in dem Entfernungsbegriff liegen, wenngleich sie meistens durch diese ausgedrückt werden.

Nun *zeichnen sich die Gerade und die Ebene* durch ihre optischen Eigenschaften für den *Gesichtsinn* aus: die Gerade, weil ihre Netzhautbilder Gerade sind, und die Ebene vermöge ihrer Beziehung zu der Geraden, die sich als eine *projektive Beziehung*[1]) zwischen den Bildern darstellt.

Diese ausgezeichnete Stellung bezieht sich offenbar auf das binokulare Sehen. Dennoch haben die Gerade und die Ebene auch bei dem monokularen Sehen eine ausgezeichnete Eigenschaft, wenn sie nämlich durch den Mittelpunkt des Auges gehen; die Gerade ist dann ein *Sehstrahl* und ihr Bild reduziert sich auf einen Punkt; die Ebene wird als Gerade gesehen. Diese besonderen Darstellungen verbinden sich mit den allgemeinen und bestimmen, wie wir sehen werden, einige Grundeigenschaften der Anschauung der in Rede stehenden Gebilde.

Es ist ein bemerkenswerter Umstand, daß für das binokulare Sehen eine krumme Fläche sich von einer ebenen unterscheidet, weil damit die Wahrnehmung von *Erhabenheiten* zusammenhängt.

Die Erhabenheit ist also eine Eigenschaft der Gesichtsvorstellung einer Fläche, die von der Beschaffenheit dieser Vorstellung selbst herrührt: die Beziehung zwischen den Netzhäuten unterscheidet sich von einer projektiven, insofern als dieselben Linien der Fläche, deren Bilder auf der einen Netzhaut Gerade sind, auf der anderen krumme Linien zu Bildern haben.

1) So nennt man eine punktweise Zuordnung zwischen zwei Ebenen, bei der die Geraden einander entsprechen.

Diese Art der Unterscheidung, die sich aus den unmittelbaren Daten des binokularen Sehens ergibt, hat nichts mit den Muskelempfindungen zu tun, welche die Augenbewegungen begleiten, die bei dem Übergang vom Anblick einer krummen zu dem einer ebenen Fläche erfolgen. Im ersten Falle hat man ein Merkmal der Krümmung, das in gewissem Sinne von der Betrachtung der Fläche in sich selbst abhängt, also von ihren *inneren* Eigenschaften; im zweiten Falle beurteilt man die Krümmung durch *(äußere)* Beziehungen der Fläche zu dem, was außer ihr vorhanden ist.

Wir besitzen also neben den möglichen genetischen Vorstellungen der Fläche eine aktuale in ihrem Relief. Dies ist gerade die Art, wie sich uns eine Oberfläche darstellt, die unseren Gesichtshorizont *begrenzt.*

Wir glauben nicht, daß man noch weiter gehen und eine *aktuale Vorstellung von dreidimensionalen Gegenständen* zugeben kann.

Diese Objekte entsprechen einer Folge von Flächenbildern in unserem Geiste oder dem abstrakten Begriff einer Reihe von Sukzessionen, aber beim adaptierten Sehen kommen sie niemals als für sich gegeben vor.

Die von Stumpf für das Gegenteil angeführten Gründe[1]) scheinen uns einen Circulus vitiosus zu enthalten. Der große Psychologe will die Notwendigkeit einer Vorstellung der drei Dimensionen aus der Tatsache ableiten, daß eine Fläche *zwei Seiten, außerhalb* ihrer selbst liegende Krümmungsmittelpunkte usw. hat; aber diese Betrachtungen führen die dritte Dimension, die genetisch *konstruiert* werden soll, bereits stillschweigend als *gegeben* ein! Nun enthält aber in Wirklichkeit die eigentliche aktuale Vorstellung einer Fläche als

1) „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung". Leipzig, 1873 (an versch. Stellen und besonders S. 177 f.).



Grenze eines Gesichtshorizontes *nur eine Seite*, so daß der Begriff der Zweiseitigkeit aus der Superposition *sukzessiver* Bilder entsteht, usw.

Die Behauptung, daß die unmittelbaren Daten des Gesichtsinnes uns die Vorstellungen der Geraden und der Ebene vermitteln, bedeutet, daß *der Gesichtsinn uns die konstruktiven Elemente der projektiven Geometrie liefert.*

Demnach wird der unmittelbare Sehraum, da er durch Abstraktion aus den verschiedenen möglichen Sehräumen entsteht, abgesehen von den metrischen Assoziationen, ein *projektiver Raum* sein. Und da optisch jede Gerade beliebig verlängert gedacht werden kann, so wird sich dieser projektive Raum als *unbegrenzt* darstellen. In Wirklichkeit gelangt man ziemlich spät zur Erkenntnis dieser Unbegrenztheit; es gehört eine merkliche Anstrengung der Abstraktion dazu, um sich dieselbe vorzustellen auf Grund des festgestellten Zurückweichens des Horizontes, bei Annäherung an denselben.

In jedem Falle bleibt es eine Eigentümlichkeit der optischen Raumvorstellung, daß in ihr niemals zwei Punkte unmittelbar verglichen werden, die in entgegengesetzten Richtungen weit entfernt liegen. Daraus folgt, daß in dem projektiven Sehraum die beiden Parallelen, die durch einen Punkt zu den beiden entgegengesetzten Strahlen einer Geraden gezogen werden, nicht notwendig als zusammenfallend erscheinen. Das Zusammenfallen wird wenigstens nicht unmittelbar festgestellt werden können, und solange das nicht der Fall ist, wird der projektive Sehraum in unserem Geiste nicht die ganze Ausdehnung erhalten haben, die wir ihm zuschreiben. Um in mathematischer Sprache zu reden: der projektive Raum wird sich in seiner unmittelbarsten optischen Vorstellung als ein Körper innerhalb einer *uneigentlichen Grenzfläche* zweiten Grades darstellen.

Wir werden später sehen, daß Tastassoziationen dazu zwingen, diesen projektiven Raum zu erweitern bis zu der euklidischen Vorstellung, wo sich die uneigentliche Grenzfläche auf eine Ebene reduziert.

## § 21. Die räumlichen Daten der Tast- und Muskelempfindungen und die metrische Geometrie.

Die Physiologie der Tast- und Muskelempfindungen bietet schwierige und verwickelte Probleme, besonders auch, weil auf sie die Fragen über verschiedene besondere Sinne zurückgehen, die vom Standpunkt der Entwickelungslehre als eine Differenzierung des allgemeinen Tastsinnes erscheinen.

Die gewöhnlich angenommene Unterscheidung zwischen Druck und Temperatursinn erschöpft vielleicht nicht vollständig die verschiedenen *Qualitäten* des Tastsinnes. Noch zweifelhafter erscheint die Aufgabe der verschiedenen Nervenexpansionen, die sich in dem Gewebe der Haut finden, wie die sogenannten *Tastkörperchen* und die Vaterschen *Körperchen*.

Noch ernsteren Schwierigkeiten begegnet man bei der Erklärung des Muskelsinnes oder Sinnes der Muskelbewegungen, und bei der Bestimmung seines Verhältnisses zum Tastsinn. Es genügt, auf den Streit hinzuweisen über die Existenz einer besonderen Empfindung, die den zentrifugalen muskelbewegenden Nervenstrom begleitet, eine Empfindung, die unter dem Namen des *Innervationssinnes* in den Ansichten Wundts eine so große Rolle spielt und gleichfalls von Helmholtz und Mach angenommen, von James dagegen als überflüssige Hypothese verworfen wird.

Zum Glück scheint eine vorgängige Beantwortung dieser Fragen für den Zweck unserer Untersuchung nicht nötig zu sein. Es wird genügen, an einige Grundtatsachen zu erinnern:



1. Die Tast- und besonders die Druckempfindungen werden auf die Stelle der Haut bezogen, die berührt worden ist (Lotzes *Lokalzeichen*); aber diese Feststellung ist mit einem Fehler behaftet, der von Stelle zu Stelle beträchtlich wechselt, so daß zwei Punkte der Haut in der Umgebung einer gewissen Stelle nicht mehr als verschieden empfunden werden, wenn ihre Entfernung kleiner als ein gewisses Intervall *(Empfindungsschwelle)* ist.

2. Eine konstante Länge wird an verschiedenen Stellen der Haut als verschieden lang empfunden, und zwar als größer da, wo die Feinheit der Empfindung größer ist (Webers Experiment mit dem *Zirkel*).

3. Die Größe eines auf der Haut bewegten Gegenstandes wird genauer empfunden als die eines Gegenstandes, der an einer einzelnen Stelle der Haut in Ruhe ist, und diese Fähigkeit wird durch Übung beträchtlich gesteigert.

4. Dem Drucksinn steht der *Kraftsinn* und der *Muskelbewegungssinn* gegenüber. Mit diesem letzteren hängt die noch nicht ganz aufgeklärte Aufgabe der *halbkreisförmigen Bogengänge* des Ohres bei den Gleichgewichts- und Orientierungsempfindungen zusammen (Goltz und Mach).

Auf diese Tatsachen beziehen sich einige Bemerkungen über den räumlichen Gehalt des Tast- und Muskelsinnes.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Versuche von Fechner und Weber über die Schwelle der Tastempfindungen und die Empfindung gleicher Längen als ungleich.

Die Empfindungsschwelle kommt nicht nur dem Tast-, sondern auch dem Gesichtsinn zu; sie hat eine große Bedeutung, insofern sie uns zeigt, daß der *physiologische* (Tast- oder Seh-) *Raum nicht stetig ist.*

Es erhebt sich also das Problem, zu erklären, wie der Assoziations- und Abstraktionsprozeß, durch den die

geometrische Raumvorstellung aus den möglichen physiologischen entsteht, zu einem *stetigen Raum* führt.

Der zweite Punkt, der hervorgehoben zu werden verdient, ist der folgende: die vergleichende Beurteilung der Entfernungen und Längen und allgemeiner der Größen der Gegenstände erfordert die Bezugnahme auf ein als Sitz des konstanten Maßstabes ausgewähltes Tastorgan. Dieses Organ muß ohne Veränderung beweglich sein und an die Gegenstände angelegt werden können, damit auf diese Weise verschiedene Gegenstände metrisch verglichen werden können. Es wird also ein *besonderes* Organ der *Berührung*, das im Hinblick auf die metrischen Diskriminationen differenziert ist.

Dieses Organ ist für den Menschen im allgemeinen die Hand, aber diese kann, und das geschieht tatsächlich bei gewissen Gelegenheiten, durch einen Fuß oder irgendeinen anderen Körperteil ersetzt werden.

Man muß ferner annehmen, daß das Betasten sehr bald dem Menschen gestattet, die Invarianz bei der Bewegung der festen Körper zu erkennen, so daß diese als genaueste Instrumente der Vergleichung und Messung benutzt werden.

Eine auf der Haut entlanglaufende Spitze oder eine auf ihr ruhende Messerschneide liefern uns zwei Tastbilder der Linie; die eine ein genetisches, die andere ein aktuales. Wenn die Schneide leicht schürfend über die Haut hinfährt, so gibt das die genetische Vorstellung einer Fläche; die von dieser unterschiedene aktuale Vorstellung, die mit jener nur assoziativ verbunden ist, entspricht einer Platte von einer gewissen Länge, die auf die Haut gelegt wird.

Die Form einer Fläche und insbesondere ihre Ebenheit oder Krümmung können durch die aktuale Vorstellung gegeben werden, die auf solche Teile der Haut bezogen wird, welche an die betreffende Fläche angelegt



werden können; so entsprechen z. B. der gestreckten oder gekrümmten Hand offenbar verschiedene Muskelkontraktionsempfindungen.

Aber die Tastvorstellung der drei Dimensionen kann man nur genetisch erhalten. Sie wird uns vermittelt durch die Folge von Tasteindrücken einer bewegten Fläche, die mit einem Teil der Haut, der mit ihr zusammenhängt, sich zusammen bewegt. Die besonderen Tastorgane spielen bei alledem eine hervorragende, wenn auch nicht notwendige Rolle.

Unter allen Linien und Flächen sind die *Kreise* und *Kugeln* dadurch ausgezeichnet, daß sie unmittelbar durch Betasten erkannt werden können, weil die Entstehung dieser Gebilde aus der Vergleichung der Entfernungen hervorgeht.

Was die *Gerade* und die *Ebene* betrifft, so scheint uns deren ausgezeichnete Stellung wenigstens zum großen Teil mittelbar erworben zu sein. Allerdings sind einige Knochen ungefähr geradlinig, aber diese besondere Eigenschaft kann die Aufmerksamkeit nicht auf sich lenken, solange man nicht anderen bemerkenswerten Eigenschaften der Geraden begegnet ist, z. B. *Rotationsachse* fester Körper zu sein oder *Linie kürzester Entfernung*. Es ist auch eine muskulare Definition der Geraden auf Grund ihrer mechanischen Eigenschaften möglich. Wenn man jedoch alles in Betracht zieht, so scheint es, daß die *ursprünglichen konstruktiven Elemente*, die bei der Bildung des *Tast- und Bewegungsraumes* die hervorragendste Rolle spielen, *nicht die Begriffe der Geraden und der Ebene*, sondern der der Entfernung und infolgedessen die des *Kreises* und der *Kugel sind*.

Man kann das vorstehende Ergebnis so ausdrücken, daß man sagt: der *Tast- und Bewegungsraum* und insbesondere, sofern er durch sein *Spezialorgan gegeben* wird, *ist der metrische Raum*, dessen Eigenschaften aus den Grundeigenschaften der *Entfernung* fließen.

Daß dieser Raum und die Gerade in ihm *unbegrenzt* sind, ergibt sich aus der Möglichkeit, das Tastorgan oder einen beliebigen Gegenstand so zu verschieben, daß eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von gleichen Längen entsteht.

Es folgt daraus übrigens nicht notwendig die *Unendlichkeit* des Raumes selbst; die fortlaufend aneinander gesetzten Längen (eine Operation, die in der abstrakten Vorstellung als unbeschränkt gedacht werden muß) könnten nach Durchlaufung eines hinreichend großen Intervalls einander sehr wohl wieder überdecken. Die Erfahrung sagt uns nur, daß dies in dem uns erreichbaren Gebiete nicht eintritt. Der metrische Raum, dessen Vorstellung uns durch die elementaren Tast- und Muskelempfindungen geliefert wird, könnte also ebensowohl ein euklidischer wie ein LOBATSCHEWSKYscher oder ein RIEMANNscher sein. Und die Wahl der euklidischen Vorstellung, die die Blindgeborenen dennoch treffen, muß ihnen indirekt durch andere kompliziertere Erfahrungen suggeriert werden, während sie sich, wie wir später sehen werden, für den normalen Menschen aus der Verbindung des Tast- und des Sehraums ergibt.

## § 22. Parallele zwischen der geschichtlichen und der psychogenetischen Entwickelung der geometrischen Postulate.

Hier müssen wir kurz zu den Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie zurückkehren, die (wie wir im § 9 sagten) unter dem Einfluß RIEMANNS in verschiedenen Richtungen weiter geführt worden sind; durch Vergleichung mit den oben wiedergegebenen Ergebnissen dieser Untersuchungen werden wir erkennen, daß es *den Geometern gelungen ist, die Geometrie in diejenigen konstruktiven Bestandteile zu zerlegen, die den verschiedenen Gruppen von Empfindungen entsprechen.*



Gleichzeitig erhalten wir so eine allgemeine Einteilung der geometrischen Postulate, für die eine psychologische Erklärung erforderlich ist.

Bei den Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie[1]) kann man drei *Richtungen* unterscheiden: die *elementare*, die *metrische* und die *projektive*.

Die erste Richtung geht von dem Versuch einer *logischen Systematisierung* des euklidischen Organismus aus und endet mit der Begründung der nichteuklidischen Geometrie, von der wir gesprochen haben. In diesem letzten Stadium überwiegt das physikalische Interesse an der Frage das logische. Wie dem auch sei, diese elementare Richtung ist charakterisiert durch das Fehlen einer Analyse, die die *Trennung der geometrischen Begriffe* anstrebt; sämtliche Grundbegriffe (Gerade, Ebene, Kongruenz) werden nebeneinander betrachtet und man sucht nur die Sätze (Postulate), welche die ersten Beziehungen zwischen ihnen ausdrücken, möglichst *einfach* zu fassen und ihre gegenseitigen Abhängigkeiten zu beleuchten.

Die Trennung und tiefere Kritik der geometrischen Grundbegriffe hingegen charakterisiert das Stadium der Untersuchungen, das mit B. RIEMANN, dem größten Philosophen der Geometrie, beginnt. Hier tritt unter dem direkten Einfluß HERBARTS, den dieser auf seinen Schüler ausübte, das *psychologische Interesse* leitend hervor. Anderseits werden die Beziehungen zwischen den geometrischen Begriffen von jetzt an mit Hilfe der höheren Mathematik untersucht.

Diese von RIEMANN — an den sich HELMHOLTZ unmittelbar anschloß — ausgehende *Richtung* ist die *metrische*, die die Geometrie ganz und gar auf dem Begriff der *Entfernung* oder der *Länge einer Linie* innerhalb

1) Vgl. den S. 165 zitierten Artikel von ENRIQUES.

einer *stetigen Mannigfaltigkeit* aufbaut. Diese Untersuchungen schließen sich einerseits an die von GAUSS begründete *Differentialgeometrie* an, anderseits an die Theorie der *Transformationsgruppen*, wie sie später von F. KLEIN, S. LIE, H. POINCARÉ ausgebaut worden ist.

Anderseits führte die Begründung der projektiven Geometrie und die von den metrischen Begriffen unabhängige Darstellung, die ihr STAUDT gegeben hatte, KLEIN dazu, einen neuen *(projektiven)* Weg zur Erforschung der Prinzipien der Geometrie einzuschlagen, bei dem die *(graphischen und optischen)* Begriffe der *Geraden* und der *Ebene* als Grundbegriffe auftreten.

Die Herstellung einer Verbindung zwischen diesen beiden Arten von Begriffen, den graphischen und den metrischen, hat seither viele Forscher beschäftigt, während andere die inneren Beziehungen der metrischen Geometrien und der projektiven erforschten, indem sie diese Untersuchungen mit anderen interessanten mathematischen Problemen in Verbindung brachten.

Aber die projektive und die metrische Geometrie haben ein gemeinsames qualitatives Substrat in der Gesamtheit der Beziehungen zwischen den allgemeinsten Begriffen der *Linie* und der *Fläche*, die eine *mehrdimensionale stetige Mannigfaltigkeit* charakterisieren. Ohne daß die Vorstellungen der Geraden, der Ebene, der Kongruenz usw. irgendwie hineinkämen, geben jene Begriffe Anlaß zu einem Zweige der Geometrie, den man *Theorie der Ausdehnung* oder *des Kontinuums* oder *Analysis situs* nennt, der aber mit der reinen Methode noch nicht sehr weit entwickelt ist.

Es folgt daraus die Nützlichkeit einer auf diese höchsten Prinzipien einer jeden Geometrie gerichteten Kritik, die einerseits an einige von RIEMANN kaum angedeutete Gesichtspunkte, anderseits an einige Untersuchungen von DEDEKIND, WEIERSTRASS, CANTOR usw.



anknüpfen könnte; die hier sich ergebenden Probleme sind von uns klar formuliert und in einigen speziellen Untersuchungen teilweise geometrisch behandelt worden (vgl. § 24).

Ohne länger bei diesem kurzen historischen Überblick zu verweilen, wollen wir nur festhalten, daß zugleich mit der Entwickelung der Kritik der Prinzipien der Geometrie sich eine Trennung der Geometrie selbst in zwei Zweige, den *metrischen* und den *projektiven*, vollzogen hat, die ihre gemeinsame Wurzel in der allgemeinen *Theorie des Kontinuums* (oder *Analysis situs*) haben.

Wir können jetzt erkennen, daß diese beiden Zweige den beiden Gruppen von Empfindungen, den Tast-Muskelempfindungen und den Gesichtsempfindungen entsprechen. Und wir können auch hinzufügen, daß der allgemeine Tast-Muskelsinn, der unabhängig von der Spezialisierung durch das Tasten auch die Grundlage der Netzhautempfindlichkeit ist, bereits die geometrischen Vorstellungen liefert, die sich auf die Theorie des Kontinuums beziehen, d. h. die Vorstellungen der Linie, Fläche usw.; dagegen ist, wie wir gesagt haben, die Schätzung der Entfernungen und damit eine genaue Vorstellung der Kongruenz oder geometrischen Gleichheit einem besonderen Bezugsorgan des Tastsinnes zu verdanken.

Diese Ergebnisse kann man schematisch folgendermaßen aussprechen:

*Die drei Gruppen von Vorstellungen, die an die Begriffe anknüpfen, welche der Theorie des Kontinuums (Analysis situs), der metrischen und der projektiven Geometrie zugrunde liegen, hängen psychogenetisch mit drei Empfindungsgruppen zusammen, nämlich bzw. mit den allgemeinen Tast-Muskelempfindungen, den speziellen Tastempfindungen und den Gesichtsempfindungen.*

Dieses Ergebnis leitet uns zu einer psychologischen Erklärung der Postulate der Geometrie und wird seinerseits durch dieselbe bestätigt.

## § 23. Die Stetigkeitspostulate: die Linie.

Wir wollen uns nun vor allem zu den Postulaten der Theorie des Kontinuums wenden, die sich auf die Begriffe der Linie und der Fläche beziehen.

Der Begriff der Linie entsteht, sagten wir, aus den verschiedenen möglichen genetischen oder aktualen Vorstellungen von ihr mittels einer Assoziation und einer Abstraktion.

Nach der genetischen Vorstellung ist die Linie eine Punktreihe, die nach ihrer psychisch gegebenen zeitlichen Reihenfolge geordnet ist (vgl. Kap. V); die im umgekehrten Sinne geordnete Reihe verbindet sich mit der ersten zu der aktualen Vorstellung, die in gewisser Hinsicht davon abstrahiert ist. So entsteht das erste fundamentale Postulat der *Umkehrbarkeit der linearen Ordnung*, das nach HERBART und BAIN ihren Unterschied von der zeitlichen Ordnung ausmacht.

Es bleibt noch die *Stetigkeit* der Linie zu rechtfertigen, die durch zwei Postulate ausgedrückt wird:

1. Zwischen irgend zwei Punkten einer Linie gibt es immer mindestens einen dritten.
2. DEDEKINDsches Postulat. Wenn eine Linie in zwei Teile (Klassen von Punkten) geteilt wird, derart, daß
   a) jeder Punkt der Linie einem von beiden Teilen angehört,
   b) jeder Punkt des ersten Teiles jedem Punkte des anderen (in einem der beiden Richtungssinne der Linie) vorangeht,

   so gibt es einen *Teilungspunkt*, dem kein Punkt des ersten Teiles folgt und keiner des anderen vorangeht.



Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf das erste Postulat.

Es ist vor allem klar, daß es eine Eigenschaft ausdrückt, die keiner empirisch gegebenen Reihe zukommt; es ist ja auch schon gesagt worden, daß im physiologischen Raum diese Eigenschaft der Linie durch die Erfahrung widerlegt wird.

Wenn zwei Punkte $A$, $B$ einer Linie um weniger als die Reizschwelle voneinander entfernt sind, so ist es unmöglich, zwischen ihnen einen Punkt einzuschalten, der von den gegebenen unterschieden werden könnte. Immerhin konstatieren wir in der Regel durch viele Hilfsmittel, daß diese Unmöglichkeit dadurch gehoben werden kann, daß man einen empfindlicheren Teil des Tast- oder Sehorgans benutzt oder durch irgendwelche Mittel unser Wahrnehmungsvermögen verschärft.

Da mannigfache sinnliche Bilder sich zu der begrifflichen Vorstellung der Linie assoziieren, so müssen wir den vorstehenden Umstand dadurch erklären, daß wir annehmen, die Unmöglichkeit, in einem bestimmten sinnlichen Bilde einen Punkt $C$ zwischen $A$ und $B$ zu unterscheiden, liege an einem *Mangel der Wahrnehmung*. Die Annahme dieser Erklärung wird noch dadurch begünstigt, daß die Unterschiedsschwelle der Empfindungen keinen absolut festen Wert hat, daß vielmehr die Bewegung des Objekts auf der Haut sie vermindern kann, usw.

Die Erweiterung der Erfahrung führt uns also dazu, die Einschaltung eines Punktes zwischen zwei anderen $A$, $B$ auch dann für möglich zu halten, wenn dies nicht unmittelbar sinnlich klar ist. Immerhin hat diese Erweiterung in Wirklichkeit immer eine Grenze, die schnell erreicht wird. Wenn also der Begriff der Linie in uns durch Assoziation aller Sinnesbilder einer einzigen physikalisch gegebenen Linie entstände, so würden wir

niemals dazu geführt werden, die Einschaltung eines Punktes zwischen gegebenen für unbegrenzt fortsetzbar zu halten.

Nehmen wir aber einmal an, daß alle möglichen Linien zu einer einzigen Klasse von Vorstellungen vereinigt seien, und versuchen wir die Eigenschaften des daraus abgeleiteten abstrakten Begriffes zu bestimmen.

Die Assoziation stiftet in Gedanken zwischen zwei Linien $l$, $l'$ eine eineindeutige Zuordnung ihrer Punkte, und das Experiment zeigt uns, daß eine solche Zuordnung dadurch erhalten werden kann, daß man zwei (verschiedenen) Punkten der einen $A$, $B$ zwei beliebige Punkte $A'$, $B'$ der anderen zuordnet; das ergibt sich z. B. durch Aufeinanderlegen zweier verschieden stark gespannter elastischer Fäden, durch die projektive Aufeinanderbeziehung zweier Geraden, usw. Da nun zwei Linien $l$, $l'$ derart aufeinander bezogen werden können, so muß man annehmen, daß zwischen den Punkten $A$ und $B$ auf $l$, ebenso wie zwischen den hinreichend weit entfernt angenommenen $A'$ und $B'$ auf $l'$ immer noch ein Punkt eingeschaltet werden kann. Diese unbegrenzte Einschaltungsmöglichkeit bildet also eine notwendige Eigenschaft des Linienbegriffs, sofern dieser das ideale Ergebnis einer Assoziation und Abstraktion aus allen empirisch aufweisbaren genetischen Vorstellungen der Linien darstellt.

Aber diese Stetigkeit der Linie ist damit noch nicht erschöpft!

Woher kommt ihr zweiter im DEDEKINDschen Postulat enthaltener Teil?

Daß der hier notwendige Prozeß schwieriger ist, wird dadurch bewiesen, daß die Griechen nicht zur vollen Erkenntnis der Stetigkeit der Linie vorgedrungen sind, obwohl sie gezwungen waren, über das erste oben beschriebene Stadium hinauszugehen, als sie das Problem des Schneidens von Geraden und Kreisen behandelten.



Für dieses Problem muß man nämlich annehmen, daß die Strecke, die einen innerhalb eines Kreises gelegenen Punkt mit einem außerhalb gelegenen verbindet, den Kreis schneidet. Und man sieht leicht, daß damit zu dem Postulat 1. etwas Neues hinzukommt, denn die Gesamtheit der Punkte einer Geraden, deren Abszissen in bezug auf eine gewisse Maßeinheit *rational* sind, würde ein Punktsystem bilden, das dem Postulat 1. genügt, und doch würde es unter den oben angegebenen Voraussetzungen im allgemeinen nicht von einem Kreise getroffen werden.

Das Postulat des Schneidens von Geraden und Kreisen kann als ein Spezialfall des DEDEKINDschen aufgefaßt werden, wenn man die Punkte der Geraden in „innere" und „äußere" in bezug auf den Kreis einteilt.

Aber die griechischen Geometer verallgemeinerten nicht diesen Fall durch Betrachtung aller an einer Linie möglichen ähnlichen Einteilungen; oder sie machten höchstens Versuche in diesem Sinne, mit denen einige bekannte von ihnen überlieferte Trugschlüsse zusammenhängen.

Die Analyse des Stetigkeitsbegriffs ist eine Errungenschaft der modernen Wissenschaft, und das DEDEKINDsche Postulat drückt ihn in seiner vollsten und genauesten Form aus.

Daß „ein Punkt eine Linie in zwei Teile teilt", ist eine unmittelbare Folge der linearen Ordnung; die DEDEKINDsche Analyse fügt dem die Erkenntnis der Bedingungen hinzu, unter denen „die Teilung einer Linie durch einen Punkt geschieht". Diese entsprechen der Vorstellung des Punktes als *Element der Trennung* der Linie, die aktual betrachtet wird.

Das Postulat 2. der Stetigkeit drückt also die Bedingung aus für die Vereinbarkeit zweier verschiedener Vorstellungen vom „Punkte", nämlich als erzeugendes Element der genetisch aufgefaßten Linie und als Teilungselement der aktual aufgefaßten Linie[1]).

Die genetische Erklärung der Stetigkeit bildet ein so wichtiges Problem, daß es sich lohnt, es auch von einer anderen Seite zu betrachten, indem man das DEDEKINDsche Postulat durch das ihm logisch gleichwertige WEIERSTRASSsche ersetzt: innerhalb einer Strecke besitzt eine unendliche Punktmenge immer *einen Häufungspunkt.*

Seien $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ diese Punkte, die durch eine innerhalb der Strecke $a$ wiederholbare Konstruktion definiert seien und einander z. B. von links nach rechts folgen mögen. An einem konkreten Bilde $a_n$ von $a$ werden die Punkte von einem bestimmten an ununterscheidbar werden; die Punktreihe $A_{n+1} A_{n+2} \ldots$ wird z. B. als ein einziger Punkt aufgefaßt werden. Aber der hier auftretende Index $n$ kann mit der Wahl des Bildes $(a_n)$ von $a$ variieren und bei geeigneter Wahl beliebig groß gemacht werden.

Nun hat die Annahme, daß in der (in Gedanken vorgestellten) Strecke $a$ ein Punkt $A$ als Häufungspunkt der $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ existiert, den Sinn, daß bei der Verbindung der verschiedenen Vorstellungen die Reihe der Strecken $A_n A$, deren Enden in den einzelnen Vorstellungen nicht unterschieden werden können, *einem einzigen Punkte* zugeordnet wird.

---

1) Diese Erklärung der psychologischen Entstehung der Kontinuumsvorstellung, die wir in der zitierten Note von 1901 dargestellt haben, ist eng verwandt mit derjenigen, die H. POINCARÉ in seinem mehrfach erwähnten Buche „La Science et l'Hypothèse" gibt (vgl. S. 35).



Eine solche Verbindungsweise ist das einfachste Verfahren, um einen abstrakten Begriff der Linie zu bilden; aber es ist nicht das einzig mögliche. Wenn man die Bedingung fallen läßt, daß die beiden Vorstellungen des Punktes als Erzeugers einer Linie und als ihr Ende sich so verschmelzen, daß sie einem einzigen abstrakten Gebilde entsprechen, so kann man mit VERONESE ein höheres nichtarchimedisches Kontinuum konstruieren, in dem aktual unendlich keine Strecken existieren, und in dem die (äquivalenten) Postulate von DEDEKIND und WEIERSTRASS nicht mehr gelten, sondern ein weniger enges Stetigkeitspostulat, das unter dem Namen CANTORS bekannt ist.

Indem wir von dieser abstrakten Konstruktion der nichtarchimedischen Geometrie absehen, fassen wir nunmehr die Ergebnisse zusammen, welche die gewöhnliche anschauliche Vorstellung der Linie betreffen:

*Die Postulate der Linie, soweit sie das Verhältnis ihrer Teile zueinander betreffen, drücken die Möglichkeit aus, in einem einzigen abstrakten Begriff nach den logischen Denkgesetzen folgende Vorstellungen zusammenzufassen: die genetische Vorstellung einer empirisch gegebenen Linie und ihrer Umkehrung mit der Vorstellung der Zeitordnung;*

*die verschiedenen genetischen Vorstellungen derselben oder verschiedener Linien;*

*die erwähnten genetischen Vorstellungen mit den aktualen, wobei besonders die beiden Bildreihen des Punktes als Erzeugers und als Ende der Linie zu einer abstrakten Vorstellung vereinigt werden.*

Andere Eigenschaften der Linie, die mit der Vorstellung der Fläche zusammenhängen, ergeben sich aus der Vergleichung ihrer aktualen Bilder; aber sie betreffen ihre *äußeren* Beziehungen, während der Begriff der Linie, für sich betrachtet, durch den beschriebenen Konstruktionsprozeß vollständig definiert ist.

## § 24. Postulate des zwei- und dreidimensionalen Kontinuums.

Der allgemeine Begriff der *Fläche* als einer *zweidimensionalen Mannigfaltigkeit* ergibt sich genetisch nach B. RIEMANN[1]) aus der Bewegung einer Linie.

Im weitesten Sinne genommen führt diese Erzeugungsart dazu, auf einer Fläche *zwei Kurvenscharen* als gegeben anzunehmen, *so daß jede der einen Schar jede der anderen in einem Punkte und nur einem schneidet*, die *erzeugenden* und die *Leitlinien* oder die Bahnen der Punkte der bewegten Linie.

Wenn man dann auf diesen Linien eine *Maßbestimmung* festgesetzt denkt, d. h. wenn der Begriff der *Bogenlänge* gegeben ist, so kann man die Punkte der Fläche durch ein *Koordinatensystem* darstellen, d. h. man kann zwischen ihnen und den Elementen (Zahlenpaaren) einer *numerischen* zweidimensionalen *Mannigfaltigkeit* eine eineindeutige stetige Zuordnung herstellen.

Will man die Maßbestimmung auf den Linien nicht von vornherein postulieren, so ist die Einführung der Koordination bloß auf Grund der in der RIEMANNschen Erzeugung liegenden Daten nicht möglich. Daher muß diese als eine unzureichende Definition der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit betrachtet werden, und S. LIE fügt ihr ausdrücklich die Annahme der Abbildbarkeit auf eine numerische Mannigfaltigkeit hinzu.

Um diese für eine Theorie des Kontinuums fundamentale Frage aufzuklären, haben wir eine Untersuchung[2]) angestellt, die folgendes Resultat ergeben hat:

1) Habilitationsschrift, Göttingen, 1854. (Göttinger Abhandlungen XIII, 1868.)

2) ENRIQUES — Circolo Matematico di Palermo, t. XII, 1898.



Man kann auf einer Fläche Koordinaten einführen, wenn mindestens *drei* Kurvenscharen auf ihr gegeben sind, so daß je zwei Kurven aus verschiedenen Scharen sich in einem Punkte schneiden; es genügt also im wesentlichen, daß die Fläche auf *zwei* verschiedene Weisen durch Bewegung einer ihrer Linien *erzeugt* werden kann.

Dieser Satz löst nicht nur das mathematische Problem, das zweidimensionale Kontinuum zu *definieren*[1]), sondern auch das psychologische, die Postulate zu erklären, die nach der gewöhnlichen Anschauung davon gelten. Die *Postulate* nämlich, die in der Annahme der numerischen Abbildbarkeit enthalten sind, *drücken die Bedingungen aus, unter denen es möglich ist, die verschiedenen genetischen Vorstellungen der Fläche zu einem abstrakten Begriffe zu vereinigen.*

Zu den Postulaten, die erlauben, die Fläche zu definieren, sofern sie für sich als zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit betrachtet wird, kommen diejenigen hinzu, welche die *äußeren Beziehungen der Linien auf einer Fläche* charakterisieren.

Zu dieser Art von Beziehungen gehören die Eigenschaften der *Teilung* einer Fläche durch eine *Grenzlinie*, dann die Existenz und die Gerad- oder Ungeradzahligkeit der Schnittpunkte dieser Grenzlinie mit einer anderen Linie, die zwei in verschiedenen Teilen liegende Punkte verbindet, usw.

Die Vorstellung solcher Eigenschaften wird immer bestimmter, je mehr der Begriff der „Linie auf einer Fläche" erweitert wird, je mehr gewisse Vorstellungen der Linie als Grenze sich mit denen als Erzeugende einer Fläche verbinden.

Geht man z. B. von der Vorstellung der Ebene aus, wie sie auf die verschiedenen möglichen Arten von einer

1) Vgl. unseren S. 165 zitierten Artikel.

Geraden erzeugt wird, so ergibt sich das Bild der von einer Geraden begrenzten Halbebene, und man hat das Postulat von PASCH, das die folgende *Teilungseigenschaft* ausdrückt:

Wenn $A$, $B$, $C$ drei Punkte einer Ebene sind, so daß die Strecke $B\,C$ die Gerade $a$ nicht schneidet und die Strecke $A\,B$ sie schneidet, so wird auch $A\,C$ $a$ schneiden; d. h. wenn $B$, $C$ sich auf derselben Seite und $A$, $B$ auf entgegengesetzten Seiten von $a$ befinden, so befinden sich auch $A\,C$ auf entgegengesetzten Seiten.

Nun stößt die Aufgabe, die Postulate auszusprechen, durch die der *allgemeine* Begriff der „Linie auf einer Fläche" definiert werden kann, auf die Schwierigkeit, für einen Prozeß eine Grenze anzugeben, der in der Anschauung vor sich gehend von gewissen Kurvenfamilien ausgeht und stufenweise zu immer allgemeineren Familien aufsteigt. Es ist daher zweifelhaft, ob und wie die mathematische Behandlung des Problems zu einem irgendwie abschließenden Resultate gelangen kann[1]).

Nichtsdestoweniger haben die vorstehenden Bemerkungen uns bereits den Weg gezeigt, auf dem die in Rede stehenden Postulate gefunden werden; es handelt sich darum, die aktuale Vorstellung einer Linie als Teilungsgrenze einer Fläche zu verbinden mit verschiedenen auf deren mögliche Erzeugung bezüglichen Vorstellungen.

Der Übergang von dem zwei- zu dem dreidimensionalen Kontinuum gibt zu keinen wirklich neuen Bemerkungen Gelegenheit; die Postulate, die die zu erzeugende Fläche definieren, dienen zur Definition dieses Kontinuums.

---

1) Wir führen die mannigfachen Ergebnisse von CANTOR, PEANO, JORDAN und einige Bemerkungen über die *analytischen Kurven* usw. an, wofür wir auf unseren zitierten Artikel über die „Prinzipien" verweisen.



Wir wollen uns demnach darauf beschränken zu bemerken, daß das *Postulat der drei Dimensionen* eine Beschränkung des erzeugenden Prozesses bedeutet, durch den man von Punkten zu Linien, von diesen zu Flächen usw. übergeht.

Wir haben anderseits schon bemerkt, daß das dreidimensionale Kontinuum selbst nicht Gegenstand einer aktualen Vorstellung im eigentlichen Sinne ist (vgl. besonders § 20).

Was die *äußeren Beziehungen der Flächen* betrifft, so gibt es auch hier eine fortschreitende Konstruktion, die von speziellen Flächenfamilien zu allgemeineren aufsteigt.

## § 25. Die Postulate der projektiven Geometrie.

Wir haben gezeigt, daß die der Theorie des Kontinuums zugrunde liegenden Postulate die Bedingungen darstellen für die Vereinigung der verschiedenen auf Linien und Flächen bezüglichen genetischen oder aktualen Vorstellungen zu den abstrakten Begriffen der Linie und der Fläche. Unsere Kritik hat zu gleicher Zeit eine gewisse Unbestimmtheit dieser allgemeinen Begriffe aufgewiesen, die von ihrer Relativität herrührt und die eine progressive Konstruktion erforderlich macht, die einige besonderen Linien und Flächen voranstellt und von diesen ausgehend die bereits definierten Begriffe mehr und mehr erweitert.

Diese Notwendigkeit läßt in einem gewissen Sinne die Bedeutung jener Entwickelung erkennen, durch die der allgemeine Tast-Muskelsinn sich zum Gesichts- und speziellen Tastsinn differenziert.

Der Gesichtssinn zeichnet unter allen Linien die Gerade aus und vereinigt in ihr zwei Vorstellungen, die sowohl unter sich als von den anderen linearen Vorstellungen scharf unterschieden sind.

Die Gerade stellt sich nämlich entweder dar als eine Linie, die nicht durch das Sehzentrum geht und deren Projektionen Gerade sind, oder als Linie (Sehstrahl), die durch das Sehzentrum geht und die, mit einem Auge gesehen, einen Punkt als Bild ergibt.

Nun setzt die Verschmelzung dieser beiden Vorstellungen die *Existenz einer Linie* voraus, *die von jedem ihrer Punkte aus als ein einziger Punkt gesehen wird*, daraus folgt das *Postulat der Bestimmtheit der Geraden:* zwei Punkte gehören einer geraden Linie an, die gleichfalls durch zwei beliebige andere ihrer Punkte bestimmt ist.

Seien nämlich $A$, $B$, $C$ drei Punkte einer Geraden, die von ihrem Punkte $A$ aus betrachtet wird, und sei $T$ das Netzhautbild (oder die Spur auf der Ebene der Netzhaut) derselben Geraden. Der Punkt $T$ ist in diesem das Bild sowohl von $B$ als von $C$. Daher ist die Gerade $A\,B$ optisch definiert als Ort der Punkte, deren Bilder in $T$ (das Bild von $B$) fallen, und die Gerade $A\,C$ gleichfalls als Ort der Punkte, deren Bilder in $T$ (das Bild von $C$) fallen.

Derselben Definition entspricht nach dem *Prinzip der Identität* dasselbe Ding, d. h.

$$A\,B = A\,C.$$

Aber vermittelst der Vorstellung der Geraden, die nicht durch das Sehzentrum geht, erweist sich die Gerade $A\,C$ als identisch mit der Geraden $C\,A$, und da man hier dieselben Schlüsse wie oben machen kann in bezug auf einen anderen Punkt $D$, so ist

$$C\,A = C\,D.$$

Schließlich ergibt sich daraus die Identität der durch die Punktepaare $A\,B$ und $C\,D$ bestimmten Geraden.

Dieses Postulat, das eine Tatsache ausdrückt, von der die Möglichkeit abhängt, die Vorstellungen der Sehstrahlen einer und derselben Geraden zu einem abstrakten Begriffe zu verschmelzen, wird zu einer Gleichheit in bezug auf diesen Begriff, wenn er wirklichen Objekten entsprechend gedacht wird. So erklärt sich das Gefühl der Notwendigkeit, das das in Rede stehende Postulat begleitet.



Ähnliche Überlegungen sind auf das *Postulat der Ebene* anwendbar: „die Ebene enthält die Gerade, die irgend zwei ihrer Punkte verbindet." Wenn man nämlich die Ebene durch *Projektion einer Geraden von einem Punkte außerhalb* entstehen läßt, so sagt das vorstehende Postulat, daß eine Ebene in gleicher Weise dadurch bestimmt wird, daß man von irgendeinem ihrer Punkte als Zentrum aus eine Gerade projiziert, die irgend zwei ihrer nicht mit dem Zentrum in gerader Linie liegenden Punkte verbindet.

Daraus folgt, daß dieses Postulat die Bedingung dafür ausdrückt, daß die verschiedenen Vorstellungen der Ebene und besonders diejenigen, die ihrem Anblick von einem ihrer Punkte aus entsprechen, zu einem abstrakten Begriff verschmolzen werden können.

Demnach haben wir *die eigentlichen Postulate der projektiven Geometrie erkannt als die Bedingungen der Möglichkeit der Verschmelzung gewisser Gesichtsvorstellungen, aus denen die abstrakten Begriffe der Geraden und der Ebene entstehen.*

## § 26. Die Postulate der metrischen Geometrie.

Die Postulate der metrischen Geometrie betreffen die *Bewegungen* und die *Kongruenz* oder die *geometrische Gleichheit* der Figuren, die dabei als *starre Körper* behandelt werden, welche sich durchdringen oder aufeinander gelegt werden können.

Die ersten Eigenschaften, auf die die Aufmerksamkeit des Kritikers gelenkt wird, sind diejenigen, die sich

auf die *Möglichkeit* und die *Freiheitsgrade der Bewegung* der starren Körper beziehen: wenn ein Punkt einer Figur festgehalten wird, so kann ein anderer eine Fläche beschreiben; werden zwei Punkte festgehalten, so kann ein dritter im allgemeinen eine Kurve beschreiben; werden drei beliebige Punkte festgehalten, so ist keine Bewegung mehr möglich.

Es ist ziemlich bezeichnend, daß in einigen unvollständigen Untersuchungen dieser Begriffe (z. B. in der von Hoüel) nur diese Eigenschaften unter den Postulaten vorkommen, während es dagegen als *Axiom* angesehen wird, daß die Kongruenz unter den logischen Begriff der „Gleichheit" fällt. In der Tat stellen sich jene Postulate unmittelbar als Ausdruck *mechanischer Versuche* dar; ihre Gewißheit verbindet sich nicht mit einem Gefühl der Notwendigkeit, vergleichbar demjenigen, das die Grundeigenschaften der Kongruenz begleitet, sondern nur mit der *Evidenz*, die aus *qualitativen Versuchen* hervorgeht.

Helmholtz scheint zuerst bemerkt zu haben, daß die geometrische Kongruenz nicht als eine Art der Gleichheit angesehen werden kann, ohne daß man andere wesentliche die Bewegung betreffende Tatsachen stillschweigend voraussetzt. Und S. Lie, H. Poincaré, D. Hilbert haben unter verschiedenen Gesichtspunkten die Sache klarer gemacht, indem sie diese Tatsachen einer neuen Kritik unterwarfen.

Der fundamentale Gesichtspunkt, von dem derartige Untersuchungen ausgehen, scheint zum ersten Male von F. Klein in seinem Erlanger Programm dargestellt worden zu sein (1871).

Er besteht in folgendem:

Eine Bewegung stellt im Raume oder in einem Teile des Raums eine *eineindeutige punktweise Zuordnung (Transformation)* her. Damit die Beziehung zwischen



zwei Figuren, die durch eine Bewegung ineinander transformiert werden können *(Kongruenz)*, als eine Gleichheit betrachtet werden kann, ist folgendes erforderlich:

Wenn man zwei Bewegungen hintereinander ausführt, so muß (als *Produkt*) wieder eine Bewegung herauskommen (dann ist, wenn $A = B$ und $B = C$, $A = C$);

die zu einer Bewegung gehörige *umgekehrte* Transformation muß wieder eine Bewegung sein (aus $A = B$, $B = A$ folgt $A = A$).

Dies kann man kurz ausdrücken, indem man sagt, daß „die Bewegungen eine *Transformationsgruppe* bilden". Es ist klar, daß diese Behauptung den Charakter der Behauptung einer Tatsache hat, die gewisse *Invarianzeigenschaften* der festen Körper bei der Bewegung und des Tastorgans unabhängig von der Art, wie es von einer Stellung in eine andere übergeht, einschließt.

Wenn nun feststeht, daß den Postulaten der Kongruenz ebenso wie den anderen geometrischen Postulaten ein empirischer Wert zukommt, wie erklärt sich dann das starke Gefühl psychologischer Notwendigkeit, das sie begleitet?

Betrachten wir der Einfachheit halber zwei kongruente Figuren, die aus zwei Paaren *äquidistanter* Punkte bestehen: $A\,B$ und $C\,D$; und sei z. B. die Entfernung der Punkte eines Paares *drei Finger*.

Wenn wir die drei Finger erst zwischen $A$ und $B$ und dann zwischen $C$ und $D$ legen, so werden wir nacheinander zwei Empfindungen haben, die sich durch die *Stellung* des Tastorgans unterscheiden, die aber etwas gemein haben, das an der Invarianz des Organs selbst beim Übergang von einer Stellung zur anderen liegt. Die Vorstellungen der beiden Paare $A\,B$, $C\,D$ sind nicht identisch, aber sie können vermöge *dessen, was sie gemein haben*, unter eine einzige begriffliche Vorstellung

der *Entfernung* untergeordnet werden. Wenn wir nun die Äquidistanz

$$AB = CD$$

aussprechen, so wollen wir damit zugleich eine Identität und eine Nichtidentität ausdrücken; die Möglichkeit, die beiden Vorstellungen auf Grund *gewisser Beziehungen* unter eine einzige unterzuordnen und sie auf Grund von *anderen* zu unterscheiden.

Was schließt also die Bildung des Begriffes der Äquidistanz, der die Grundlage der geometrischen Kongruenz bildet, in sich?

Eine Abstraktion und eine Assoziation, die unter einem gewissen Gesichtspunkt zwei Vorstellungen zusammenfaßt; infolgedessen *nehmen die auf die zusammengefaßte Vorstellung bezogenen Postulate der Kongruenz die Form der logischen Axiome der Gleichheit an.*

## § 27. Vereinigung von metrischer und projektiver Geometrie: das Parallelenpostulat.

Bisher haben wir diejenigen Assoziationsbedingungen betrachtet, welche für die Bildung der geometrischen Begriffe innerhalb einer einzelnen Empfindungsgruppe, der Tast- oder Gesichtsempfindungen, in Betracht kommen. Diese haben das gemeinsame Substrat in den aus der allgemeinen Sinnlichkeit abgeleiteten Begriffen, und sobald sie die beiden Bilder, das Tast- und das Sehbild des Punktes, verschmolzen haben, entstehen zwei Geometrien, eine Tast- und eine Gesichtsgeometrie, die sich auf dasselbe dreidimensionale Kontinuum, d. h. auf denselben Raum beziehen.

Die mathematischen Untersuchungen, von denen oben die Rede war, und die sich besonders über die zweite Hälfte des eben verflossenen Jahrhunderts erstrecken, zeigen, wie weit diese beiden Geometrien sich entwickeln können; wir können also sagen, daß wir mit



dem Tastsinn (dem allgemeinen und dem besonderen) eine *metrische* Geometrie und mit dem Gesichtssinn eine *projektive* konstruieren, die sich auf dieselbe Punktmannigfaltigkeit (den Raum) beziehen.

Diese beiden Geometrien verbinden sich also in unserem Geiste nicht zu einer einzigen Art von räumlichen Beziehungen, und jeder der Sinne (besonders das Gesicht) verschafft uns durch Assoziation die mittelbare Wahrnehmung dieser Beziehungen.

Eine derartige Verknüpfung erfordert ihrerseits neue Postulate. Man könnte nämlich in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zwei konventionelle abstrakte Geometrien konstruieren, indem man der einen ein lineares System von $\infty^3$ „Ebenen" genannten Flächen, der anderen eine Gruppe von $\infty^6$ „Bewegungen" genannten mit gewissen Eigenschaften versehenen Transformationen zugrunde legt; und diese Geometrien, die formal mit der gewöhnlichen projektiven und metrischen identisch wären, hätten a priori zueinander keinerlei Beziehung.

Die gewöhnliche Geometrie dagegen vereinigt das Gesichts- und das Tastbild der geraden Linie zu einem einzigen Begriff und erkennt so dieselbe *physikalische Symmetrie* in den optischen und den mechanischen Erscheinungen.

Diese Verbindung ist so innig, daß es einer sehr tiefgehenden Kritik bedarf, um die beiden Arten von miteinander vereinigten Begriffen zu scheiden. Auf den ersten Blick bemerkt man gar keinen Unterschied zwischen der optischen Grundeigenschaft der Geraden, durch zwei Punkte bestimmt zu sein, und ihrer mechanischen, Linie kürzester Entfernung oder Rotationsachse eines festen Körpers zu sein.

Der innerste Grund davon liegt in dem Umstand, daß die Vereinigung dieser Eigenschaften in dem Urteil

liegt: „eine Linie, die mit einer Geraden kongruent ist, ist eine Gerade."

Wenn man in dem eben hingeschriebenen Satz das Wort „kongruent" durch „gleich" ersetzt, so bedarf es einer großen kritischen Anstrengung, um sich bewußt zu werden, daß das ausgedrückte Urteil nicht auf eine Tautologie hinausläuft.

Und dennoch, wenn wir voraussetzen, daß das Licht sich nicht in der metrisch kürzesten, d. h. in der mechanisch definierten Geraden ausbreitet, so würde die Drehung eines Lichtstrahles um zwei seiner Punkte eine Linie ergeben, die ihm kongruent wäre und doch nicht, wie er, als Gerade im optischen Sinne angesehen werden könnte.

Die Kongruenz der geraden Linien drückt also die physikalische Grundtatsache aus, die sich auf die Ausbreitung des Lichtes in homogenen Medien bezieht. Diese Tatsache ermöglicht die Vereinigung der beiden Geometrien (der Tast- und der Gesichtsgeometrie) zu einer einzigen metrisch-projektiven derart, daß in dem erweiterten geometrischen System die Kongruenz, noch immer logisch betrachtet, eine Art der Gleichheit ist.

Man muß nämlich beachten, daß man durch ein Verfahren, das dem im Gebiete der Bewegungen untersuchten ähnlich ist, auch zu dem Begriff einer *projektiven* oder optischen *Gleichheit* gelangt, einer Beziehung, welche von den Geometern den Namen „*Projektivität*" erhalten hat[1]).

Nun stellt sich für den Gesichtssinn die metrische Gleichheit (Kongruenz) als ein Spezialfall der Projektivität dar. Sie bezeichnet die Identität der räumlichen Beziehungen der Teile zweier Figuren zueinander.

1) Eine Transformation, die die Geraden und Ebenen und folglich alle *graphischen Eigenschaften* ungeändert läßt.



Daher versteckt sich das metrisch-projektive Postulat der Kongruenz der Geraden in der Form eines Axioms der logischen Gleichheit.

Daher hat auch manch einer versucht, von hier aus zu einer Definition der Kongruenz als Identität der inneren Eigenschaften zweier Figuren zu gelangen. Aber auch abgesehen von ihrem unbestimmten Charakter ist diese Definition unzureichend; denn ohne Vergleichung mit irgendetwas Äußerem ist die Kongruenz nicht von der Ähnlichkeit zu unterscheiden.

Da der metrische Raum, der aus den Tastvorstellungen abgeleitet ist, und der projektive, der vom Gesichtssinn konstruiert wird, in dem abstrakten Begriffe des einzigen metrisch-projektiven Raumes verschmelzen, so bestimmt sich die Vorstellung von diesem vor allem als die eines *unendlichen Raumes;* die Unbegrenztheit der Geraden in optischer und in mechanischer Hinsicht, und ihr optischer Charakter als „offene Linie" schließen in der Tat die Riemannsche Vorstellung aus.

Immerhin bleibt noch zu erklären, wie man zu dem euklidischen Postulat kommt, indem man die hyperbolische Vorstellung Lobatschewskys ausschließt.

Es ist natürlich, hierfür die Tast- und die Gesichtsvorstellung zu vergleichen, die wir uns von *parallelen Geraden* bilden.

Diese erscheinen optisch als Gerade einer Ebene, die sich nicht schneiden, genau, als Grenze von Geraden, die sich in einem sehr entfernten Punkte schneiden. In der Tastvorstellung hingegen stellen sie sich als *äquidistante Linien* dar.

Die Verbindung ergibt, daß *zwei Parallelen als äquidistante Gerade* (einer Ebene) betrachtet werden. Und die Annahme einer Existenz zweier solcher Geraden zieht bekanntlich das euklidische Parallelenpostulat nach sich; mit anderen Worten, sie führt dazu, die Ge-

rade, deren Strahlen einer gegebenen anderen nach ihren entgegengesetzten Richtungen parallel sind, optisch als einzige ihrer Art zu erkennen.

*Das Parallelenpostulat entsteht also aus der Verschmelzung des Tast- und Gesichtsraums, die uns zu dem metrisch-projektiven Raumbegriff führt.*

Wie sehr man auch über den wahren Wert dieses Begriffes streiten kann, er bleibt doch immer in seiner subjektiven Form euklidisch. Aber die Kritik, die ihn nach und nach in seine konstruktiven Bestandteile zerlegt hat, hat zuerst die kompliziertesten und jüngsten Verbindungen gelöst, die die Daten der verschiedenen Sinne untereinander verknüpfen, um dann immer weiter bis zu den ersten Anfängen des Bildungsprozesses aufzusteigen.

Können die vorstehend gegebenen Erklärungen über die Entstehung des euklidischen Postulates durch eine Untersuchung der Geometrie der Blindgeborenen bestätigt werden?

Und finden sie anderseits eine Stütze in der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie?

Auf die erste Frage scheint die Antwort lauten zu müssen: wenn das euklidische Postulat aus einer Verbindung von Tast- und Gesichtsvorstellungen hervorgeht, so werden die Blindgeborenen keinerlei Anschauung davon haben.

Diese Annahme ist aber jedenfalls a priori unannehmbar, da es doch klar zu sein scheint, daß in Ermangelung des Gesichtssinnes andere Tast-Muskelerfahrungen in ihrer Gesamtheit zu einer euklidischen Vorstellung des Raumes führen werden. Und so verhält es sich in der Tat; wir haben uns selbst davon überzeugen können.

Immerhin sollte man meinen, daß die Blindgeborenen nicht die gewöhnliche Abneigung gegen die nichteuklidische Hypothese empfinden müßten. Wir hätten recht



gern diesen Punkt aufgeklärt. Allerdings müssen wir das Experiment, das in dem Institut zu Bologna an einem mit einer gewissen geometrischen Bildung versehenen Blindgeborenen gemacht wurde, für unzureichend erklären; es würde uns kühn erscheinen, als Beweis für unsere Behauptung ohne weiteres das Zeugnis dieses Menschen anzuführen, der offenbar der Suggestionswirkung unserer eigenen Frage unterworfen sein konnte, als er die *Möglichkeit* der von uns in nichteuklidischem Sinne ausgesprochenen Zweifel bejahte.

Was wir aus dieser Befragung entnommen haben, ist die Überzeugung von der ungeheuren Schwierigkeit, auf diesem Wege zu gesicherten Schlüssen zu gelangen.

Eine Bestätigung der genetischen Erklärung des euklidischen Postulates liefert dagegen die Geschichte. Unser Freund G. Vailati teilt uns nämlich mit, daß Saccheri die Geringfügigkeit der vor ihm in der nichteuklidischen Kritik gemachten Fortschritte darauf zurückführte, daß sich viele Geometer bei der Definition der Parallelen als äquidistanter Geraden beruhigten; dies ist für Saccheri ein *Irrtum in einer zusammengesetzten Definition*. Und gerade von der Aufdeckung dieses logischen Fehlers nimmt die eigene Kritik des genialen Forschers ihren Ausgang.

Aber was ist eine zusammengesetzte Definition anders als eine Art, implizite die Existenz eines Dinges zu postulieren, dessen Begriff aus der Verbindung mehrerer begrifflicher Vorstellungen hervorgeht?

Auf Grund hiervon kann man allgemeiner sagen, daß die angebliche logische Notwendigkeit der geometrischen Postulate immer in einem gewissen Sinne auf einer zusammengesetzten Definition beruht, wobei die verbundenen Vorstellungen für sich genommen sonst nicht in die Begriffssphäre fallen müßten.

### § 28. Schluß.

Von einem synthetischen Gesichtspunkt beleuchten die vorstehenden Betrachtungen über die Entstehung der geometrischen Begriffe die Mannigfaltigkeit der elementaren und unbewußt wiederholten Erfahrungen, die in der Raumanschauung wiedererweckt werden; aber mehr noch zeigen sie uns den langen Assoziations- und Abstraktionsprozeß, durch den dieselben Begriffe entstanden.

Die *Evidenz der Geometrie* erhält die Bedeutung einerseits der Leichtigkeit, die alten unbewußten Erfahrungen wieder zu erwecken, indem man sie sozusagen in der Anschauung der Bilder wiederholt, anderseits der Möglichkeit in der *Form* der Postulate die Assoziations- und Abstraktionsoperation wiederzufinden, die mit den konstruktiven Elementen des Raumes vorgenommen worden waren.

Die in den Postulaten vorausgesetzten Tatsachen stellen sich hierdurch dar als Bedingungen einer psychologischen Entwickelung, die sich nach den logischen Gesetzen und nach dem Prinzip der Sparsamkeit vollzieht und die zu der einheitlichen Vorstellung der geometrischen Wirklichkeit führt.

## Kapitel V.

# Die Mechanik.

## Reale Bedeutung und psychologische Entwickelung der Grundsätze.

### § 1. Die Mechanik als Erweiterung der Geometrie.

Wir wollen absehen von den Zweifeln, welche die Kritik an der strengen Gültigkeit der geometrischen Postulate für zukünftige Erfahrungen erhebt. Die Geometrie erscheint dann als eine rein deduktive Wissenschaft, das Muster einer Wissenschaft für die rationalistischen Philosophen!

Aber dieser Charakter der logischen Vollkommenheit kommt ihr nur als theoretischem Lehrgebäude, d. h. als statistischer Regel (Kap. IV § 7) zu. Betrachtet man hingegen die Resultate der Geometrie nach ihrem Wirklichkeitsgehalt, d. h. faßt man die geometrischen Beziehungen als einen Teil der physikalischen auf (Kap. IV § 6), so sind die deduktiven Entwickelungen nicht imstande, uns über einen gewissen Grad hinaus eine noch genauere Voraussicht zu gestatten.

Die Trennung der Geometrie von der Physik durch Abstraktion ist nur dann von Nutzen, wenn diese Fälle in ihrer Gesamtheit als unter physikalisch *indifferenten* Bedingungen gegeben betrachtet werden. Wenn es aber gelingt, ihre *Unterschiede* so zu klassifizieren, daß man ihren systematischen Einfluß auf die Voraussicht abschätzen kann, so wird es gelingen *die Geometrie fortzusetzen, indem man ihre Begriffe durch Hinzunahme*

*neuer Sinnesdaten ergänzt* und so die wissenschaftliche Anwendung bestimmter gestaltet.

In diesem Sinne *stellt die Mechanik eine erste Erweiterung der Geometrie dar*, durch die zwischen den verschiedenen geometrisch als möglich angesehenen Lagebeziehungen der Körper eine Auswahl getroffen wird durch Berücksichtigung von Zeit, Kräften, Massen usw.

Nun verbinden sich diese neuen Elemente nicht einfach mit den räumlichen Daten, sondern sie werden in dem konstruktiven Prozeß der mechanischen Begriffe der geometrischen Vorstellung auch *untergeordnet*, weil dieser Prozeß *psychologisch* auf die Geometrie *folgt*.

Wir haben schon darauf aufmerksam gemacht (Kap. IV § 6), daß eine solche Rangordnung der Begriffe, die sich in der Anordnung der dogmatischen Darstellung der Wissenschaft widerspiegelt, nicht die Bedeutung einer *notwendigen Unterordnung* hat. Es ist nicht verboten, diese Ordnung zu verändern, und eine Mechanik zu konstruieren, die von irgendeiner geometrischen Hypothese unabhängig ist; diese wird dann durch eine ihr äquivalente mechanische Hypothese ersetzt werden können. So kann die Mechanik zu einer weiteren Bestätigung oder auch zu einer Verbesserung der geometrischen Prinzipien selbst führen.

Nehmen wir z. B. das fünfte euklidische Postulat über die Parallelen.

Die gewöhnliche Statik beruht darauf; aber eine tiefer gehende Kritik erlaubt uns, zu erkennen, wie eine nichteuklidische Statik beschaffen wäre: zwei gleiche auf einem starren Stabe $AB$ in seinen Endpunkten senkrecht stehende Kräfte würden eine auf $AB$ in seinem Mittelpunkte $O$ senkrecht stehende Resultante ergeben, genau wie im euklidischen Falle; aber im Gegensatz zu diesem Falle wäre die Resultante nicht mehr gleich der Summe der beiden Komponenten (Foncenex, Lagrange, d'Alembert, Genocchi, de Tilly). Dies ist also ein statischer Ausdruck für das geometrische Parallelenpostulat, eine neue Annahme, die wir als in ihm enthalten erkennen und deren Bestätigung innerhalb der Grenzen der experimentellen Genauigkeit einen neuen Beweis für die euklidische Geometrie abgibt; hätte jedoch diese Verifikation eine merkliche Abweichung von der Voraussage erkennen lassen, so hätte sie zu einer Korrektur der Prinzipien jener Geometrie führen können.



Aber die Entwickelung der Mechanik hat solche Korrekturen nicht veranlaßt, so daß man sagen kann, daß *die Mechanik eine erweiterte Bestätigung der Geometrie geliefert* hat. Wenn es nämlich bei einigen Erscheinungen Schwierigkeiten macht, die mechanischen Prinzipien zu bestätigen, so hat sich doch nie eine Möglichkeit geboten, diese Experimente einer systematischen Korrektur zu unterwerfen, indem man irgendwelche der bereits angenommenen geometrischen Sätze modifizierte. Dieses Ergebnis stimmt übrigens zu dem Genauigkeitsgrade der Geometrie, wie er sich aus den unmittelbaren Verifikationen ergibt (vgl. Kap. IV § 10).

## § 2. Programm.

Will man die Mechanik als Erweiterung der Geometrie betrachten, so bietet sich als eine ziemlich natürliche Reihenfolge in der Behandlung des Gegenstandes die folgende dar:

1. Vor allem eine Analyse der *Zeit*, denn dieser Begriff erweist sich als dem des Raumes koordiniert, und wird schon vor der wissenschaftlichen Ausbildung der Erkenntnis fertig vorgefunden.

   Das Hinzutreten der Zeit zum Raume führt ohne weiteres zu denjenigen Begriffen, die die *Kinematik*

oder die erweiterte Geometrie der Bewegung ausmachen.

Da aber eine eingehendere Diskussion der *Bewegung* die kinematischen Begriffe mit den dynamischen in Beziehung setzt, so haben wir diese Diskussion zurückgestellt und dem dritten Teil unseres Programms einverleibt.

2. Eine Kritik der Begriffe und Prinzipien der *Statik*.
3. Eine Kritik der Begriffe und Prinzipien der *Dynamik*.

Die Trennung von Statik und Dynamik entspricht der historischen Überlieferung, die erst neuerdings von einigen verlassen worden ist, und drängt sich uns auf infolge unserer Art die Kräfte zu betrachten.

Wir fügen noch hinzu, daß wir, um die beiden Untersuchungen einander näher zu bringen und um in der Dynamik die klassische Vereinfachung anzunehmen, uns im Prinzip auf die *Mechanik der Punkte* beschränkt haben, obgleich es in der Statik hätte von Vorteil sein können, sofort die *Systeme* zu betrachten. Die auf diese bezüglichen Fragen werden also im letzten Teil des Kapitels behandelt, sowohl für die Statik als für die Dynamik.

## § 3. Die Zeit: Sukzession und Dauer.

Von zwei Wahrnehmungen oder Gruppen von solchen (Erscheinungen) bemerken wir, daß die eine *früher*, die andere *später* ist, oder daß sie *gleichzeitig* sind. Die *Anschauung*, die wir durch die Worte „früher" und „später" ausdrücken, liefert ein Merkmal, durch das die Erscheinungen in eine Reihe geordnet werden *(zeitliche Aufeinanderfolge)*.

Wenn wir von zwei Erscheinungen $A$, $B$ und von zwei anderen $C$ und $D$ sprechen, so pflegen wir auch das *Zeitintervall* zu vergleichen, das zwischen $A$ und $B$ verstrichen ist, mit dem, welches zwischen $C$ und $D$ verstrichen ist, indem wir sagen, daß sie *gleich* sind, oder daß das eine *größer* als das andere ist. Dieses Urteil führt uns zu einer quantitativen Abschätzung, d. h. zu einer *Messung* der Zeit oder der *Dauer*.



Es ist klar, daß die Messung der Dauer, wenn sie festgesetzt ist, das Kriterium der zeitlichen Reihenfolge in sich schließt. Aber umgekehrt *liefert uns die Vorstellung des Früher und Später keinerlei Kriterium, um zwei Zeiträume zu vergleichen*, die nicht einen gemeinsamen Anfang (oder ein gemeinsames Ende) haben.

## § 4. Psychologische und physikalische Zeit.

Die Zeiturteile, seien es nun solche über Sukzession oder solche über Dauer, können sich auf verschiedene *Erscheinungsreihen* beziehen; ebenso wie die Urteile über Längen auf verschiedene Reihen von Körpern, die als Linien verglichen werden, bezogen werden können. Jede Erscheinungsreihe liefert uns in diesem Sinne eine *Zeitskala*, in der das Früher und Später wenigstens gegeben ist, und wo ein Kriterium der Vergleichung von Intervallen geliefert werden kann.

*Der abstrakte Zeitbegriff entsteht durch Assoziation und Abstraktion aus dem aller möglichen Zeitskalen.*

Der abstrakte Zeitbegriff, den wir als *physikalische Zeit* denken, enthält also die *Annahme* einer Zeitskala, in der jede *mögliche Erscheinung* ihre Stelle hat, im Unterschied von der *physiologischen* oder *psychologischen Zeit*, die die Skala aller *wahrgenommenen Erscheinungen* ist.

Die Annahme der physikalischen Zeit schließt im besonderen die Möglichkeit in sich:

1. die Zeitvorstellungen der verschiedenen Beobachter zu vergleichen;
2. die Zeiten an verschiedenen Orten miteinander zu vergleichen.

Die Übereinstimmung der verbundenen Zeitvorstellungen und die nachträgliche Bestätigung der daraus sich ergebenden Voraussagen wird den *realen Charakter der Zeit* beweisen.

Betrachten wir drei Erscheinungen $A$, $B$, $C$ und drei Beobachter; einer von diesen beobachte $A$ und $B$, der zweite $B$ und $C$, und der dritte $A$ und $C$. Wenn der erste Beobachter findet, daß

$B$ auf $A$ folgt,

der zweite, daß

$C$ auf $B$ folgt,

so kann man vorhersagen und es bestätigt sich in der Tat, daß für den dritten Beobachter

$C$ auf $A$ folgt.

Dies ist die Bedeutung der Übereinstimmung zwischen den Zeitvorstellungen verschiedener Menschen, und es ist leicht ersichtlich, daß hierin die Möglichkeit liegt, mehrere ihrer Zeitskalen zu einer einzigen auf einen hypothetischen Beobachter bezogenen zu verbinden.

Die Verbindung der auf verschiedene Orte bezogenen Zeitvorstellungen begegnet in der Wirklichkeit der folgenden Schwierigkeit: einige Empfindungen, die wir als zu einer lokalisierten Erscheinung gehörig verbunden denken, weil sie einem am Orte der Erscheinung befindlichen Beobachter sich als gleichzeitig darstellen, erscheinen dagegen einem an einem anderen Orte befindlichen als sukzessiv, z. B. das Licht und der Schall bei der Entladung einer Flinte.

Um die oben erwähnte Vereinigung zu ermöglichen, tritt folglich hier eine Hypothese hinzu, nämlich daß die partiellen Phasen einer Erscheinung, die räumlich aufeinander folgen, dies auch zeitlich tun *(Ausbreitungszeit)*. Und diese Hypothese wird bestätigt durch die Erfahrung an denjenigen Erscheinungen, die an ihren Ursprungsort reflektiert werden.



Damit man also eine Verbindung zwischen den auf verschiedene Orte bezüglichen Zeitvorstellungen herstellen kann, ist folgendes erforderlich:

entweder eine Erscheinung zu finden, die sich momentan ausbreitet;

oder die empirische Bestimmung der Gleichzeitigkeit der Erscheinungen mittels der Messung der Ausbreitungszeit zu korrigieren.

Abgesehen von dieser bald zu besprechenden Messung dient die fast momentane Ausbreitung des Lichtes (oder der Elektrizität) dazu, um praktisch die erforderte Verbindung herzustellen.

Aber der so festgestellte Begriff der Gleichzeitigkeit ist nicht streng und enthält daher einen merklichen Fehler; es ist in der Tat bekannt, daß Römer auf Grund von astronomischen Betrachtungen und Foucault durch einen direkten irdischen Versuch die Lichtgeschwindigkeit (ungefähr 300 000 km in der Sekunde) gemessen haben, von der sich später herausgestellt hat, daß sie auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen darstellt.

Um also das Kriterium der Messung zu übergehen, so wird die zeitliche Folge auf diese Weise nur mit einem Genauigkeitsgrade vom Raume unabhängig gemacht, der der Lichtgeschwindigkeit entspricht; innerhalb der Grenzen dieses für die gewöhnliche Praxis sehr hohen Genauigkeitsgrades können auf der Erde die konkreten Voraussagen, zu denen die Annahme einer solchen Unabhängigkeit führt, leicht bestätigt werden.

## § 5. Eigenschaften der zeitlichen Sukzession.

*Die Eigenschaften der Ordnung, die wir als physikalische Zeit auffassen, ergeben sich aus den Bedingungen für die Verschmelzung der verschiedenen möglichen Zeitskalen.*

Würden wir eine einzige Skala nehmen, die aus einer periodischen Reihe von Erscheinungen bestände, so würde diese uns eine Vorstellung von der Zeit als einer *geschlossenen Ordnung* liefern; aber die Mannigfaltigkeit unserer Wahrnehmungen in ihrer Zusammensetzung zwingt uns, die Zeit als eine *offene Ordnung* anzusehen, die sich dann beiderseits unbegrenzt ausdehnt durch die Annahme der möglichen Erscheinungen, die denen der gegebenen Reihen folgen oder vorangehen. Die periodischen Erscheinungsreihen lassen sich daher den nichtperiodischen durch Gleichzeitigkeit zuordnen, wobei jeder ihrer Erscheinungen eine Reihe immer wiederholter Stellen angewiesen wird.

Die *Stetigkeit der Zeitordnung* ist eine auf den physikalischen Zeitbegriff bezügliche Hypothese, zu der wir durch das Bedürfnis geführt werden, alle möglichen Zeitskalen zu einer einzigen abstrakten zu vereinigen, und besonders diejenigen, die mit der genetischen Vorstellung der verschiedenen *linearen Reihen* von Tast- oder Sehpunkten zusammenhängen (vgl. Kap. IV). Die *psychologische Zeit ist nicht stetig*, weil sie aus *Momenten* besteht, in denen die Erscheinungen alle nacheinander wahrgenommen werden und sich in einer *wie die Zahlen geordneten Reihe* darstellen.

## § 6. Die Zeitdauer.

Die Vorstellung einer Ordnung, nach der die Erscheinungen aufeinanderfolgen, erschöpft nicht den Inhalt unserer Zeiterkenntnis. Im allgemeinen kommt noch eine Maßbestimmung der Dauer hinzu, die sich vor allen auf die als Zeitskala genommene Erscheinungsreihe bezieht.

Ein Kriterium der Zeitmessung wird uns im allgemeinen geliefert durch jede Reihe von akustischen oder optischen Erscheinungen, die einander in unterscheidbaren Zwischenräumen folgen, die aber häufig genug sind, um das ganze psychologische Aufmerksamkeitsfeld auszufüllen; die quantitative Abschätzung der Dauer in bezug auf diese Reihen wird durch die *Zählung* der Pausen gegeben.



An einer sichtbaren stetigen Reihe, z. B. der Reihe von Eindrücken, die dem Ziehen einer Linie, die von einem beweglichen Punkte beschrieben wird, entsprechen, kann man eine Messung der Zeitdauer bewerkstelligen, indem man die Zeitintervalle den von dem beweglichen Punkte beschriebenen Bögen zuordnet, die nach ihrer Länge gemessen werden.

Diese Kriterien, die sich auf die eine oder andere Erscheinungsreihe beziehen, welche als Zeitskala genommen wird, liefern eine rein *relative Zeitmessung;* die von verschiedenen akustischen oder optischen Reihen gelieferten Messungen sind untereinander nicht vergleichbar. Die Messung, die sich durch Konvention auf eine spezielle Reihe bezieht, dient nur dazu, eine genauere Voraussicht des Früher und Später innerhalb der als Bezugskala gewählten Reihe zu ermöglichen.

Mittels einer willkürlichen Zeitmessung können wir die einander folgenden Momente den Werten einer Variabeln $t$ zuordnen, die das Zeitintervall ausdrückt, das seit einem gewissen Anfangsmoment verflossen ist.

Wenn man an Stelle von $t$ eine *beliebige wachsende Funktion*

$$\tau = f(t)$$

nimmt, so hat man eine andere willkürliche Zeitmessung, die in bezug auf eine passende andere Zeitskala eine reale Bedeutung haben kann.

Diesem Begriff einer von den verschiedenen Reihen von sukzessiven Erscheinungen abhängigen Zeitmessung steht die Ansicht gegenüber, die Newton unter dem Einfluß der mittelalterlichen Philosophie

akzeptierte, von einer *absoluten* von den Erscheinungen unabhängigen *Zeit*, in der ein *wahres oder mathematisches Kriterium für die Vergleichung von Zeitintervallen* gegeben ist.

Diese Ansicht wird mit Recht von MACH durch historische, psychologische und linguistische Gründe bekämpft[1]).

Uns genügt es, daß wir in ihr derselben Art, den Abstraktionsprozeß transzendent aufzufassen, begegnen, die wir schon mehrmals kritisiert haben.

Wenn also die absolute Zeit als sinnlos erkannt werden muß, muß man deshalb auch schließen, daß die Zeitmessung rein relativ ist?

Bei diesem Ergebnis scheint der größte Teil der mathematischen Kritiker stehen zu bleiben; so z. B. P. VOLKMANN[2]), und auch MACH bekennt sich, soweit wir sehen, wenn auch weniger ausdrücklich zu ihr, wenn er die Messung der Zeit mit der der Temperatur vergleicht.

Um die Willkürlichkeit der Substitution

$$\tau = f(t),$$

die in die Zeitmessung eingeht, zu entfernen, benutzt man eine konventionelle Wahl der Bezugskala, indem

1) „Die Mechanik in ihrer Entwickelung" 4. Auflage, Leipzig, Brockhaus, 1901 (S. 232—237).

2) „Einführung in das Studium der theoretischen Physik." Leipzig, B. G. Teubner, 1900. Vgl. auch den Artikel von POINCARÉ über „la mesure du temps", den wir in dem eben erschienenen Bande „La valeur de la science" lesen. Es möchte seltsam erscheinen, daß gewisse in diesem Buche zur Rechtfertigung des nominalistischen Ergebnisses entwickelten Überlegungen einigen der von uns zu dem entgegengesetzten Zwecke beigebrachten Argumente gleichen. Aber der Grundunterschied liegt in der transzendenten Betrachtungsweise des französischen Philosophen (vgl. Kap. IV), die dem Geiste unserer Kritik entgegengesetzt ist.



man die Zeitintervalle den Räumen proportional setzt, die von einem beweglichen Körper, auf den keine Kräfte wirken, durchlaufen werden. Man nimmt also das *Trägheitsgesetz* nicht mehr als Ausdruck einer Beziehung zwischen Kraft, Bewegung und Zeit, sondern als eine *Definition der Zeit*. Diese kann, wohlgemerkt, in keiner Weise auf eine bloße *Vereinbarung* zurückgeführt werden, denn sie schließt die *Annahme der Tatsache* ein, daß „wenn zwei Körper, die keinen Kräften unterworfen sind, zu gleicher Zeit zwei Räume $a$ und $b$ durchlaufen, sie weiterhin zu gleicher Zeit Räume durchlaufen werden, die zu $a$ und $b$ proportional sind".

Dies ist in jedem Falle eine zu enge Auffassung der in der gewöhnlichen Zeitmessung liegenden Tatsachen. Es genügt darauf hinzuweisen, daß diese Messung älter als das Trägheitsgesetz ist!

Der gesunde Menschenverstand nimmt eine *natürliche Zeitmessung* an, der er unbestimmterweise eine besondere physikalische Bedeutung zuschreibt.

Welche Bedeutung kann man dieser Meinung beimessen, nachdem man aus der Frage jeden transzendenten Begriff einer von den Erscheinungen unabhängigen Zeit beseitigt hat?

Vergleichen wir die Messung der Zeit mit derjenigen der Temperaturen und der der Längen.

Die Zeit kann ebenso wie die Temperatur und wie der Bogen einer Linie oder (speziell) die Strecke einer Geraden durch eine numerische in gegebener Weise wachsende Variable $t$ dargestellt werden.

Jede wachsende Funktion $f(t)$ an Stelle von $t$ stellt in allen drei Fällen in gleicher Weise die *geordnete Folge* der Zeiten, der Temperaturen oder der linearen Längen dar; und man kann *konventionelle Uhren, Thermometer und Längenmaße* konstruieren, die einer willkürlichen Wahl der Funktion $f(t)$ entsprechen.

Für die Uhr genügt ein Instrument, das aus einem in geeigneter Weise auf einem Quadranten bewegten Bleistifte besteht, der als *gleich* diejenigen *Zeitintervalle* aufzeichnet, in denen die Funktion *f (t) gleichen Zuwachs* erfährt. Für das Thermometer genügt es, daß die Dilatationen der Thermometersubstanz auf einer Skala gemessen werden, auf der diejenigen *Temperaturzuwächse als gleich* angezeigt werden, die *gleichen Zuwächsen* von *f (t)* entsprechen; diese durch Vereinbarung als gleich betrachteten Temperaturzuwächse werden anderseits zu den entsprechenden Volumvermehrungen der Thermometersubstanz je nach der Natur der gewählten Substanz in verschiedenen Beziehungen stehen. Was das Längenmaß betrifft, so kann man sich ein solches gemäß der festgesetzten Bedingung herstellen, indem man sich eines *eingeteilten elastischen Fadens* bedient, der in seinen verschiedenen Teilen verschieden gespannt ist, wobei die Sache sich übrigens so verhält, daß ein beliebiges Stück des Fadens in zwei Lagen auf dieselbe Weise gespannt ist, wenn er durch eine Bewegung von der einen in die andere übergeführt werden kann.

Nun stellen verschiedene willkürliche Thermometer unsere Empfindungen der Temperaturveränderung gleich gut dar; die Empfindung, nämlich die wir beim Übergang von 0 zu 1 Grad eines gewöhnlichen Quecksilberthermometers haben, ist mit der, welche wir beim Übergang von 20 zu 21 Grad haben, in keiner Weise vergleichbar; wenn daher ein anderes Thermometer diesen letzten Zuwachs als doppelt so groß wie den ersten angibt, so haben wir in der Wahrnehmung kein Kriterium, um eine von diesen beiden Indikationen zu bevorzugen.[1])

1) Über die Bedeutung der absoluten Temperatur vgl. Kap. VI.



Aber von den verschiedenen möglichen konventionellen Maßstäben können wir das nicht sagen. Denn nur einer von ihnen, und zwar derjenige, der aus einem *starren undehnbaren Faden* besteht, stimmt mit den durch das Tastorgan gelieferten *Längenempfindungen* überein. Wir betrachten daher diesen Maßstab als das *natürliche Längenmaß* und erkennen, daß diese Art zu messen zu ihrer Möglichkeit eine *allgemeine Tatsache* voraussetzt, nämlich die *Invarianz der starren Körper* im Verhältnis zum Tastorgan und zueinander *bei der Bewegung*.

Was werden wir nun von der Uhr sagen? Gibt es eine Uhr, deren Angaben einer Empfindung von der Dauer entsprechen, die auf eine gewisse klar unterschiedene Erscheinungsreihe bezogen ist, und die wir meinen, wenn wir von einer *natürlichen Zeitmessung* sprechen? Und gibt es eine allgemeine Tatsache, die sich in der Übereinstimmung der von diesen Zeitskalen gelieferten Angaben ausdrückt?

Kurz, gibt es neben den mit der Zählung der Pausen in einer beliebigen Reihe von getrennten Erscheinungen zusammenhängenden Empfindungen eine Empfindung der Dauer, die sich auf eine Reihe von *isochronen* Erscheinungen bezieht, und die sich mit der Tastempfindung der Länge vergleichen ließe, oder hat die Dauer für die Empfindung keine eigene Bedeutung, wie dies bei der Quantität der Temperaturvermehrung der Fall ist?

Wir wollen die vorstehenden Fragen beantworten:

Wir haben die *Empfindung des Rhythmus* bei gewissen akustischen Reihen, die wir *isochron* nennen; die verschiedenen von uns als isochron empfundenen Tonreihen liefern uns miteinander vergleichbare Zeitmessungen, d. h. sie liefern uns, wenn auch mit geringer Genauigkeit, dieselbe Abschätzung *gleicher Intervalle* und folglich dieselbe *natürliche Zeitmessung*.

Daß das Gehör uns eine ziemliche genaue Wahrnehmung des Isochronismus liefert, und daß über die Wahrnehmung des musikalischen Rhythmus Übereinstimmung besteht, ist wenigstens in bezug auf musikalisch geübte Ohren unbestreitbar.

Man könnte allerdings zweifeln, ob es sich um eine ursprüngliche Gehörswahrnehmung und nicht vielmehr um eine Assoziation mit gewissen Muskelbewegungen handelt, die bei fortgesetzter Wiederholung die Tendenz haben, sich regelmäßig zu vollziehen.

Es ist allgemein bekannt, daß die Musiker zu einem derartigen Verfahren greifen, wenn es sich darum handelt, das *Tempo zu schlagen*. Und der Isochronismus der langsam wiederholten Hand- oder Fußbewegungen hängt vielleicht mit dem Rhythmus gewisser Organfunktionen und besonders des Pulses zusammen.

Man könnte also sagen, daß das Ohr uns die Vorstellung des Isochronismus und damit der Dauer durch Verbindung mit dem Muskelsinn vermittelt, ähnlich wie das Auge uns die Vorstellung der Längen durch Verbindung mit den Daten des Tastsinnes liefert.

Welche Ansicht man aber auch darüber haben mag, es bleibt immer bestehen, daß „wir mittels einer Reihe wiederholter Bewegungen, die von Tönen begleitet sind, eine Zeitmessung vollziehen können, über die die Menschen in engen Grenzen, aber mit hinreichender Genauigkeit einig sind, wie über ein Objekt einer besonderen Wahrnehmung der Dauer".

Und da sich an die Empfindung der Dauer fortwährend bestätigte Voraussagen knüpfen, so können wir von der *Dauer* als von *etwas Wirklichem* sprechen.

Jede Uhr also, deren Angaben dieser Empfindung entsprechen, muß als ein *Maßstab der physikalischen Zeit* angesehen werden, zum Unterschied von einer beliebigen anderen konventionellen Uhr. In einer solchen



Uhr haben wir daher ein Mittel, die *natürliche Zeitmessung auszudehnen* über die engen Grenzen, auf die wir bei der Benutzung einer isochronen Tonreihe angewiesen sind.

Die Übereinstimmung in der Empfindung der Dauer sichert uns bereits eine *gewisse* Übereinstimmung der danach regulierten Uhren; wenn man aber eine *genauere* Übereinstimmung findet, so wird sie eine allgemeine Tatsache darstellen, die zu erkennen wir uns nunmehr vornehmen.

## § 7. Das Postulat der Zeitmessung.

Bei der Ausdehnung der Vergleichung der Zeitintervalle über die Grenzen der ursprünglichen Empfindung hinaus folgen wir demselben Wege, der in ähnlichen Fällen eingeschlagen zu werden pflegt.

Gehen wir von der Voraussetzung aus, daß die *Gleichheit der Zeitdauer innerhalb genauerer Grenzen* als den durch die unmittelbare Wahrnehmung gegebenen eine *reale Eigenschaft* der Erscheinungen ausmacht. Wir werden dann zu der Annahme gedrängt, daß diese Gleichheit bei allen den Erscheinungen stattfindet, die sich unter bestimmten *konstanten Bedingungen* vollziehen, und die wir auf *gleiche Ursachen* zurückführen.

Mag auch eine solche Annahme keinen streng zu bestimmenden Sinn haben, so führt sie doch unmittelbar dazu, folgendes zu untersuchen:

1. ob Erscheinungen, die sich unter *ähnlichen*, praktisch konstanten *Bedingungen* vollziehen, die wir also als Wirkungen *merklich gleicher Ursachen* betrachten, für die Empfindung des Isochronismus gleiche Dauer haben;
2. ob solche Erscheinungen, wenn sie jenseits der Grenzen der unmittelbaren Wahrnehmung ver-

glichen werden, zu derselben Bestimmung gleicher Zeitintervalle führen;

3. ob eine bei der Bestätigung der Annahme 2. etwa auftretende Abweichung nicht dadurch immer kleiner gemacht werden kann, daß man immer mehr, soweit wie möglich, einige Ungleichheiten beseitigt, die den als gleich betrachteten Erscheinungen anhaften.

Die den Fragen 1., 2., 3. entsprechenden Annahmen bilden das *fundamentale Postulat der Zeitmessung*, auf das wir uns direkt oder indirekt bei der Konstruktion und bei der Korrektur von Uhren berufen. Die *Übereinstimmung der* so konstruierten *Uhren* innerhalb der Grenzen, in denen man sie erreichen kann, bildet die Bestätigung dieses Postulates; die Wahrheit des Postulates kann hypothetisch als *streng* angenommen werden, solange man keine *systematischen Fehler*, sondern nur *zufällige* findet, die bei der Durchschnittsbildung herausfallen.

Wir wollen versuchen, das Gültigkeitsgebiet des eingeführten Postulates zu bestimmen.

Dazu überlegen wir uns folgendes:

1. Auf der Erde erhält man schon eine erste merkliche Übereinstimmung der verschiedenen Uhren, der Sanduhren, der Wasseruhren, allgemein aller derjenigen, die auf der Konstanz des Gewichtes beruhen. Und eine genauere Übereinstimmung kann erzielt werden, wenn man mit den erwähnten Mitteln den Isochronismus der kleinen Pendelschwingungen erkannt hat und nunmehr dieses Prinzip als Grundvoraussetzung der Konstruktion von Pendeluhren zugrunde legt.
2. Die astronomischen Beobachtungen veranlassen uns, gewisse Intervalle, in denen sich fast periodische Bewegungserscheinungen vollziehen, für gleich



zu halten; z. B. die Konstanz des Sterntages, des Monats, des Jahres usw. anzunehmen.

Und die verschiedenen auf diese Weise erhaltenen Messungskriterien stimmen ziemlich genau mit der Messung der irdischen Uhren und noch genauer untereinander überein; außerdem kann die erreichte Übereinstimmung immer noch genauer gemacht werden durch Anbringung geeigneter Korrektionen gemäß dem fundamentalen Postulat.

Es ist ja bekannt, daß der Genauigkeitsgrad der erwähnten Verifikationen sich einer Grenze nähert, die praktisch der Strenge gleichkommt, und es ist auch nicht befremdend, daß sich bei den durch Uhren gelieferten Messungen kleine Abweichungen einstellen, wenn man die vielen Ursachen bedenkt, die ein Variieren der als gleich angesehenen Umstände bewirken: die wechselnde Temperatur, die den Fall des Wassers oder des Sandes durch eine kleine Öffnung und die Pendellänge beeinflußt, und deren Wirkungen man nicht gut kompensieren kann; die Ursachen, die die Schwerkraft an einem gegebenen Orte verändern können; die langsamen, neben den periodischen im Planetensystem auftretenden Veränderungen; ja selbst die Veränderung des astronomischen Universums, das wir als eine unveränderliche Bedingung betrachten!

Nachdem wir erklärt haben, welche Tatsachen bei der Zeitmessung vorausgesetzt werden, halten wir es noch für angebracht, zu bemerken, daß man durch nichts berechtigt wäre, sie für *notwendige Wahrheiten* zu halten. Wie soll man, wenn zwei Wasseruhren einmal sich gleichzeitig geleert haben, a priori ausschließen, daß bei einem anderen Versuch nicht die eine sich vor der anderen leert?

Gegen die Möglichkeit dieser Hypothese kann man auch nicht die *Evidenz* anführen, die das Postulat der

Zeitmessung begleitet. Diese Evidenz bezieht sich nämlich nur darauf, daß *das Postulat die notwendige Bedingung dafür ausdrückt, daß die Dauer mit anderen Sinnesdaten in dem Begriff einer Erscheinung verbunden werden kann;* aber das Stattfinden dieser Bedingung stellt gerade die experimentell erkannte Tatsache dar, um die es sich handelt: *die objektive Realität der Dauer.*

## § 8. Über die Unabhängigkeit der Zeit vom Orte.

Nehmen wir das im vorigen Paragraphen analysierte Postulat als gültig an; dann ist die Zeitmessung *an einem bestimmten Orte* so festgelegt, daß die Variable „Zeit" bis auf eine ganze lineare Substitution bestimmt ist:

$$\tau = a\,t + b.$$

Die Konstanten $a$ und $b$ hängen von zwei willkürlichen Wahlen ab, nämlich von der Wahl der Maßeinheit und der des Anfangsmomentes.

Um zwei Intervalle *an verschiedenen Orten* $A$, $B$ zu vergleichen, bieten sich zwei Kriterien:

1. die *Übertragung* einer gegebenen Erscheinung im Raume gemäß dem Postulat der Zeitmessung; z. B. die Übertragung der Wasser- oder Pendeluhr, wobei auf die anzubringenden Korrekturen, z. B. die durch die Veränderung der Schwerkraft veranlaßte, zu achten ist.
2. die *Signalisierung* in $B$ des Anfangs und des Endes einer sich in $A$ abspielenden Erscheinung mittels des Lichtes oder der Elektrizität usw. Bei dieser Beurteilungsart verschwindet die Ausbreitungszeit, da sie nach dem Postulat des vorigen Paragraphen als konstant angesehen werden kann und die Entfernung zwischen $A$ und $B$ sich nicht ändert.

Daß die beiden Kriterien dasselbe Resultat über die Gleichheit von Zeitintervallen an verschiedenen Orten



ergeben, kann als Folgerung desselben Postulates angesehen werden, in Verbindung mit der geometrischen Grundvoraussetzung der Symmetrie in den Erscheinungen (Homogeneität des Raumes), aber nur unter der Bedingung, daß $A$ und $B$ sich in *relativer Ruhe* befinden, und wenn festgestellt ist, daß die Intensität der Erscheinung keinen Einfluß auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit hat.

Denken wir uns eine doppelte gegenseitige Signalisierung von $A$ nach $B$ und von $B$ nach $A$, z. B. mit Hilfe des Lichtes; die beiden Ausbreitungszeiten müssen unter gleichen Bedingungen aus Symmetriegründen als gleich betrachtet werden. Wir besitzen dadurch ein Mittel, direkt die Ausbreitungszeit zu messen, die von $A$ nach $B$ gebraucht wird, in allen Fällen, wo das Signal nach $A$ reflektiert werden kann; es genügt das zwischen dem Abgehen und der Rückkehr der Licht-, Elektrizitäts- usw. -welle verflossene Intervall zu halbieren.

Auf diesem Prinzip beruht die Messung der Lichtgeschwindigkeit, wie sie durch die Versuche Foucaults bewerkstelligt wurde.

Nun ist klar, daß wir dadurch imstande sind, die Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten immer unter der Voraussetzung relativer Ruhe theoretisch beliebig genau festzustellen.

Wohl verstanden stellt die Übereinstimmung der verschiedenen Urteile, die man auf diese Weise erhalten kann, eine Tatsache dar; aber die Voraussetzung derselben muß als in dem Postulat der Zeitmessung enthalten angesehen werden.

Auf Grund dieses fundamentalen Postulates ist also folgendes möglich:

1. die Gleichheit zweier Intervalle an verschiedenen Orten $A$ und $B$ zu beurteilen;

2. die Gleichzeitigkeit zweier Erscheinungen an verschiedenen Orten zu beurteilen,

vorausgesetzt, daß $A$ und $B$ sich in relativer Ruhe befinden.

Das genügt, *die numerische Darstellung der Zeit, die für einen Ort hergestellt ist, auf jeden anderen zu übertragen, der sich zu A in relativer Ruhe befindet.*

Darin besteht die *Unabhängigkeit der Zeit vom Orte.* Aber es handelt sich um eine *relative Unabhängigkeit.*

Wenn die Lage von $B$ in bezug auf $A$ sich verändert, d. h. wenn die Entfernung $A\,B$ wächst oder abnimmt, so erlaubt das Kriterium der (optischen, elektrischen usw.) Signalisierung nicht mehr die Gleichzeitigkeit der Anfangsmomente festzustellen; wenn man einfach dieses Kriterium anwenden würde, als ob $A$ und $B$ fest wären, so würde sich in der Darstellung der Zeit eine *additive Lokalkonstante* finden, die man nur entdecken könnte durch Anwendung des anderen Kriteriums der Übertragung einer Uhr von $A$ nach $B$.

Aber mehr noch. Unter den angenommenen Umständen würde das Kriterium der Signalisierung nicht einmal hinreichen, die Gleichheit zweier Intervalle an Erscheinungen festzustellen, die sich bzw. in $A$ und in $B$ abspielen; die Zeit wird also auch noch mit einer *multiplikativen Lokalkonstante* behaftet sein.

Kurz *wenn es sich um Orte handelt, die zueinander in relativer Bewegung begriffen sind und es unmöglich ist, eine Uhr vom einen an den anderen zu bringen, so ist die Zeit nur bis auf eine lineare Substitution*

$$\tau = a\,t + b$$

*bestimmt, wo a und b lokale Konstanten sind, die von der relativen Geschwindigkeit abhängen.*

Dieser Gedanke der *Ortszeit* spielt eine wichtige Rolle in der elektromagnetischen Theorie von Lorentz und



in den neuesten Arbeiten Poincarés, auf die wir im Kap. VI zu sprechen kommen werden.

## § 9. Historische Entwickelung und Evidenz der Prinzipien.

In seinem klassischen Werke „Die Mechanik in ihrer Entwickelung“[1]) unterwirft E. Mach die geschichtliche Entwickelung der mechanischen Begriffe und Prinzipien einer gründlichen Untersuchung, indem er die besonderen Probleme anführt und untersucht, aus denen sie entstanden sind und durch die sie ihre bestimmte Form erhalten haben.

Aus dieser Darstellung, auf die wir uns im folgenden mehrfach werden beziehen müssen, geht hervor, daß bis zu einem gewissen Punkte die Gesamtheit der Experimente und Überlegungen, aus denen die *Statik* entstanden ist, sich von denen, die zu der *Dynamik* geführt haben, unterscheiden läßt. Die erste entsteht zum Teil bei den griechischen Mathematikern, vor allem bei Archimedes, und entwickelt sich in der Neuzeit weiter durch Stevin, Varignon, Galilei usw. bis zu Newton. Die zweite ist eine gänzlich moderne Wissenschaft, deren Begründung mit den Namen Galilei, Huyghens und Newton verknüpft ist. Als Übergang von der einen zu der anderen scheint uns der Versuch der *kinematischen Konstruktion* des Descartes Erwähnung zu verdienen.

Die Geschichte des Gedankenfortschrittes liefert uns lehrreiche Einsichten, indem sie uns die stufenweise erweiterte Anwendung der Begriffe zeigt, und indem sie uns ferner zeigt, wie der im besonderen Falle angestellte Versuch der Anlaß wird, daß man Assoziationen der Sinnesdaten erkennt und befestigt, die man zum Teil einer vorangegangenen instinktiven Geistesarbeit der

1) Zitiert auf S. 354.

Koordination der gewohnteren Beobachtungen und Versuche zuschreiben kann. Wenn der menschliche Geist zu einer solchen Erkenntnis gelangt, so hat er den Eindruck, als ob er unabhängig von der Erfahrung eine allgemeine *Entdeckung* macht, die ein anderer als *evidentes Prinzip* annehmen wird.

Man legt heute von verschiedenen Seiten und mit Recht Nachdruck auf diesen Punkt, daß nämlich „die Evidenz der Prinzipien keinen Beweisgrund *a priori* gegen mögliche Erfahrungen abgibt"; und wir haben keinen Grund, auf eine Frage zurückzukommen, die auf dem Gebiete der Geometrie hinreichend erörtert worden ist.

Aber, wie uns scheint, geht man zu weit auf diesem Wege und unterschätzt die Bedeutung der *anschauungsmäßigen Evidenz*, indem man auf die *Irrtümer* hinweist, zu denen sie geführt hat, ohne zu bedenken, daß diese durch eine richtigere *Interpretation* haben verbessert werden können. Mit demselben Rechte könnte man auch das direkte Experiment gering achten, weil es uns nicht vor den Gefahren einer irrtümlichen Deutung bewahrt.

Wenn es nun auch nicht zweifelhaft sein kann, daß die anschauungsmäßige Evidenz in einem etwaigen Konflikt hinter den kritisch gesichteten Aussagen des Experimentes zurückstehen müßte, so möchten wir doch hervorheben, daß in Wirklichkeit solche Konflikte niemals mit einer wirklichen Verwerfung der Anschauung geendet haben, sondern daß diese gezwungen worden ist, ein weiteres Feld von Sinnesdaten zu umfassen und so den scheinbaren Widerspruch zu beseitigen.

Diese Überlegungen passen sehr gut auf den Fall der mechanischen Vorstellungen.

Die Verächter der Anschauung weisen auf den Umstand hin, daß gewisse von uns für evident gehaltene Prinzipien den Ansichten unserer ältesten Vorfahren direkt widersprechen. Kein Argument scheint geeigneter,



die Ansicht als unwiderleglich zu erweisen, nach der die Evidenz nichts mit einer *psychologischen Entwickelung* nach bestimmten Gesetzen zu tun hat, sondern nur auf einer *geschichtlichen Grundlage beruht;* es sei denn, daß man eine Veränderung des menschlichen Geistes annehmen wollte, eine Annahme, bei der zu verweilen, sich nicht der Mühe lohnt.

Ein überzeugendes Beispiel in diesem Sinne scheint das *Trägheitsgesetz* zu bieten, von dem wir hier nur den geometrischen Teil, nämlich „die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes, auf den keine Kräfte wirken", in Betracht ziehen. Wenn, wie heute behauptet wird, dieses Prinzip in einem später genauer anzugebenden Sinne an der Evidenz der *geometrischen Symmetrien* teilhat, wie konnten die Griechen es verkennen? Wie konnten sie auf den Gedanken kommen, daß die *natürlichen* Bewegungen kreisförmig seien?

Nun wohl, der Widerspruch muß dahin gedeutet werden, daß unsere Vorstellung und die der Griechen sich nicht auf denselben „mechanischen Raum" beziehen. In der Reihe der Assoziationen und Abstraktionen, durch die, wie wir sahen, der geometrische Begriff des Raumes sich gebildet hat, war es notwendig, die Dissymmetrien der verschiedenen physiologischen Räume in bezug auf den Beobachter zu eliminieren. Nun wurde in der Geometrie der allgemeine Gesichtspunkt durch die optischen Vorstellungen gewonnen, indem man von der systematischen Dissymmetrie abstrahierte, die die Schwerkraft in die Daten des Tastmuskelsinnes einführt. Aber bei der ergänzenden Entwickelung der Raumvorstellung, bei der die Bewegung auf der Erdoberfläche berücksichtigt wird, kommt durch die Erdrotation eine neue Dissymmetrie hinein, so daß das erste Ergebnis der Abstraktion und Assoziation aus den „physiologischen mechanischen Räumen" eine *geozentrische Vor-*

*stellung* ist. Um diese Stufe zu überwinden und zu dem Grade der Abstraktion vorzudringen, der dem der Geometrie entspricht, muß man sich bei der Betrachtung des Universums von der geozentrischen Auffassung befreien, und es ist allgemein bekannt, wie die Begründer der Dynamik dazu geführt wurden, als die Fortschritte der Astronomie das Kopernikanische System zu bestätigen begannen.

Es ist für unseren Zweck von Nutzen zu bemerken, daß in der geozentrischen Vorstellung der Griechen die Hypothese der Kreisbewegung eine Vereinfachung der astronomischen Tatsachen darstellt, wiewohl man versuchte, sie durch die behauptete *Vornehmheit* des Kreises im Vergleich zu allen anderen Linien zu rechtfertigen!

Demjenigen, der den erfahrungsmäßigen Ursprung der anschauungsmäßigen Erkenntnisse erkannt hat, mag es unsinnig erscheinen, denselben in der Anordnung der Wissenschaft einen gewissermaßen bevorzugten Platz anzuweisen; das Vertrauen, das wir auf sie setzen, mag es auch psychologisch erklärbar sein, wird jedenfalls einen Grund des Mißtrauens abgeben bei der Gegenüberstellung mit den willkürlich weiter verfolgten und mit Bewußtsein kritisierten Experimenten. Aber die Dinge erscheinen unter einem anderen Gesichtspunkt, wenn man bedenkt, daß diese Erfahrungen und diese Kritik, wenigstens in einer ersten Entwickelungsperiode, leicht unvollständig und einseitig bleiben, während die unbewußte Verarbeitung der Sinnesdaten eine größere Mannigfaltigkeit der in verschiedenen Beziehungen wiederholten Vergleichungen aufweist. Daher hat die anschauliche Erkenntnis einen höheren Wahrscheinlichkeitswert als die experimentelle, *falls* alle beide sich *auf die gleiche Art von Relationen beziehen*. Umgekehrt hat bei der Abgrenzung des Anwendungsgebietes und bei



seiner fortschreitenden Erweiterung die willkürliche Erfahrung vor der Anschauung den Vorrang.

Ohne daher zu beanspruchen, daß alle wissenschaftliche Erkenntnis schließlich anschauliche Form annehmen müßte, muß man doch lebhaft wünschen, daß die experimentellen Fortschritte eine entsprechende Weiterentwickelung der anschaulichen Vorstellungen veranlaßt, so daß durch sie die neuen Tatsachen mit der großen Masse der älteren anschaulichen Erkenntnisse mit Hilfe erweiterter Begriffe vereinigt werden. Diese Vereinigung bietet eine Gewähr dafür, daß sich in den verschiedenen Teilen unseres Wissens keine Widersprüche finden, denn gewisse Assoziationen und Abstraktionen, die tatsächlich stattgefunden haben, wären dadurch verhindert worden.

Diese Überlegungen lassen uns erkennen, daß der in der Geschichte der Mechanik mehrmals wiederholte Versuch, diese Wissenschaft auf evidente Prinzipien zu begründen, nicht unangebracht ist.

Man täte nur unrecht, diese Evidenz zu übertreiben, sei es, indem man sie als Notwendigkeit a priori auf Grund von metaphysischen Argumenten auslegt, sei es, indem man sie über ihr eigentliches Gebiet hinaus anwendet.

Der erwähnte Versuch führt vor allem dazu, eine *erste Art von Prinzipien* herauszuheben, *die sich als die angenommene Grundlage einer abstrakten Darstellung der mechanischen Daten herausstellen, in der diese den Begriffen von Zeit und Raum untergeordnet* werden, und daraus gerade ihre *Evidenz* ziehen.

Aber diese evidenten Postulate, die die Voraussetzungen der Statik und der Kinematik darstellen, genügen nicht zur Begründung der Dynamik. Man muß vielmehr noch Hypothesen *hinzufügen*, die direkt durch Experimente nahe gelegt werden und die zwar mit einigen anschaulichen Vorstellungen zusammenhängen, im ganzen aber

*nichts Evidentes* an sich haben. Hier erklärt sich vor allem das, was an unserer wissenschaftlichen Konstruktion willkürlich ist, aus der *geschichtlichen Entwickelung*. Demgegenüber gestattet die *psychologische Erklärung der geschichtlichen Entwickelung* nicht, eine indifferente Determination der ersten Prinzipien anzunehmen, ob sie sich gleich teilweise und allmählich beim Studium spezieller Probleme enthüllt haben.

## § 10. Die Grundbegriffe.

Die Entwickelung der Mechanik beleuchtet neben den Begriffen des Raumes und der Zeit die Grundbegriffe: *materieller Punkt, Kraft, Bewegung, Masse und Verbindung*.

Die genannten Begriffe treten im allgemeinen in Verbindung mit gewissen Vorstellungen auf, und wenn man das subjektive Element eliminiert, so bleibt eine Gesamtheit von Beziehungen, die sich als *implizite Annahmen* herausstellen. Die Prinzipien der Mechanik im eigentlichen Sinne stellen zwischen den Begriffen Relationen her, die die *expliziten Hypothesen der Mechanik* darstellen.

Diese Relationen erlauben formal einige jener Begriffe durch die übrigen zu definieren. Diese Reduktion wird von einigen so weit getrieben, daß sie zu einer *nominalistischen Deutung* der Mechanik führt.

## § 11. Mathematischer Nominalismus.

Die Tendenz zum Nominalismus, die heute auf allen Gebieten der theoretischen Physik herrscht, verdient eine gesonderte Betrachtung.

Diese Tendenz stellt in gewissem Sinne die Gefahr dar, die mit den Vorteilen einer immer weiter ausgedehnten Anwendung der Mathematik verbunden ist.



Ihre bestimmende Ursache ist im besonderen eine unberechtigte Anwendung der formalen Kriterien der Kritik, die einen *falschen Begriff von wissenschaftlicher Strenge* zu erzeugen scheint.

Die *physikalische Strenge* erfordert, daß die Erkenntnisse auf eine möglichst große Zahl von Tatsachen gestützt werden, die ihrerseits durch möglichst mannigfache Proben kontrolliert werden, und daß die festgestellten Relationen immer von einem Verzeichnis von experimentellen Daten begleitet sind, aus dem man den *Genauigkeitsgrad* entnehmen kann, mit welchem man sie für gesichert halten darf.

Eine mathematische Darstellung der physischen Wirklichkeit, die diesen Erfordernissen genügte, würde durch eine *Approximationsanalyse* geliefert werden, wie sie Gegenstand der interessanten Überlegungen Robins war. Aber im allgemeinen erweist es sich als nützlich, ja zuweilen kann man sogar sagen als notwendig, rascher zu einer vorläufigen Abstraktion von einer gewissen Gruppe von empirischen Daten vorzugehen, indem man diejenigen Relationen als *Postulate* ausspricht, von denen man annimmt, daß sie in ihrer einfachen und genauen Form *den wesentlichen Teil* der wirklichen Beziehungen ausdrücken, so daß man die aus den kleinen vernachlässigten Abweichungen entstehenden Fehler auf die ganze Theorie wirft.

Eine so gebildete Theorie kann eine wohldefinierte begriffliche Form annehmen, so daß in ihr die deduktive Entwickelung streng vor sich geht, ohne den Inhalt der Hypothesen zu verändern. Aber verglichen mit der Wirklichkeit, liefert diese Theorie immer nur eine angenäherte Darstellung; die Postulate sind mit einem Fehler behaftet, den nur neue Beobachtungen und Versuche korrigieren können, indem sie die angenommenen Hypothesen modifizieren.

Die Strenge erfordert nun, daß diese Fehler in jedem Stadium der wissenschaftlichen Entwickelung möglichst genau abgeschätzt werden, indem man eine Grenze für sie angibt, aber vor allem dürfen sie nicht verborgen werden, darf die formale Geschlossenheit der Theorie nicht über den approximativen Charakter der in ihr enthaltenen Erkenntnisse hinwegtäuschen.

Ist es möglich, daß ein logischer Fortschritt in der Kritik der Definitionen und Postulate diese Fehler beseitigt oder vermindert?

Die Frage selbst muß demjenigen sinnlos erscheinen, der die Bedeutung der vollzogenen Abstraktion begriffen hat. Sie hat uns gestattet, das Problem in zwei Teile zu spalten, einen nach Voraussetzung einfachen und einen anderen, der zwar unbegrenzt kompliziert ist, der aber auf die wirkliche Voraussage einen verhältnismäßig geringen Einfluß ausübt. Es bleibt demnach dem Theoretiker volle Freiheit, die hypothetischen Voraussetzungen gemäß seinen Zwecken der mathematischen Behandlung umzuformen, nur darf er nicht den Anspruch erheben, damit der Theorie größere physikalische Strenge zu verleihen.

Immerhin kann er die Zahl der Postulate, die diese Voraussetzungen ausdrücken, vermindern; und das ist sehr leicht. Jene Postulate stellen sich nämlich dar unter der allgemeinen Form von Gleichungen zwischen Größen, die man sich durch gewisse Messungsmethoden definiert denkt. Es wird also genügen, eine derartige Gleichung als *Definition* einer dieser Größen an Stelle der entsprechenden Messung anzunehmen. Dadurch wird an die Stelle einer Reihe von notwendig ungenauen Versuchen ein Akt freier Konvention gesetzt, der einen genauen logischen Sinn hat. Damit ist also aus der Theorie eine Fehlerquelle beseitigt, weil die Tatsache selbst, auf die der Fehler sich bezog, eliminiert ist.



Ein derartiges Verfahren kann im Hinblick auf spezielle Zwecke in manchen Fällen gerechtfertigt werden. Z. B. wenn es sich darum handelt, festzustellen, welche Änderungen man in einem System von Hypothesen, denen man eine gewisse Rangordnung zuschreibt, einführen muß, wenn eine bestimmte *Form* als Grundvoraussetzung angenommen wird, von der man glaubt, daß sie einen genaueren Inhalt aufzunehmen imstande ist. Dadurch erhält man ein Verfahren der Diskrimination der vorausgesetzten Tatsachen, durch das eine Theorie entsteht, die um so weniger ausdrückt, je schmiegsamer sie ist.

Aber auch im eingeschränkten Sinne kann man eine vollkommene Theorie nie erreichen!

Man versuche nämlich einmal, alle Postulate in einfache Definitionen umzuwandeln. Dann ist zwar jeder Irrtum ausgeschaltet, aber auch jede wirkliche Erkenntnis; die absolute Strenge der so rein formal konstruierten Theorie reduziert sich auf eine Sinnlosigkeit!

Es ist auch nicht einmal anzunehmen, daß der mathematische Theoretiker aus einer solchen Umformung irgendeinen Vorteil ziehen könnte.

Für ihn gab es nur Gleichungen, die nach den genauen Regeln der Analysis analytisch zu behandeln waren. Nur wußte er, daß diese Gleichungen unvollkommen verifizierte Hypothesen darstellten, und es gelang ihm, diese Unvollkommenheit vor seinen eigenen Augen zu verbergen. Die Freiheit seiner mathematischen Ableitungen bleibt, wie vorher, theoretisch uneingeschränkt; aber er hat sich eines Gesichtspunktes beraubt, der ihm vorschrieb, wie er seine Untersuchungen einem physikalischen Zweck anpassen konnte.

Die Nachteile eines solchen Verfahrens erscheinen schwerwiegender, wenn man auf die Vergleichung von Theorie und Erfahrung bei den Verifikationen und kon-

kreten Anwendungen sieht. Mangels einer vorangehenden Kritik dessen, was die Theorie wirklich bedeuten will, läuft man Gefahr, ein Maß von *praktischer Strenge* anzunehmen, das zu der ängstlichen theoretischen Genauigkeit in scharfem Gegensatz steht, indem man nämlich die Größen, die in der Rechnung als irgendwie experimentell bestimmt erscheinen, ohne Vergleichung einsetzt; und schließlich, indem man die theoretische Konstruktion auf verschiedene nicht streng voneinander getrennte Arten deutet, je nach den Tatsachen, die man im Augenblick rechtfertigen will.

Ist es dieses Ergebnis, das diejenigen erreichen wollen, die eine absolute Strenge erstreben?

Gewiß nicht! Aber sie scheinen sich nicht bewußt zu sein, daß dies die unvermeidliche Folge des Nominalismus ist, zu dem eine unvollständige Ansicht von der Wissenschaft und ein transzendentaler Anspruch führen.

Gemäß der vorstehenden Kritik wollen wir nunmehr die Grundbegriffe der Mechanik analysieren, indem wir die verschiedenen in ihnen enthaltenen impliziten und expliziten Hypothesen herausstellen, und zwar besonders die ersteren, die häufig in der psychologischen Entwickelung dieser Begriffe als Bedingungen für die Verbindung der empirischen Daten zu abstrakten Vorstellungen erscheinen.

## § 12. Der Massenpunkt.

Obgleich die in der Statik zuerst wirklich behandelten Probleme verhältnismäßig kompliziertere *Systeme*, wie den *Hebel*, die *Rolle*, die *schiefe Ebene* betreffen, so erscheint es doch, wenn man die weiteren Entwickelungen betrachtet, angebracht, das Studium der Mechanik mit den *„Massenpunkten"* als einfachstem Falle zu beginnen.



Eine derartige Fiktion wird vollständig gerechtfertigt als Anwendung der Mittel für die Vereinfachung der wissenschaftlichen Forschung, die P. Volkmann als Prinzipien der *Isolierung* und der *Superposition* der in der Erscheinung auftretenden Umstände charakterisiert. Es ist deshalb wichtig, sich einen Augenblick bei der Aufklärung des Begriffes „Massenpunkt" aufzuhalten.

Vorher wollen wir jedoch darauf aufmerksam machen, daß man diese Fiktion entbehren kann. G. A. Maggi hat nämlich in seinen „Principii della teoria matematica del movimento dei corpi"[1]) gezeigt, daß man die ganze Mechanik der ausgedehnten Körper begründen kann, ohne den Körper als ein System von Punkten aufzufassen.

Dieses Ergebnis, das von philosophischem und mathematischem Interesse ist, mußte angeführt werden, obwohl es uns aus verschiedenen Gesichtspunkten angebracht erscheint, der Vorstellung des Massenpunktes eine Stelle einzuräumen, und zwar vor allem aus folgenden Gründen:

1. Für viele Überlegungen kann ein Körper als „Punkt" angesehen werden, indem man einen Fehler macht, der unterhalb der Grenze der in Betracht kommenden *physikalischen Genauigkeit* bleibt; und wie weit auch immer diese Grenze vorgeschoben werden mag, es wird doch immer Körper geben, die in bezug auf irgendwelche Erscheinungen ohne merklichen Fehler als „Punkte" werden betrachtet werden können. In solchen Fällen erscheint die Forderung, den unmerklichen Fehler zu beseitigen, indem man sich nach einem *mathematischen* Kriterium der Genauigkeit richtet, wenig am Platze, wenn sie, wie hier, zu einer komplizierteren Darstellung führt.

1) Mailand, 1896.

2. Die Darstellung der Körper, als aus Elementen oder „Massenpunkten" gebildet, ist in der theoretischen Physik von so ausgedehnter Anwendung, daß man nicht ohne Opfer darauf verzichten kann.

Aber die Schwierigkeiten, die in dem Begriffe des „Massenpunktes" liegen, dürfen nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Unter welchen Bedingungen ist es zulässig, einen Körper als Massenpunkt zu behandeln?

Die erste Bedingung, die man gewöhnlich im Auge hat, ist, daß seine Dimensionen *hinreichend klein sind gegen die, deren Beziehungen man betrachtet.* Auf Grund hiervon kann ein Sandkorn beim Studium der Bewegung auf der Erde ebensogut wie bei den himmlischen Bewegungen ein Stern als Punkt betrachtet werden.

Aber zu dieser Bedingung kommt eine andere hinzu, nämlich, *daß die Stellung des um einen seiner Punkte beweglich gedachten Körpers für die betrachteten Erscheinungen indifferent ist.* Deshalb kann eine kleine Quelle polarisierten Lichtes, die einem Flächenelement angepaßt werden kann, in bezug auf optische Erscheinungen nicht als Punkt betrachtet werden.

Wir werden die Bedeutung dieser Betrachtungen für die Kritik einiger Grundbegriffe später einsehen.

Wir werden nunmehr so vorgehen, daß wir nacheinander erst die *Statik* und dann die *Dynamik des Punktes* behandeln, um dann zu den *Systemen* überzugehen.

## § 13. Die Kraft.

„Die Kraft ist die Ursache oder die Wirkung der Bewegung."

Diejenigen, die diesem Urteil die Bedeutung einer *Definition der Kraft* zuschreiben, sind verantwortlich für die Begriffsverwirrung, auf Grund deren viele den Kraftbegriff für einen *metaphysischen* im schlechtesten



Sinne des Wortes halten, in dem es so viel wie „sinnlos" bedeutet.

Die Aussage nämlich, daß etwas die Ursache von etwas anderem ist, hat gar keinen Sinn, wenn es sich nicht darum handelt, die Verknüpfung einer gesetzmäßigen Sukzession zu erkennen zwischen zwei Erscheinungen, die als solche schon durch Wahrnehmungen definiert sind.

Die Existenz einer *Kraft* ist eine *physikalische Tatsache,* die durch *Empfindungen der Anstrengung oder des Druckes* festgestellt wird. Unter diesem Gesichtspunkt hat die Kraft nichts Geheimnisvolles oder Metaphysisches, oder wenigstens nicht mehr als die Bewegung oder irgendeine andere Erscheinung, deren Realdefinition in letzter Linie immer in einer Gruppe von Empfindungen besteht, die sich unter gewissen willkürlich hergestellten Bedingungen einstellen.

Wenn diejenigen, die den Kraftbegriff aus der Mechanik verbannen wollen, diese Absicht bis zu einem gewissen Grade mit dem Zweck rechtfertigen können, die ersten Daten der Wissenschaft von der Bewegung möglichst einzuschränken, so sind sie doch durch nichts zu der Behauptung berechtigt, daß dieser Begriff weniger leicht denkbar sei als irgendein anderer geometrischer oder kinematischer, oder daß seine *Erklärung* größere Schwierigkeiten machte. Denn ein physikalischer Begriff wird immer dadurch erklärt, daß man seinen Wahrnehmungsgehalt aufzeigt.

Jedenfalls sind die Versuche, den Kraftbegriff zu eliminieren, ein Ausfluß des Bestrebens, an Stelle der *muskularen Erklärung* der Erscheinungen eine *optische* zu setzen, sei es in einem allgemeinen Sinne durch die Annahme von fiktiven Dingen (vgl. Kap. VI), sei es innerhalb des engumschriebenen Gebietes der Himmelsmechanik, wo die Erscheinungen sich unmittelbar dem Gesichtssinn darbieten.

Auf diesem Gebiete erscheinen allerdings die muskularen Daten als eine Annahme, die so mancher verspottet, indem er den anthropomorphen Charakter der NEWTONschen Anziehungskraft hervorhebt; setzt vielleicht die Anziehung zwischen Erde und Mond und zwischen Erde und Sonne Muskelempfindungen bei diesen Körpern voraus?

Aber wenn man den Scherz beiseite läßt, so wird man nichts Lächerliches in der Annahme finden, daß ein auf der Erde befindlicher Mensch Muskelempfindungen verspürt, die der Anziehung des Mondes oder der Sonne entsprechen; die erste zeigt sich uns in den Gezeiten und die zweite kann durch feine Versuche in einer Modifikation der Schwerkraft nachgewiesen werden. Es findet nämlich eine Lotablenkung statt, die in den 24 Stunden bis auf 2″ steigt und welche kürzlich von S. NEWCOMB und v. STERNECK gemessen und in Übereinstimmung mit der theoretischen Voraussage als Wirkung der Sonnenanziehung nachgewiesen wurde. Es ist zu beachten, daß die Annahme von Muskelempfindungen auch für einen außerhalb der Erde befindlichen Menschen ihren Sinn behält, wenn sie auch praktisch nicht verifizierbar ist.

Jedenfalls kann man eine astronomische Dynamik aufstellen, die auf die Daten des Gesichtssinnes beschränkt ist, und aus der der Kraftbegriff verbannt ist. Es genügt dazu, (mit MACH) das NEWTONsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung als eine Beziehung zwischen den *Beschleunigungen* der bewegten Massenpunkte zu betrachten, in die gewisse Koeffizienten eingehen (die *Massen*).

Aber wenn es auch interessant sein mag, auf diese Weise eine kinematische Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper zu erhalten, die von der Statik unabhängig ist, so darf man sich doch nicht über den ziemlich begrenzten Wert derselben täuschen, und besonders



nicht darüber, daß sie eine Theorie der Gravitation liefert, in welcher der Fall der Körper auf der Erde von dem Gewicht getrennt wird und wo z. B. die verifikatorischen Experimente von CAWENDISH keine Stelle finden würden.

Was soll man von einer Ansicht sagen, die unsere Kenntnisse derart verstümmelt?

Nun muß man allerdings darauf aufmerksam machen, daß die oben wiedergegebene Betrachtung MACHS nicht darauf hinausläuft, den Begriff der Kraft systematisch durch eine Nominaldefinition zu ersetzen, indem man sie als das Produkt einer Masse in eine Beschleunigung ansieht. In diesem Sinne verfährt vielmehr die KIRCHHOFFsche Konstruktion der Mechanik. Und hier drückt die so eingeführte Kraft z. B. in der Elastizitätslehre nicht mehr den Wahrnehmungsgehalt dessen aus, was wir auf diesem Gebiete als „Spannung" darstellen.

Während hinsichtlich der Astronomie die optische Behandlung der Mechanik unter einem gewissen Gesichtspunkt gerechtfertigt werden konnte, so hat die Ausdehnung dieses Verfahrens auf eine allgemeine Mechanik überhaupt keine Grundlage, wenn man die die Kraft betreffenden Vorurteile und jene Gründe beseitigt, welche den mathematischen Nominalismus zwar erklären, aber nicht wirklich annehmbar machen (vgl. § 11).

Die vorstehenden Betrachtungen veranlassen uns, den Begriff der Kraft als einen Grundbegriff der Mechanik anzusehen.

Der anfängliche Sinn der *Kraft* wird bestimmt durch die *möglichen Muskelempfindungen* der Anstrengung und des Drucks *in einem gegebenen Bezugsystem und unter gewissen Bedingungen.*

Dieser Sinn wird präzisiert durch Anwendung von geeigneten Instrumenten und *erweitert* durch die Annahme, die sich an den Begriff des *Kraftfeldes* knüpft.

Ein Kraftfeld wird als *gegeben* angesehen (in bezug auf gegebene Körper und Erscheinungen, die es definieren), wenn man als möglich voraussetzt, in jedem Punkte des Feldes die Kraft zu bestimmen, die auf einen dorthin gebrachten Massenpunkt wirkt.

Es ist nun nötig, den Kraftbegriff näher zu bestimmen durch Analyse der damit verknüpften *Wahrnehmungsdaten.*

## § 14. Geometrische Daten der Kraft.

Die Empfindungen, die zu einer Kraft gehören, bestimmen:

1. eine *Richtung* und einen *Angriffspunkt*, d. h. einen *Strahl;*
2. eine *intensive Größe*, um deren genauere Bestimmung es sich handelt.

Dazu bedürfen wir vor allem des Begriffs von *„gleichen Kräften*, die verschieden gerichtet sind und an verschiedenen Punkten angreifen".

Die Vorstellung hiervon liefert uns zuerst, wenn auch wenig genau, die Vergleichung der Anstrengungs- und Druckempfindungen, die wir in verschiedenen Lagen empfinden können. Das Gleichheitsurteil zwischen zwei Kräften, das sie gestattet, wird ein genaueres durch Verbindung dieser Empfindungen mit physikalischen Daten, wie z. B. der Spannung oder der Zusammendrückung einer Feder oder eines elastischen Fadens usw., vorausgesetzt, daß diese Spannungen und Drucke, die mit gewissen beweglichen Körpern verbunden sind, merklich zwei Grundeigenschaften besitzen:

1. sich unverändert zu wiederholen (abgesehen von besonderen Komplikationen), wenn der Körper die ursprüngliche Form und Lage wieder annimmt;
2. übereinzustimmen für jede Lage der Körper, an die sie geknüpft werden, wenn sie dies für irgendeine tun.



Das Verfahren, durch das so die Vorstellung von „gleichen Kräften" eingeführt wird, läuft übrigens parallel demjenigen, durch das in der Geometrie der Begriff der gleichen Figuren eingeführt wird, mit Hilfe der Bewegung starrer Körper, die gewissen Bedingungen der Invarianz in bezug auf das Tastorgan genügt.

Es ist nun zu bemerken, daß jede auf der Erde gegebene Kraft durch eine gleiche ersetzt werden kann mittels eines über eine Rolle geführten Fadens und eines daran aufgehängten Gewichtes; diese Ersetzung bietet den Vorteil einer leichten und einfachen Fixierung der Kräfte und liefert ein einfaches konkretes Bild der zu der Kraft gehörigen Elemente.

In der Tat waren die durch Gewichte erzeugten Kräfte die ersten, auf die die Begründer der Statik sich bezogen; als jedoch die fortgeschrittenen Bedürfnisse der Technik und die Entwickelung der Wissenschaft die Aufmerksamkeit auf andere Kräfte lenkten, erhielten die aufgestellten Prinzipien eine natürliche unmittelbare Erweiterung ihres Anwendungsgebietes.

Aus dem oben beschriebenen Bilde kann man die *Messung* einer Kraft und damit die Bestimmung ihres intensiven Bestandteiles durch eine Zahl oder eine Strecke ableiten.

Es genügt dazu nämlich, die Spannungen zu betrachten, die durch einen Faden ausgeübt werden, an dem man 1, 2, 3 ... *gleiche Gewichte* aufgehängt hat, indem man berücksichtigt, daß, wie man auch immer eine solche Messung der Kräfte (durch verschiedene schwere Massen usw.) vornimmt, man immer findet, daß „gleiche Vielfache von gleichen Kräften gleich sind".

Die Versuche, die so das *(statische)* Maß der Kraft liefern, bilden einen Spezialfall von allgemeineren Versuchen, die man sich auch abseits der Erde ausgeführt denken kann.

„Mehrere Kräfte, die in derselben Richtung auf einen Massenpunkt wirken, können in bezug auf alle ihre Wirkungen (der Spannung, des Drucks usw.) durch eine einzige Kraft ersetzt werden, die man ihre *Summe* nennt." Und wenn man verlangt, daß die *statische Summe* von mehreren gleichgerichteten Kräften durch ihre *geometrische Summe* dargestellt wird, so folgt daraus, daß (abgesehen von einem von der Maßeinheit abhängigen Faktor) jeder Kraft eine nach Größe und Lage wohldefinierte *gerichtete Strecke* entspricht.

## § 15. Prinzipien der statischen Symmetrie.

Eine fortgeschrittene Idealisation liefert schon, wie wir gesehen haben, ein einfaches *geometrisches Bild* der auf einen Massenpunkt wirkenden Kraft. Nun folgen die ersten Prinzipien der Statik aus diesem Bilde mit solcher Evidenz, daß es einer Anstrengung bedarf, um in ihnen mehr als eine geometrische Erkenntnis zu sehen.

Es handelt sich um gewisse *Symmetrien* der im *Gleichgewicht befindlichen Kräfte*, die vor der Behandlung der ersten Probleme der Statik wie etwas bereits Bekanntes implizite angewandt werden:

1. Gleiche und entgegengesetzte Kräfte, die auf einen Punkt $o$ wirken, halten sich das Gleichgewicht, und umgekehrt.
2. Wenn ein Massenpunkt $A$ auf einen anderen Massenpunkt $B$ eine Kraft ausübt, so wirkt diese in der Geraden $A\,B$ und der Punkt $B$ übt auf $A$ eine gleiche und entgegengesetzte Kraft aus *(Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung)*.

Es ist dabei zu bemerken, daß diese Prinzipien leichten und alltäglichen Versuchen entsprechen, die sich allerdings (bei dem zweiten) auf den Fall von Zug durch Fäden oder Druck durch feste Körper beziehen.



Aber wenn wir uns von dem Grunde, auf dem sie beruhen, Rechenschaft zu geben suchen, so erhebt sich der Gedanke, daß sie nach dem Prinzip des zureichenden Grundes aus der Symmetrie der sie darstellenden Figuren folgen; nämlich im ersten Fall aus der Symmetrie in bezug auf die in $o$ auf den beiden Kräften senkrecht stehende Ebene, im zweiten aus der Symmetrie des Raumes in bezug auf die Strecke $A\,B$ und ihren Mittelpunkt (Unabhängigkeit von Drehungen um die Gerade $A\,B$ und Umkehrbarkeit der Strecke).

Es wäre eine Täuschung, wenn man glaubte, hieraus einen *geometrischen Beweis* dieser statischen Prinzipien ableiten zu können. Obgleich die Beobachtungen und Experimente über die Kräfte und das Gleichgewicht sehr nahe mit denen verwandt sind, aus denen die Geometrie entsteht, so erfordern sie doch in Wirklichkeit etwas, das in der Vorstellung des physikalischen Raumes nicht notwendig enthalten ist. Immerhin ist der Inhalt dieser Vorstellung dehnbar und die vorstehenden Betrachtungen zeigen, daß er so erweitert werden kann, daß er auch die in Rede stehenden statischen Daten umfaßt.

Mit anderen Worten: die statischen Symmetrieprinzipien drücken bereits aus, daß „die geometrischen Bilder (die gerichteten Strecken) den Vorstellungen der Kräfte in bezug auf das Gleichgewicht adäquat sind". In dieser Form erscheint ihr Inhalt als eine *Bedingung der Möglichkeit* dieser Darstellung, an die sich ihre Evidenz knüpft.

## § 16. Zusammensetzung der Kräfte.

Die Summe zweier gleichgerichteter Kräfte ist nur ein Fall der „*Zusammensetzung der Kräfte*".

Ihr allgemeines Prinzip läßt sich in zwei Teile spalten, einen statischen und einen dynamischen:

1. Bei den Gleichgewichtserscheinungen können mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte durch eine einzige wohldefinierte Kraft (die *Resultante*) ersetzt werden, die *dem ganzen System äquivalent* ist.
2. Statisch äquivalente Systeme, die auf einen Punkt wirken, sind auch hinsichtlich ihrer dynamischen Wirkungen (Bewegungen) äquivalent.

Dieses letztere Postulat, das für die Dynamik der Systeme von D'ALEMBERT erkannt worden ist, stellt auch schon im Falle des einzelnen Punktes eine Annahme dar, die die Kritik untersuchen muß, die aber über das eigentliche Gebiet der Statik hinausgeht.

Die Entdeckung des Prinzips der Zusammensetzung der Kräfte ergab sich historisch auf induktivem Wege aus Einzelfällen: STEVIN gelangte dazu auf Grund der Zusammensetzung aufeinander senkrecht stehender Kräfte, die er indirekt erkannte. Später, d. h. nach den dynamischen Konstruktionen des GALILEI und NEWTON, gelang es VARIGNON die Zusammensetzung der Kräfte aus derjenigen der Bewegungen abzuleiten, indem er die Statik als Spezialfall der Dynamik behandelte.

Auf beiden Wegen wurde es in seiner konkreten Form *(Kräfteparallelogramm)* erkannt, und erst nach seiner Entdeckung kamen D. BERNOULLI und FONCENEX auf den Gedanken, es aus dem abstrakten Prinzip der Existenz der Resultante und den Symmetrieprinzipien abzuleiten. Diese Methode wurde von D'ALEMBERT und POISSON vervollkommnet und in unseren Tagen von BATTAGLINI, GENOCCHI, DARBOUX, SIACCI, ANDRADE in mannigfachen interessanten Untersuchungen wieder aufgenommen.

MACH bemerkt, daß es sich hier *nicht* um einen *geometrischen Beweis* handelt. Indem wir mit ihm in diesem Punkte übereinstimmen, können wir doch die Meinung nicht teilen, daß diese Art das Problem zu



behandeln als ein historischer und psychologischer Unsinn zu verwerfen sei. Wenn es auch Tatsache ist, daß die konkrete Regel der Zusammensetzung zweier Kräfte früher gefunden wurde und sich aus leichten Versuchen ergibt, so scheint uns doch anderseits, daß die stillschweigende Annahme der *Existenz einer Resultante* den Untersuchungen, die zu ihrer Bestimmung führen, als leitender Gedanke zugrunde liegen muß. Eine elementare Beobachtung zeigt uns nämlich tagtäglich, daß, wenn ein Punkt an mehreren Fäden gezogen wird, man, um Gleichgewicht herzustellen, auf ihn einen Zug in einer ganz bestimmten Richtung ausüben muß, genau als wenn der Punkt in der entgegengesetzten Richtung an einem einzigen Faden gezogen würde. Hier haben wir nun ein sehr einfaches Experiment, das in einem gewissen Sinne verglichen mit der quantitativen Bestimmung der Resultante als qualitativ betrachtet werden kann, und dem wir folglich eine größere Beweiskraft zuzuschreiben geneigt sind.

Man nimmt als physikalische Voraussetzung das *Postulat* an, daß „ein System von zusammenwirkenden Kräften statisch einer einzigen wohldefinierten Kraft (der *Resultante*) äquivalent ist". Um diese Kraft zu bestimmen, muß man folgendes wissen:

1. Die Resultante kann bestimmt werden, indem man einige der sie zusammensetzenden Kräfte durch ein äquivalentes System ersetzt *(assoziative und kommutative Eigenschaft)*.
2. Geometrisch gleiche Kräftesysteme sind äquivalent und ergeben daher gleiche Resultanten.

Diese Prinzipien stellen ebensoviele physikalische Annahmen dar, aber sie stützen sich ebenso wie die Prinzipien der Symmetrie, deren Verwendung darauf beruht, auf die allgemeine Annahme, daß „die Kräfte in allen statischen Beziehungen durch ihre geometrischen

Bilder adäquat dargestellt werden". Dies ist auch der Grund ihrer Evidenz, die also eine erweiterte Koordination der verschiedenen Sinnesdaten in sich schließt.

Nicht mit Unrecht beruhigt sich unseres Erachtens der Verstand bei dieser Evidenz, denn sie schließt die Möglichkeit aus, die Experimente, welche das Prinzip bestätigen, zu korrigieren, ohne die allgemeine Ansicht von den statischen Beziehungen, welche durch Vergleichung von bewußten und unbewußten Beobachtungen und Experimenten entstanden ist, von Grund aus umzustürzen.

## § 17. Begründung der Dynamik.

Die geschichtliche Entwickelung der Dynamik von GALILEI zu HUYGHENS und NEWTON läuft im wesentlichen auf zwei allgemeine Prinzipien hinaus: die Bewegungsgleichung eines Punktes und das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Versuchen wir uns Rechenschaft zu geben, in welcher Weise und in welchem Sinne diese Prinzipien in dem System NEWTONS bestimmt werden, und welche Hypothesen implizite in den durch sie verbundenen Begriffen liegen.

Die Bewegungsgleichung eines Punktes, die in den ersten beiden Gesetzen NEWTONS enthalten ist, drückt aus, daß die Kräfte den *Massen* und den durch sie hervorgerufenen Beschleunigungen proportional und mit diesen gleichgerichtet sind. Die vektorielle Formel lautet

$$f = m\,w.$$

Dadurch wird der kausale Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung, den die elementarsten Experimente erkennen lassen, quantitativ bestimmt, und es erscheint dabei ein Koeffizient $m$, der von dem Punkte abhängt.

Es ist gut, sich die Schwierigkeiten klar zu machen, die überwunden werden mußten, um zu der obenstehenden Formel zu gelangen.



Wir bemerken vor allem, daß die Kräfte, die im allgemeinen durch die Muskeln oder durch Spannen einer Feder erzeugt werden, wenn ihnen durch einen Widerstand das Gleichgewicht gehalten wird, von sehr kurzer Dauer sind und sich in einen *Impuls* umsetzen, der direkt durch die *Geschwindigkeit* des geworfenen Körpers gemessen wird.

Wenn es sich hingegen um eine dauernd wirkende Kraft handelt, z. B. um die Schwerkraft, so vollzieht sich ihre sinnliche Feststellung als Muskeleffekt in verschiedener Weise, für einen bewegten Körper, je nach der Geschwindigkeit, mit der die Hand ihn begleitet und die Bewegung aufhält. Dazu kommt noch der Einfluß der Reibung beim Zug auf der Erde, durch die die anziehende Kraft der Geschwindigkeit der Bewegung merklich proportional erscheint.

Aus alledem geht hervor, daß der erste Gedanke, den ein roher Empirismus eingeben mußte, auf das aristotelische Prinzip der Proportionalität von Kraft und Geschwindigkeit führen mußte. Erst eine eindringende Analyse konnte zu der Entdeckung führen, daß die Kräfte nicht mit der Geschwindigkeit, sondern mit den von ihnen hervorgerufenen *Beschleunigungen* zusammenhängen.

Wie ist nun diese Verbesserung zustande gekommen?

Hier liegt ein historisches Problem vor, das einer genaueren Untersuchung bedarf. Hat GALILEI die Falschheit des aristotelischen Prinzips erkannt? Gewiß wird wenigstens in den Untersuchungen über den Fall der schweren Körper eine Kraft (die Schwerkraft) als *unabhängig von der Bewegung* betrachtet und erkannt, daß sie der Beschleunigung proportional ist.

Aber die Frage, mit der die Entwickelung des Kraftbegriffes selbst zusammenhängt, wird klar, wenn man sich an den Streit zwischen den Schulen des DESCARTES

und des LEIBNIZ erinnert über die Frage, „ob die Geschwindigkeit $v$ oder ihr Quadrat als Maß der auf einen beweglichen Punkt wirkenden Kraft genommen werden muß".

Wir wissen heute, daß die Proportion des DESCARTES besteht, wenn man konstante Kräfte ($f$) betrachtet, die während einer gewissen Zeit ($t$) wirken, und die von LEIBNIZ, wenn man sich auf Kräfte bezieht, die auf einem gewissen Wege ($s$) des bewegten Punktes wirken. Die Größen

$$f t = m v$$

und

$$f s = m v^2$$

haben bzw. die Bezeichnungen „*Bewegungsgröße*" und „*lebendige Kraft*" erhalten; die erste mißt den *Impuls* der Kraft, die zweite die dem Körper zugeführte *kinetische Energie* ($2E$) oder die geleistete *Arbeit*.

Wenn man die erste der obigen Gleichungen differenziert, so erhält man die NEWTONsche Fundamentalgleichung

$$f = m\frac{dv}{dt} = m w;$$

wenn man die zweite Gleichung differenziert, so erhält man eine andere Gleichung

$$f = \frac{dE}{ds},$$

die gleichfalls ein dynamisches Maß der Kraft liefert und als Ausgangspunkt für eine *energetische Dynamik* dienen könnte.

Die Fundamentalgleichung der Bewegung eines Massenpunktes

$$f = m w$$

faßt eine Reihe von Tatsachen zusammen, die ihr ihren eigentlichen physikalischen Sinn verleihen.

Dieser Sinn muß durch eine geeignete Interpretation bestimmt werden, für die folgendes erforderlich ist:



1. das Bezugsystem zu fixieren, in bezug auf das die Bewegung und die Kraft definiert sind;
2. den Koeffizienten $m$ (die Masse) physikalisch zu definieren.

GALILEI hatte bei der Untersuchung der Schwerkraft als Bezugsystem „die Erde" und als Maß der Masse „das Gewicht" genommen. NEWTON mußte, als er auf das Gebiet der Astronomie überging, diese Begriffe modifizieren, und suchte ihnen eine absolut allgemeine Grundlage zu geben, indem er zum Bezugsystem einen *absolut ruhenden Raum* und als Masse eine Zahl wählte, die dem Körper unabhängig von allen anderen zukommen sollte (das Produkt von Volumen und *Dichte*). Doch ergänzte er die mangelhafte Definition dieser Zahl durch Übertragung des *Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung* aus der Statik in die Dynamik, indem er darin eine „*Beziehung zwischen den Beschleunigungen*" der in Bewegung befindlichen Punkte erblickte.

Eine transzendente Ansicht beherrschte den systematischen Begründer der Dynamik und ließ ihn Definitionen und Prinzipien in einer Form aufstellen, durch die sie streng genommen jede Bedeutung verlieren.

Aber es erhebt sich aus dem Werk NEWTONS eine neue Systematisierung der Prinzipien, wenn man versucht, durch eine geeignete Kritik die Voraussetzungen herauszuziehen, die in dem positiven Ausbau der Lehre enthalten sind, soweit er als allgemeiner Besitz bis auf unsere Tage unbestritten ist.

Eine solche Kritik wollen wir in den folgenden Paragraphen vornehmen, indem wir nacheinander folgende Punkte diskutieren:

1. die Arten, die Bewegung zu bestimmen, die NEWTON als eine absolute dachte und von der die dynamischen Gesetze gelten;

2. die Masse, die damit zusammenhängenden Postulate und ihre Beziehung zu dem NEWTONschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.
3. das Grundgesetz der Bewegung eines Massenpunktes und speziell zwei Annahmen, die sich in ihm überlagert haben und von denen in der NEWTONschen Formulierung eine Spur übrig geblieben ist.

Endlich werden wir aus dieser Prüfung einige Schlüsse über die Prinzipien der Dynamik ziehen.

## § 18. Bewegung.

Der geometrische Begriff der Bewegung ist offenbar relativ.

Wenn eine Menge von Körpern gegeben ist, so sagt man, daß sie sich gegeneinander bewegen, wenn ihre gegenseitigen Entfernungen sich mit der Zeit verändern. Eine solche in bezug auf die verschiedenen Körper völlig symmetrische Definition erlaubt uns auf keine Weise zu unterscheiden, welche von den Körpern sich *wirklich* bewegen und welche in *Ruhe* bleiben. Ja, die unterstrichenen Worte bleiben ohne Sinn, wenn man sich nicht auf irgend etwas anderes bezieht.

Die Auswahl eines Körpers von unveränderlicher Form, den man als ruhend betrachten will, bedeutet also die Auswahl eines *Bezugsystems*, das vom geometrischen oder kinematischen Gesichtspunkt offenbar konventionell und willkürlich ist. Die *Wahrnehmung der Bewegung* eines beliebigen Gegenstandes entspricht zunächst einer persönlichen Auswahl dieses Bezugsystems: die Lageveränderungen der Gegenstände werden auf uns selbst bezogen. Man würde über diese physiologische Auffassung der Bewegung nicht hinausgehen, wenn der Anblick der Erscheinungen sich nicht in Übereinstimmung mit derjenigen Wahrnehmung änderte, die wir *Bewegung unserer selbst* nennen.



Durch Assoziation und Abstraktion aus den verschiedenen physiologischen Vorstellungen von der Bewegung ergibt sich die physikalische, bei der die Erde als Bezugsystem angenommen wird. Und diese Wahl drängt sich für das Studium der irdischen Erscheinungen jedem auf.

Wieviel Zeit mußte vergehen, bis der Mensch zu der Erkenntnis der Relativität in der Astronomie gelangte!

Und welch ein harter Kampf gegen eine in den Hirnen eingewurzelte Überzeugung, die man aus Mangel an Gründen mit Gewalt aufrechtzuerhalten suchte!

Schließlich hat aber doch die genauere Betrachtung der Bewegungen innerhalb des Sonnensystems allen die Wahl eines bequemeren Bezugsystems, nämlich der Sonne anstatt der Erde, aufgedrängt.

Und dennoch bewegt sich auch die Sonne selbst, und zwar außer in einer Rotation um sich selber in einer translatorischen Bewegung in bezug auf die Gesamtheit der entfernten Sterne.

Welcher von diesen soll nun als ruhend betrachtet werden, da sie doch ihre gegenseitige Lage verändern, wie aus der Vergleichung mit den ältesten astronomischen Beobachtungen und aus den neuesten spektroskopischen Untersuchungen nach dem DOPPLERschen Prinzip hervorgeht?

In Ermangelung eines Systems von Körpern, das vernünftigerweise allen anderen als Bezugsystem vorgezogen werden könnte, hat man der *absoluten Bewegung* eine von den Körpern unabhängige Bedeutung zuschreiben wollen; indem man sich den Raum als ein unveränderliches Bezugsystem dachte, sah man in der Bewegung eine Veränderung der Lage der Körper *in bezug auf diesen Raum*. Dies ist die von NEWTON angenommene transzendentale Auffassung.

Jedenfalls haben wir nicht nötig sie zu widerlegen, da wir in Kap. IV gesehen haben, daß es keinen Gegenstand gibt, der dem Worte „Raum" entspräche.

Anderseits könnte angesichts der Fortschritte, die der kritische Gedanke seither gemacht hat, kein moderner Philosoph der in der obigen Weise definierten absoluten Bewegung eine Bedeutung zuschreiben.

Aber diese Definition kehrt in einer neuen Form wieder, wenn man (wie z. B. VOLKMANN) einen *Äther* postuliert, der das Weltall erfüllt, und in bezug auf den die Bewegung betrachtet wird. Wohlgemerkt muß man sich die Teile dieses Äthers in ihrer Lage zueinander unveränderlich denken.

Kann die Postulierung des Äthers auf diese Weise der absoluten Bewegung einen positiven Sinn verleihen?

Die Antwort erfordert die Diskussion einiger Tatsachenfragen. Es leuchtet ein, daß das Wort „Äther", das an die Stelle von „leerer Raum" gesetzt wird, nicht mehr besagt. Aber anders läge der Fall, wenn man annähme, daß der Äther die Bewegung der Materie durch Reibung verlangsamte, wenn man also im wesentlichen an Stelle des Trägheitsgesetzes ein Gesetz postulierte, wonach die Körper sich einem Grenzzustand relativer Ruhe näherten. Dann würde man diesen Grenzzustand als Bezugsystem nehmen, auf das die als absolut betrachtete Bewegung bezogen würde.

Jedoch dieser Hypothese fehlt es an einer tatsächlichen Unterlage.

Plausibler erscheint es, die „Bewegung in bezug auf den Äther" als „Bewegung relativ zum Licht oder zu anderen elektromagnetischen Erscheinungen" zu betrachten, indem man an ein Tatsachengebiet anknüpft, zu dem die *astronomische Aberration* gehört.

Wir behalten uns vor, im Kap. VI auf die Fragen zurückzukommen, die sich hier ergeben; aber vorläufig



wollen wir schon sagen, daß diese Aberration und die verwandten Erscheinungen nicht mehr erkennen lassen als die *Bewegung der Körper gegeneinander.*

Kehren wir also zur relativen Bewegung der Körper zurück.

Da man durch Vergleichung der einzelnen Körper nichts Festes finden kann, so liegt der Gedanke nahe, *aus ihrer Gesamtheit etwas Festes* abzuleiten. So bietet sich z. B. im Planetensystem ohne Willkür die Wahl des *Schwerpunktes* als festen Beziehungspunktes dar.

Man hat jedoch (bei der angenommenen Unendlichkeit des astronomischen Universums) Gründe zu der Annahme, daß *ein Schwerpunkt des Systems aller Himmelskörper* nicht existiert, d. h. ein Grenzpunkt der Schwerpunkte der verschiedenen Teilsysteme, der *von der Anordnung* der verschiedenen Körper *unabhängig* ist.

Wenn uns nun auch das astronomische Universum keine *Punkte* liefert, die wir vernünftigerweise als *fest* ansehen können, so führt uns doch eine einfache Beobachtung zur Bestimmung von *Richtungen, die in bezug auf die Gesamtheit der Körper fest oder beinahe fest sind.*

Die Beobachtung, auf die wir anspielten, ist die folgende:

Während der Fortschritt der optischen Hilfsmittel uns *immer weiter entfernte* Sterne entdecken läßt, *übersteigen* ihre *relativen Geschwindigkeiten*, soweit man aus den Veränderungen der Sehstrahlenwinkel und aus dem DOPPLERschen Prinzip schließen kann, *nicht gewisse* vergleichsweise niedrige *Grenzen.*

Erteilt man nun dieser Beobachtung den Wert eines allgemeinen *Postulates*, so folgt, daß *die Geraden, die entfernte Massenpunkte* (Sterne) *miteinander verbinden, mit dem Wachsen dieser Entfernung Richtungen sich nähern, die relativ zueinander unverändert bleiben.*

Da diese Grenzrichtungen als *astronomisch fest* betrachtet werden müssen, wird es nunmehr natürlich erscheinen, daß sie ein ideales Bezugsystem für die Gesamtheit der Himmelskörper bilden. Da in Wirklichkeit diese Grenze unerreichbar ist, so müssen wir, um genau zu sein, sagen, daß das astronomische Weltall unter Annahme des obigen Postulates uns ein System von Richtungen liefert, die um so *fester* sind, in je größere Entfernungen es der Beobachtung zu dringen gelingt.

Die praktische Bedeutung dieser Bestimmung geht aus der Tatsache hervor, daß die Sehstrahlen, die von der Erde zu allen eigentlichen Sternen führen, bereits Richtungen ergeben, deren Winkel sich erst *innerhalb von Jahren* merklich ändern, und die deshalb ein Bezugsystem liefern, das für die gewöhnlichen Bedürfnisse genügt. Eine fortschreitende Korrektur kann, wenn nötig, durch Vergleichung der Winkelvariationen hergestellt werden, indem man die nächsten Sterne, deren Orientierung schneller als die der anderen sich verändert, ausschaltet.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Newtonschen Gesetze der Dynamik andererseits dazu führen, die oben definierten Richtungen wiederzufinden. Und eine solche Erkenntnis wiegt reichlich die unglückliche Ausdrucksweise Newtons auf, durch die der Begriff der absoluten Bewegung als a priori gegeben eingeführt wurde.

Wie wir sagten, wurde die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes zuerst implizite von Galilei im Falle der Schwerkraft und *auf die Erde bezogen* betrachtet. Aber die Heranziehung astronomischer Daten führt zu einer Korrektion dieser Gleichung, indem sie zeigt, daß sie genauer wird, wenn man sie auf die Richtungen der Sterne bezieht. Wenn man nun heute der von Newton stillschweigend gemachten Annahme der absoluten Bewegung einen positiven Sinn beilegen will, so muß man, scheint es, das folgende *Postulat* aufstellen:



*Die Gesetze der Dynamik gelten um so genauer, je genauer das System, auf das sie bezogen werden, mit den astronomisch festen Richtungen übereinstimmt.*

Dank der dynamischen Gesetze kann man den „festen Richtungen" einen anderen Sinn beilegen, der nicht mehr direkt von der Astronomie abhängt und doch noch immer *relativ* ist. Das kann man machen, indem man die Bewegung eines Massenpunktes oder die eines *starren Körpers* betrachtet; in diesem Falle erlaubt die Dynamik, gewisse *feste Achsen und Ebenen* festzulegen, d. h. Achsen und Ebenen, die *mit den* analog in bezug auf *einen anderen bewegten Körper* definierten *konstante Winkel* bilden.

Es ist wichtig, noch genauer einzusehen, daß bei allen diesen Bestimmungen nur Richtungen oder Stellungen von invariablen Ebenen und *nichts weiter* vorkommen.

Zu diesem Zweck gehen wir von dem Newtonschen Bewegungsgesetz aus und teilen *die Bezugsysteme in zwei Kategorien:*

1. Systeme, in bezug auf die dieses Gesetz gilt;
2. Systeme, in bezug auf die die Bewegungsgleichung eine andere und kompliziertere ist.

Ein beliebiges System aus der ersten Kategorie ($\alpha$) kann *durch Konvention* als *fest* bezeichnet werden, und man kann von *Bewegung* (wenn man es vorzieht, auch von *absoluter*) in bezug auf $\alpha$ sprechen. Aber es handelt sich darum, zu sehen, was in dieser Verabredung *willkürlich* ist, d. h. in welcher Weise die Systeme der ersten Kategorie sich gegeneinander bewegen können.

Zu diesem Ende nehmen wir unter Aufrechterhaltung unserer Verabredung an, daß wir uns in einem geschlossenen Käfig $P$ befinden, der sich irgendwie in den Himmelsräumen bewegt; es ist die Frage, ob und welche geeigneten Experimente über die Bewegung der Körper innerhalb $P$ uns über die Bewegung des Käfigs in bezug

auf $\alpha$ Aufschluß geben könnten. Wir denken uns, daß wir Instrumente bei uns haben, mit denen wir das Innere von $P$ erforschen, die auf einen sich darin bewegenden Massenpunkt wirkenden Kräfte direkt und indirekt messen können, usw.

Im allgemeinen nimmt man an, daß durch diese Erforschung die Kräfte innerhalb $P$ als *absolute Kräfte* bestimmt werden, d. h. unabhängig von der Bewegung von $P$, und dann führt eine mathematische Untersuchung der Frage zu folgendem Resultat:

Die Bewegung des Systems $P$ in bezug auf $\alpha$ kann durch Versuche innerhalb $P$ bis auf eine *gleichförmige Translation* bestimmt werden.

D. h. die Bezugsysteme der ersten Kategorie, in bezug auf die die dynamischen Gesetze gelten, sind in relativer Ruhe oder besitzen gegeneinander eine *gleichförmige Translation.*

*Dieser Schluß ist falsch, weil alle innerhalb P möglichen Experimente, durch die Kräfte bestimmt werden, in ihrer Bedeutung teilweise von der Bewegung von P abhängen.*

Es ist nötig, die Bedeutung dieser unserer Kritik ausführlicher zu erklären.

In jeder sinnlichen Feststellung einer Kraft tritt entweder die Kraft auf relativ zu dem System, dem das als fest betrachtete Instrument angehört, oder die Differenz zwischen den Kräften, die an den verschiedenen Punkten des erreichbaren Feldes wirken. Eine Kraft, die auf alle Punkte eines Feldes gleichmäßig, mit derselben Intensität und Richtung wirkt, kann nicht konstatiert werden und kann, wenn man von den umgebenden Körpern absieht, als nicht vorhanden betrachtet werden.

Allerdings fühlen wir den Stoß einer Lokomotive, wenn wir uns auf ihr befinden, aber das rührt daher,



daß die neue Kraft, die sich der Bewegung entgegensetzt, nur auf das Material wirkt, das uns trägt, und nicht auf unsere eigene Person.

Desgleichen konstatieren wir die Schwerkraft, die in gleicher Weise auf die auf der Erde befindlichen Körper wirkt; aber diese Konstatierung wird nur möglich dank dem Widerstande der Erde selbst, die, durch die Unterstützung der unteren Schichten am Fallen gehindert, sich so verhält, als ob auf sie dieselbe Kraft nicht wirkte.

Befänden wir uns jedoch in einem zu Boden fallenden Käfig, so würden wir die Empfindung des Fehlens der gewohnten Schwerkraft verspüren; aber unsere Situation wäre während des Falles derjenigen eines Menschen völlig ähnlich, der sich in einem Käfig außerhalb der Sphäre der irdischen Gravitation befände; erst der Zusammenstoß mit der Erde würde den Zweifel des hypothetischen himmlischen Reisenden, der die Bewegung seines Gefängnisses zu erforschen versuchte, mit einem Schlage schrecklich zerstören.

Wenn wir demnach in einem Käfig $P$ bleiben, so sagen uns die Versuche innerhalb desselben gar nichts über die Translationsbewegung von $P$ in bezug auf das als ruhend angenommene System $\alpha$ der ersten Kategorie.

Die Sache verhält sich anders mit den Rotationen von $P$.

Wenn nämlich $P$ um eine Achse rotiert, so können wir innerhalb des Feldes entgegen dem fundamentalen Postulat der Newtonschen Mechanik, das wir im § 22 prüfen werden, scheinbare Kräfte konstatieren, die nicht von der Lage allein abhängen und die auf die bewegten Körper wirken; sie entsprechen den *zusammengesetzten Zentrifugalkräften* im Theorem des Coriolis. In einer praktisch einfacheren, aber wesentlich äquivalenten Weise können wir die Rotationsbewegung von $P$ durch

Versuche über die Bewegung der starren Körper erkennen, wir werden z. B. konstatieren, daß die permanenten Achsen verschiedener Kreisel ihre Richtung gleichmäßig ändern, indem sie konstante Winkel miteinander bilden, und daß man einer Kraft bedarf, um sie abzulenken. Demnach ist das positive Ergebnis unserer Untersuchung das folgende:

Der Begriff der auf ein Bezugsystem bezogenen *relativen Kraft* gestattet *durch innere Versuche*, die den Prinzipien der Dynamik gemäß gedeutet werden, *die Bewegung* des Systems in bezug auf $\alpha$ *nur bis auf eine beliebige Translation zu bestimmen.*

Mit anderen Worten: die Systeme der ersten Kategorie, in bezug auf die die dynamischen Gesetze gelten, befinden sich nicht notwendig in relativer Ruhe, sondern können sich gegeneinander mit einer *beliebigen Translationsbewegung (gleichförmiger* oder *ungleichförmiger)* bewegen.

Eine Illustration des Gesagten ergibt sich aus den Versuchen, durch die man *auf der Erde* beweist, daß sie *sich um sich selbst dreht:* nämlich das Foucaultsche Pendel und die östliche Ablenkung der fallenden Körper, die auf Grund des Coriolisschen Satzes vorausgesehen und von Tadini (1796) und noch vollkommener von Reich (1831) konstatiert wurde.

Die *Tatsache*, die in der Behauptung „die Erde dreht sich", abgesehen von der Vergleichung mit den Sternen enthalten ist, ist also die folgende: Wenn man die Bewegungserscheinungen auf der Erde mit hinreichender Genauigkeit analysiert, so findet man darin dieselben charakteristischen Umstände, die sich bei einer oberflächlichen Betrachtung, bei den Bewegungserscheinungen auf einem rotierenden Körper, z. B. einem einen Kreis beschreibenden Schiffe usw., zeigen.

Die Behauptung, daß die Erde sich um die Sonne dreht, hat theoretisch eine ähnliche Bedeutung. Aber



es scheint, daß die oben erwähnten Versuche sich nicht hinreichend genau anstellen lassen, um die Umstände, um die es sich hier handelt, zur Erscheinung zu bringen. Wenn man jedoch die Bewegung des Mondes um die Erde mit dem Fall eines schweren Körpers vergleicht, so sind die Störungen dieser Bewegung in einem ähnlichen Sinne zu deuten, wie die Versuche von Tadini und Reich.

Einen indirekten Beweis der Bewegung der Erde um die Sonne kann man auch auf der Erde aus den Versuchen entnehmen, die die tägliche Variation der Schwerkraft zeigen (vgl. § 13).

Die angestellte Untersuchung läßt erkennen, daß der dynamische Begriff der von Newton als absolut betrachteten Bewegung implizite eine Tatsache einschließt, nämlich die Übereinstimmung der verschiedenen Methoden, ein System von Richtungen zu bestimmen, die untereinander unveränderliche Winkel bilden.

Die Untersuchung des besagten Begriffs muß vor allen Dingen diese Tatsache klarmachen. Dies geschieht, wenn man als Bezugsrichtungen die *astronomisch festen Richtungen* nimmt und dann (in dem Trägheitsgesetz usw.) die relative Ruhe anderer durch die Bewegung der Körper und der gegebenen Bedingungen definierter Richtungen postuliert.

Man kommt so zu dem Vorschlag von Mach, der seinerzeit bei den am meisten positivistisch gerichteten Gelehrten großen Anklang gefunden hat.

Wenn wir in dem folgenden Paragraphen von „Bewegung" sprechen, so werden wir an diese astronomische Bestimmung des Bezugssystems denken; aber wir werden Gelegenheit nehmen, zu bemerken, daß es möglich ist, einen *allgemeineren Teil der Dynamik, der dem Trägheitsgesetz vorhergeht, abzuspalten, der gilt, wenn man Kräfte*

*und Bewegungen in bezug auf ein beliebiges System betrachtet.*

## § 19. Masse.

Wenn man die Umstände, die die Bewegung der Körper bestimmen, untersuchen will, so bietet sich die natürliche Unterscheidung dar zwischen denjenigen Eigenschaften, die in bezug auf den beweglichen Körper *innere* Eigenschaften sind, und den *äußeren* Beziehungen zu anderen Körpern usw.

Dieser Unterschied tritt ziemlich deutlich hervor in den ersten Fällen, wo es sich um eine Bewegung handelt, die durch Muskelkraft oder durch den Zug eines elastischen Fadens usw. hervorgerufen wird. Es findet dann eine gegenseitige Unabhängigkeit statt zwischen zwei bestimmenden Elementen, die sich in der Erscheinung überlagern, nämlich demjenigen, welches wir als Muskelkraft usw. (die Kraft) messen, und demjenigen, das wir dem bewegten Körper zuschreiben, nämlich sein *Gewicht* oder seine *Masse*.

Gewicht und Masse erscheinen zuerst als genau dasselbe Ding; aber MACH zeigt scharfsinnig, wie sie unterschieden werden können durch einen Versuch, bei dem zwei an einer Rolle aufgehängte Gewichte ein System des indifferenten Gleichgewichts bilden, das dennoch nicht in Bewegung gesetzt werden kann ohne Anwendung einer Kraft, die der Summe der beiden Gewichte proportional ist.

NEWTON, der in der *Masse* etwas vom Gewichte Verschiedenes erkannt hatte, gelangt dazu, sie als *Quantität der Materie* vorzustellen und ihren Begriff durch seine Definitio I zu erklären: „Quantitas materiae est mensura eiusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim." Diese Definition wird im allgemeinen verworfen, weil sie an Stelle der Masse



einen neuen, nicht definierten Begriff, die Dichte, einführt, der ebenso dunkel ist wie derjenige, den man erklären will.

Es ist jedoch ungerecht anzunehmen, daß deshalb die NEWTONsche Definition gänzlich bedeutungslos wäre. Die in ihr enthaltene Vorstellung kann nämlich als eine Gesamtheit von definitorischen Bedingungen gedeutet werden, die dazu dienen, eine *additive Größe* zu charakterisieren, die in bezug auf eine gewisse *Gruppe von physikalischen Transformationen* der Körper (Bewegungen, Kompressionen und Dilatationen) *invariant* ist. Wir wollen versuchen, dieses zu erklären.

Wir beginnen damit, zu bemerken, daß die Vergleichung der Körper uns dazu führt, sie uns mit Hilfe abstrakter Begriffe vorzustellen, in bezug auf die wir von *physikalisch gleichen* und folglich von *homogenen* Körpern sprechen können. In dieser Abstraktion liegt die Erkenntnis, daß die als „gleich" bezeichneten Körper füreinander in den verschiedenen Arten von Erscheinungen (physikalischen, chemischen usw.) *substituiert* werden können. Nun kann man von dem allgemeinen Begriff der physikalischen Gleichheit zu weiteren Abstraktionen vorschreiten, die sich auf gewisse Erscheinungsarten beziehen; Körper, die in bezug auf diese füreinander gesetzt werden können, werden eine allgemeinere Gleichheit in bezug aufeinander besitzen, oder sie werden, wenn man lieber will, gewisse *gleiche Eigenschaften* besitzen.

Eine allgemeine Methode, ähnliche Abstraktionsprozesse zu vollziehen, besteht in der Betrachtung von *Gruppen von Operationen oder Transformationen* (physikalischen, chemischen usw.), *durch die gewisse ungleiche Körper gleich gemacht werden können.*

Die Abstraktion führt dann zur Definition einer „Gleichheitsbeziehung", die die Eigenschaften der Tran-

sitivität und Symmetrie besitzt (Kap. III § 14), sofern es sich um eine *Gruppe* von Transformationen in dem besonderen Sinne des Wortes „Gruppe" handelt, den die Mathematiker demselben beilegen. Das heißt:

a) wenn die Operationen *A* und *B* der Gruppe angehören, so gehört ihr auch diejenige Operation an, die aus der sukzessiven Zusammensetzung der beiden entsteht (ihr *Produkt*);

b) wenn *A* der Gruppe angehört, so gehört ihr auch die *umgekehrte* Operation an.

Die einfachste Gruppe von Transformationen der Körper ist die *Gruppe der Bewegungen*, und es liegt im Begriff der physikalischen Gleichheit, daß sie von den Bewegungen nicht aufgehoben wird. Das wird ausgedrückt, indem man sagt, daß jede physikalische Gleichheit in bezug auf die genannte Gruppe invariant ist.

Eine andere einfache Gruppe von physikalischen Operationen besteht in dem Teilen und Wiederzusammensetzen der Teile eines Körpers auf verschiedene Weise; diese Gruppe führt zu einer allgemeineren *physikalischen Gleichheit, die von der geometrischen Form absieht.*

Dann kommt die Betrachtung der *Gruppe G*, die aus *Bewegungen, Teilungen und Zusammensetzungen, Kompressionen und Dilatationen* der Körper besteht.

Die Newtonsche Vorstellung der Masse als „Quantität der Materie" führt zu dem Versuch, für jeden Körper eine *positive Zahl* mit folgenden Eigenschaften zu definieren.

1. Sie hat denselben Wert für alle Körper, die durch Transformationen der Gruppe *G* aufeinander zurückgeführt werden können;

2. sie ist in bezug auf die Summe zweier Körper *additiv* oder distributiv, so daß, „wenn man zwei Körper vereinigt, die Masse des neuen Körpers gleich der Summe der Massen der Komponenten



ist". Dies wird dadurch ausgedrückt, daß man sagt: die Masse wird definiert als *eine additive Größe, die in bezug auf die Gruppe G invariant ist. Die Existenz einer solchen Invariante* schließt die Annahme einer Tatsache ein, die postuliert werden muß.

Die Notwendigkeit dieses Postulats ergibt sich aus der Beobachtung, daß die engere Gruppe, die aus den Bewegungen, Teilungen und Zusammensetzungen besteht, eine und nur eine additive Invariante, „*das Volumen*", zuläßt.

Das hier notwendige Postulat kann man am einfachsten ausdrücken, wenn man sich auf homogene Körper bezieht:

Seien *A* und *B* zwei physikalisch gleiche homogene Körper, und man vollziehe an *B* Teilungen, Zusammensetzungen, Kompressionen und Dilatationen; wenn man nach einem beliebigen Zyklus von Operationen zu einem homogenen Körper gelangt, dessen Teile denen von *A* gleich sind, so hat dieser Körper dasselbe Volumen wie *A*.

Beschränken wir uns einen Augenblick auf die Betrachtung einer Gesamtheit von Körpern, deren Teile durch Transformationen der Gruppe *G* einander gleich gemacht werden können. Man kann dann einen homogenen Bezugskörper *A* wählen und für jeden seiner Teile *die Masse dem Volumen proportional* setzen und demnach die *Dichte* eines Elementarkörpers *B* (der als homogen betrachtet wird), definieren als das umgekehrte Verhältnis seines Volumens zu demjenigen eines Elementes, das durch Transformation einem Teile von *A* gleich gemacht worden ist. Dann ergibt sich die Definition der Masse nach Newton als *Produkt von Volumen und Dichte.*

Das Abstraktionsverfahren, das gemäß der Newtonschen Vorstellung zur Definition der Masse führt, ist, wie wir sahen, nicht auf die Gesamtheit aller Körper

anwendbar, sondern nur auf eine beschränkte Gesamtheit derjenigen Körper, die innerhalb der Gruppe $G$ aufeinander reduzierbar sind.

Aber *diese Gruppe G kann erweitert werden*, wenn man auf Grund der *atomistischen* Vorstellung sich die *chemisch reduzierbaren* Körper als durch gedachte Teilungen und Zusammensetzung (Kompressionen und Dilatationen) ihrer Teile erhalten denkt. Und die derart erweiterte Gruppe $G$ läßt noch immer die additive Invariante zu, die für die engere Gruppe definiert wurde, da das oben ausgesprochene Postulat auch in der erweiterten Fassung gilt.

Dies ist gerade die Entdeckung LAVOISIERS, dessen *Prinzip der Erhaltung der Materie* folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

Seien $A$ und $B$ zwei homogene, physikalisch gleiche Körper, und auf $B$ sollen innere physikalisch-chemische Transformationen angewandt werden; wenn man dann nach einem Zyklus von Transformationen zu einem homogenen Körper gelangt, dessen Teile denen von $A$ gleich sind, so nimmt dieser Körper dasselbe Volumen wie $A$ an.

Man kann daher voraussetzen, daß die Masse für ein System von chemisch aufeinander zurückführbaren Körpern als eine *Größe* definiert ist, *die additiv und in bezug auf die physikalisch-chemischen Transformationen invariant ist.*

Diese Definition entspricht in der atomistischen Theorie der *Zahl der Elementarteilchen* der Körper.

Nun könnte man die vorstehende Definition der Masse auf alle Körper ausdehnen, wenn es erlaubt wäre, die Hypothese der *Einheit der Materie* anzunehmen, deren positiver Sinn in folgendem besteht:

1. in der Möglichkeit, die Gruppe der physikalisch chemischen Transformationen zu erweitern, indem man *hyperchemische* Transformationen in Betracht zieht, in bezug auf die alle Qualitäten der Materie aufeinander reduzierbar sein würden.
2. In der Ausdehnung des LAVOISIERschen Prinzips auf diese hyperchemischen Transformationen.



Die Frage der hyperchemischen Transformationen steht heute neuerdings auf der Tagesordnung, seit es RAMSAY gelungen ist, aus der Emanation des *Radiums* das *Helium* zu gewinnen, und er diesen Versuch als eine Transformation gedeutet hat, durch die das Atom reduziert wird. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß der Fortschritt der Wissenschaft der auf die Hypothese der Einheit der Materie gegründeten Definition der Masse einen positiven Sinn beilegt, abgesehen von der Schwierigkeit, auf diese Weise die Massen praktisch zu vergleichen.

Wenn man von den problematischen hyperchemischen Transformationen absieht, so enden die chemischen Transformationen bei irreduzibeln Qualitäten der Materie, mit anderen Worten, um uns in mathematischer Sprache auszudrücken, bilden sie eine in bezug auf das System der Körper *intransitive Gruppe*. Es ist daher von Wichtigkeit einzusehen, daß die additive Invariante in bezug auf diese Gruppe nicht genügt, um die Masse eines Körpers mit genügender Bestimmtheit zu definieren.

Betrachten wir nämlich die chemischen Elemente, die wir mit

$$A_1\ A_2 \ldots$$

bezeichnen wollen. Zu jedem von ihnen gehört eine additive Invariante bzw.

$$m_1\ m_2 \ldots,$$

die einen nach Belieben zu bestimmenden Proportionalitätsfaktor enthalten, der von der Maßeinheit abhängt. Nun stellt ein beliebiger Ausdruck von der Form

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots$$

eine additive Invariante für die Körper, die aus

$$A_1 + A_2 + \cdots$$

zusammengesetzt sind, in bezug auf die Gruppe der physikalisch-chemischen Transformationen dar.

Der betrachtete Ausdruck enthält ferner alle möglichen additiven Invarianten; die Masse geht in ihn demnach entsprechend einer besonderen Bestimmung der Konstanten $a_1\ a_2 \ldots$ ein; aber gerade diese Bestimmung wird durch die chemischen Transformationen nicht geliefert, und neben der Masse treten auch von ihr unter diesem Gesichtspunkte ununterscheidbar andere additive Invarianten auf, von denen einige eine besondere Bedeutung haben und daher in der Chemie und Physik betrachtet werden, z. B. die volumetrischen Eigenschaften in bezug auf den sog. absoluten Nullpunkt, gewisse optische kalorimetrische usw. Eigenschaften.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, daß diejenigen Betrachtungen und Vorstellungen, mit deren Hilfe man versucht, die Masse eines Körpers als eine *innere* Eigenschaft zu definieren, d. h. unabhängig von dem Einfluß, den äußere Körper auf ihre Bewegung ausüben können, nur zu einer unvollkommenen Bestimmung dieser Eigenschaft führen.

Nichtsdestoweniger ergibt die angestellte Untersuchung das folgende Resultat:

Es gibt eine Klasse von Bewegungserscheinungen (die durch Muskelkraft, durch elastischen Druck usw. hervorgerufen werden), welche sich in gleicher Weise vollziehen, wenn man den bewegten Körper, der als Massenpunkt betrachtet wird, durch einen anderen Körper (Punkt) ersetzt, der auf jenen chemisch reduzierbar und von *gleicher Masse* ist, während die Einsetzung *ungleicher Massen* die Erscheinung verändern würde.

Wir können schematisch diese Fälle der Bewegung als solche bezeichnen, in denen die *Bewegung von dem*



*physikalisch-chemischen Zustand des bewegten Körpers unabhängig ist*, indem wir uns vorbehalten, die Erkenntnis dieser Unabhängigkeit später auf die Erforschung des Kraftfeldes zurückzuführen, in dem sich die Bewegung vollzieht.

Wenn man nun annimmt, daß die Klasse dieser Bewegungen direkt definiert sei, so kann man als „gleich" die Masse derjenigen chemisch aufeinander zurückführbaren Körper definieren, die bei diesen Bewegungen *durcheinander ersetzt werden* können.

Und das wichtige ist, daß *diese Definition* auch *auf den Fall beliebiger Körper ausgedehnt* werden kann, weil das *Postulat der Masse gilt*, das folgenden Inhalt hat: Wenn die Bewegung eines materiellen Punktes $A$ von den physikalisch-chemischen Bedingungen des bewegten Körpers unabhängig ist, so kann man, ohne die Bewegung zu verändern, den Körper $A$ durch einen anderen aus anderem Stoffe gebildeten ersetzen, wobei die Menge dieses Körpers in einem bestimmten quantitativen Verhältnis zu $A$ steht.

Auf Grund dieses Postulats kann man als *gleich* die *Massen* zweier chemisch nicht aufeinander zurückführbaren Körper definieren, wenn dieselben in bezug auf die betrachteten Bewegungen durcheinander ersetzt werden können. So gelangt man zu der *allgemeinen Definition der Masse*, aus der die Willkür verschwindet, die noch in ihr übrig blieb.

Das Postulat der Masse behauptet im wesentlichen „die Unabhängigkeit der Bewegung von der Qualität der bewegten Materie". Aber diese Unabhängigkeit hängt von den Bedingungen ab, die in der Aussage berücksichtigt worden sind, und die man auf Grund der folgenden Betrachtungen deutlicher bestimmen kann.

Wenn wir uns die Kräfte vorstellen, die in jedem Augenblick auf die bewegten Körper wirken, so können

wir annehmen, daß dieselben von der Qualität der Materie dieser Körper oder von ihrem physikalischen Zustand abhängen; aber wir nehmen an, daß die sich ergebende Bewegung von der Qualität der Materie unabhängig ist, soweit sie die betrachteten Kräfte nicht modifiziert.

Dieses Kriterium macht die Anwendung unseres Postulats der Ersetzbarkeit genauer. Es wird z. B. ein Punkt $A$ von einem elastischen Faden gezogen. In diesem Falle hängt die Kraft nicht von der Natur von $A$ ab. Man muß daher annehmen, daß auch die sich ergebende Bewegung dieselbe ist, wenn man für $A$ einen anderen materiellen Punkt $B$ setzt, sofern die Quantität der Materie in $B$ so genommen wird, daß die Masse derjenigen von $A$ gleich wird. Das Postulat hat nun den Sinn, daß die beiden Massen $A$ und $B$, die in diesem Versuche als gleich erkannt wurden, auch bei einer beliebigen anderen Bewegungserscheinung unter den erwähnten Bedingungen durcheinander ersetzt werden können. Wenn z. B. eine Feder auf $A$ drückt, so hängt auch hier die Kraft nicht von der Natur von $A$ ab. Demnach muß sich die Bewegung von $A$ ebenso vollziehen wie die von $B$, wenn man diesen Körper (an Stelle von $A$) dem Druck derselben Feder aussetzt.

Wenn dagegen $A$ eine elektrisierte Kugel in der Nachbarschaft einer anderen ähnlichen Kugel ist, so wirkt auf $A$ eine Kraft, die vom Zustande dieses Körpers abhängt. In diesem Falle wird also die Ersetzung von $A$ durch $B$ die Kraft und folglich auch die entsprechende Bewegung verändern.

## § 20. Das Postulat der Masse und das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Aus der vorstehenden Untersuchung ergeben sich zwei Wege, um durch Abstraktion zu einer Definition



der Masse zu gelangen, indem man die „Gleichheit der Massen" definiert:

1. Entweder geht man aus von der Betrachtung derjenigen Eigenschaften des bewegten Körpers, die wir in einem relativen Sinne als *innere* bezeichnet haben, d. h. die nicht von den *äußeren* die Bewegung bestimmenden Umständen abhängen;
2. oder man betrachtet die verschiedenen möglichen Substitutionen der bewegten Körper unter verschiedenen Bedingungen, indem man also irgendwie eine *äußere Definition* der Masse sucht.

Der erste Weg führt nicht zu einer völlig bestimmten Definition. Er läßt jedoch eine wichtige Tatsache erkennen, nämlich eine *Beziehung zwischen den physikalisch-chemischen Transformationen der Materie und dem Gesetz der Bewegung.*

Der zweite Weg, zu dem man, um die Definition der Masse zu vervollständigen, auf jeden Fall seine Zuflucht nehmen muß, führt zur Erkenntnis einer allgemeinen Tatsache, die in der Übereinstimmung zwischen den Substitutionen gleicher Massen in der Bewegung besteht. Diese Tatsache, die das genannte Postulat der Masse bildet, kann als in der Gleichung der Bewegung enthalten angesehen werden, wenn man die Betrachtung der Kräfte voranstellt; man kann sie jedoch auch von einem anderen Gesichtspunkte aus untersuchen, indem man von den Kräften absieht und versucht, das daraus zu beseitigen, was für die Definition der Massengleichheit überflüssig ist. Dazu ist folgendes erforderlich:

1. die Aufmerksamkeit auf eine gewisse Art von Bewegungserscheinungen zu richten und mit Hilfe eines grundlegenden Experimentes die *gleichen Elementarmassen zu definieren*;
2. die Ersetzbarkeit gleicher Massen in andersartigen Erscheinungen unter den erforderlichen Bedingungen zu *postulieren*.

Diese Untersuchung führt zur Herstellung einer Beziehung zwischen dem Massenbegriff und dem Newtonschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Um die „Massengleichheit" zu definieren, liegt es ziemlich nahe, die Körper in grundlegenden Versuchen zu vergleichen, in denen sie nur paarweise auftreten, wobei man von einem Paar annimmt, daß es von dem Einfluß der äußeren Körper *isoliert* ist, wenn diese hinreichend weit entfernt sind, um keinen merkbaren Einfluß auszuüben. Dieser Gedanke wird von Mach[1]) entwickelt, der zum Ausgangspunkte das Newtonsche *Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung macht.*

Wir werden so auf eine Untersuchung der Bedeutung dieses Prinzips geführt. Vor allen Dingen ist zu bemerken, daß Newton in ihm eine einfache Verallgemeinerung des statischen Symmetrieprinzips (§ 15) sah, indem er implizite annahm, daß „die Kräfte, die aus der gegenseitigen Wirkung der Körper aufeinander entstehen, auf diese Körper in der Bewegung ebenso wirken wie im Gleichgewicht", d. h. daß „sie so wirken, als ob sie *sich momentan ausbreiten*". Wenn man diese Hypothese, die in keiner Weise an der Evidenz der statischen Symmetrie teilhat, annimmt, so liefert das statische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung das *dynamische Prinzip* Newtons, das vermöge des Bewegungsgesetzes sich in eine „*Beziehung zwischen den Beschleunigungen* der bewegten materiellen Punkte" verwandelt. In diesem von dem Begriff der Kraft unabhängigen Sinne nimmt Mach das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung an.

Machs Untersuchung (die wir hier durch die ausdrückliche Hervorhebung der Annahme 3. ergänzen)

1) Op. cit. S. 226. Vgl. Vaschy „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1895. Maggi Op. cit. und „Enseignement mathématique" 1901.



führt zu folgendem Ausdruck der in diesem Prinzip enthaltenen Postulate:

1. Zwei materielle Punkte, die ein isoliertes Paar bilden, haben entgegengesetzte Beschleunigungen, welche in die Richtung ihrer Verbindungslinie fallen.
2. Wenn zwei materielle Punkte, $A$ und $B$, nacheinander und getrennt mit einem dritten, $C$, zu einem Paare vereinigt werden und mit diesem gleiche (und entgegengesetzte) Beschleunigungen annehmen, so werden auch $A$ und $B$, wenn man sie zu einem isolierten Paar vereinigt, gleiche (und entgegengesetzte) Beschleunigungen annehmen.
3. Wenn man nacheinander die isolierten Paare betrachtet, die aus den materiellen Punkten

   $$A,\ C;\ B,\ C;\ A+B,\ C$$

   bestehen, so ist das Verhältnis der Beschleunigung von $C$ zu der von $A+B$ die Summe der Verhältnisse der Beschleunigungen von $C$ zu $A$ und von $C$ zu $B$.

Auf Grund dieser vorstehenden Postulate kann man folgende *Definition* aufstellen: Das *Verhältnis der Massen* zweier materieller Punkte ist das umgekehrte Verhältnis der Beschleunigungen, die sie annehmen, wenn man sie zu einem isolierten Paar vereinigt.

(Es muß hinzugefügt werden, daß die physikalisch-chemischen Transformationen innerhalb der verglichenen Körper zwar die erwähnten Beschleunigungen, aber nicht ihr Verhältnis ändern können.)

Aus der vorstehenden Definition ergibt sich im besonderen der Sinn des Ausdrucks „*gleiche Massen*" und das Postulat 2. drückt die *Transitivität* der Gleichheit aus. Die Masse wird also *durch Abstraktion* definiert und ihr *additiver Charakter* ist in dem Postulat 3. enthalten.

Für denjenigen, der das durch die Postulate 1., 2., 3. ausgedrückte dynamische Prinzip der Wirkung und

Gegenwirkung uneingeschränkt annimmt, erscheint das im engen mechanischen Sinne aufgefaßte Postulat der Masse diesem Prinzipe *äquivalent.* Es wird dann die Wahl der Beobachtungen oder Versuche, die zur Definition des „Massenverhältnisses" dienen, und die man z. B. durch die *Gravitation* (VASCHY) oder den *Stoß* (ANDRADE) usw. erhalten kann, gleichgültig.

Immerhin muß man sich die Bedingungen vor Augen halten, denen ein Körper genügen muß, um als materieller Punkt betrachtet zu werden (§ 12), und es ist zu bemerken, daß dieselben beim Stoß nur schwer erfüllbar sind, weil die Form und Lage der Körper, die einander stoßen, auf die Erscheinung derart einwirken, daß sich merkbare Abweichungen von dem theoretischen Gesetze ergeben.

Wir stellen also fest, daß die von MACH angenommene *Äquivalenz zwischen dem dynamischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung* (den Postulaten 1., 2., 3.) *und dem Massenpostulat von der Systematisierung der* NEWTONschen *Dynamik abhängt.*

Man nehme an, daß das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung und im besonderen das Postulat 1. im allgemeinen nicht gilt, oder daß sich wenigstens seine Gültigkeit mit einer zu bewertenden Annäherung auf eine gewisse Klasse von Fällen beschränkt. Dann muß die darauf gegründete Definition der Masse sich auf einen dieser Fälle beziehen; aber das im Sinne von § 19 verstandene Postulat der Masse wird noch immer auch für diejenigen Erscheinungen der Bewegung, für die die Bedingung 1. nicht erfüllt ist, seinen Sinn behalten.

*In diesem Sinne scheint uns das Postulat der Masse mehr auszudrücken als das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.* Daraus ergibt sich die Bedeutung der verschiedenen Vorstellungen, die zu den



beiden Begriffen führen, welche von MACH für identisch gehalten werden.

Wir wollen schließlich noch bemerken, daß unabhängig von der Annahme des allgemeinen dynamischen Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung das von MACH angegebene Verfahren noch immer zu einer Definition der Masse führen kann, vorausgesetzt, daß die definierenden gedachten Experimente sich auf die Fälle beziehen, in denen es sich um Körper handelt, *die einander berühren* oder um verbundene Punkte, die beim Zerreißen der Verbindung ihre Gleichgewichtslage verlassen, und wenn man *das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung in einem engeren Sinne* annimmt, wie er sich in der Mechanik von HERTZ darstellt.

So vergleicht VOLTERRA in seinen „Lezioni di Meccanica" zu Pisa (1890) die Beschleunigungen, die zwei starr verbundene ein isoliertes Paar bildende materielle Punkte in dem Augenblick annehmen, in dem das Gleichgewicht durch den Bruch der Verbindung gestört wird.

Man kann die Bemerkung machen, daß, wenn man hier den Kraftbegriff nicht ausschalten will, das erwähnte Gedankenexperiment die Vergleichung der Massen zurückführt auf diejenigen der Beschleunigungen, die verschiedene materielle Punkte annehmen, wenn sie gleichen Kräften unterworfen werden. Man knüpft hier also an das Grundgesetz der Bewegung an, das (wie wir sehen werden) die natürlichste Grundlage für die Vergleichung der Massen chemisch nicht aufeinander zurückführbarer Körper bildet, wobei man soweit wie möglich dem am Anfange dieses Paragraphen charakterisierten ersten Gesichtspunkte folgt.

## § 21. Das Grundgesetz der Bewegung.

Das Grundgesetz der Bewegung eines materiellen Punktes ist, wie wir sagten, in der Vektorgleichung

$$f = m\,\omega$$

enthalten. Seine Bedeutung ist ohne weiteres bestimmt, wenn das Bezugsystem, in bezug auf welches es gilt (§ 18), und die Masse $m$ (§ 20) definiert sind; wenn dagegen die Masse nicht im voraus allgemein definiert ist, so führt die vorstehende Gleichung, wie wir sehen werden, zu einer Vervollständigung dieser Definition.

Wenn man die für das Gesetz der Bewegung vorausgesetzten Tatsachen untersuchen will, so ist es vor allen Dingen nötig, die Umstände zu betrachten, unter denen die historische Entwickelung zu diesem Gesetz geführt hat.

Es war, wie wir sagten, die Frucht einer Induktion, durch die NEWTON das Gesetz der Bewegung der fallenden Körper GALILEIS auf den Fall beliebig variabler Kräfte ausdehnt (ein Fall, auf den sich zahlreiche Untersuchungen von HUYGHENS beziehen).

Die NEWTONsche Formulierung ist in den beiden folgenden Gesetzen enthalten:

Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex II: Mutationem motus esse proportionalem vi impressa, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Die Lex I drückt jenes *Trägheitsgesetz* aus, zu dem nach einer Bemerkung MACHS GALILEI durch die Untersuchung der Bewegung der schweren Körper auf der geneigten Ebene als zu einem Grenzfall geführt wurde.

Die Lex II deutet man dahin, daß sie für sich allein die allgemeine Bewegungsgleichung

$$f = m\,\omega$$

ausdrückt, die in ihrem mathematischen Ausdruck für $f = 0$ die Lex I enthält. Deshalb besteht hier nach MACH ein fehlerhafter Pleonasmus!

Unsere Ansicht ist ein wenig davon verschieden.



Vor allem glauben wir, daß, um den Geist des NEWTONschen Systems zu verstehen, man den offenbar neueren Gedanken, daß das Bewegungsgesetz eine *dynamische Definition der Kraft* darstelle, eliminieren muß.

Für NEWTON sollte dieses Gesetz eine Beziehung zwischen zwei Elementen ausdrücken, die er einzeln als bereits bekannt ansah: die Kraft einerseits und das Produkt aus Masse und Beschleunigung anderseits. Aber wie konnte er anders die Kraft als bekannt voraussetzen als vom Gesichtspunkt der Statik?

Wenn man annimmt, daß die Kraft, von der in der Lex II die Rede ist, statisch definiert sei, so erhält diese Lex selbst eine engere Bedeutung als die Differentialgleichung $f = m\,\omega$. Es wird nämlich eine der willkürlichen Integrationskonstanten in bezug auf das Bezugssystem a priori bestimmt, und um dem Gesetz seine volle Allgemeinheit wiederzugeben, in der es später angewandt wird, muß man eine neue Annahme hinzufügen, für die NEWTON in dem Trägheitsgesetz (Lex I) einen adäquaten Ausdruck gefunden zu haben glaubte.

Wir deuten also den NEWTONschen Text folgendermaßen: Die Lex II bezieht sich auf die beginnende Bewegung, die Lex I auf die Bewegung, auf welche keine Kräfte wirken; das allgemeine Bewegungsgesetz $(f = m\,\omega)$ ergibt sich aus der Zusammensetzung der beiden NEWTONschen Gesetze, wobei allerdings eine noch nicht aufgeklärte Hypothese, die wir im folgenden Paragraphen untersuchen werden, stillschweigend hinzugenommen wird.

Wir wollen die Tatsachen, die in dem *Gesetz der beginnenden Bewegung* ausgedrückt werden, zusammenfassen, wobei wir annehmen, daß die Kraft in dem vorangehenden Gleichgewichtszustand statisch definiert sei.

Das Ergebnis dieser Untersuchung stellt sich dar in einem System von Postulaten und Definitionen, die

wir nunmehr aussprechen wollen, wobei wir die Masse als eine in bezug auf die physikalisch-chemischen Transformationen invariante und additive Größe betrachten, die deshalb nur durch Vergleichung chemisch homogener Körper definiert ist.

*Postulat I.* Wenn eine Kraft auf einen ruhenden materiellen Punkt wirkt, so beginnt dieser, wenn er nicht mehr zurückgehalten wird, sich in der Richtung der Kraft zu bewegen.

*Postulat II.* Die einem gegebenen Punkte beigebrachte Beschleunigung ist dem statischen Maß der Kraft proportional.

*Postulat III.* Gleiche Kräfte bewirken an (chemisch) homogenen Massenpunkten von gleicher Masse gleiche Beschleunigung.

*Postulat IV.* Wenn zwei Kräfte $f_1$ und $f_2$, die getrennt auf zwei materielle Punkte $M_1$ und $M_2$ wirken, an ihnen eine gleiche Beschleunigung $\omega$ bewirken, so bewirkt eine Kraft, die gleich der Summe $f_1 + f_2$ ist an dem Punkte $M_1 + M_2$, der aus der Vereinigung der beiden gegebenen hervorgeht, wieder dieselbe Beschleunigung $\omega$.

Zu diesen Postulaten kann man die folgende *Definition* hinzufügen: Die *Massen* zweier heterogener materieller Punkte werden *gleich* genannt, wenn gleiche Kräfte an ihnen gleiche Beschleunigungen hervorrufen.

Das, was diese Definition zuviel enthält, ist eine Folge des Postulats II: Wenn zwei Kräfte, die $f$ gleich sind, an den materiellen Punkten $M_1$, $M_2$ die gleiche Beschleunigung $\omega$ hervorrufen, so werden Kräfte, die gleich $2f$ sind, die doppelte Beschleunigung hervorrufen, usw.

Im übrigen genügt der so definierte Massenbegriff den Forderungen, die unsere Analyse ergab, indem der additive Charakter der Masse in dem Postulat IV enthalten ist.



Um die vorstehenden Postulate zu ergänzen, muß man noch das Postulat II vervollständigen, indem man sich an das *Prinzip des* Galilei erinnert, von dem wir sehen werden, daß es von d'Alembert auf die Dynamik der Systeme (§ 27) ausgedehnt worden ist. Wir drücken es als *Postulat V* aus:

Mehrere auf einen materiellen Punkt wirkende Kräfte bewirken dieselbe Beschleunigung wie ihre statische Resultante (die Resultante der partiellen Beschleunigung).

Es ist nun von Wichtigkeit, folgendes zu bemerken:

*Die Postulate I—V, die das Grundgesetz der beginnenden Bewegung ausdrücken, gelten für ein beliebiges System,* auf das sowohl die Kräfte als auch die Bewegung bezogen werden, auch wenn es sich um Achsen handelt, deren Richtungen gegen die astronomisch festen sich verändern.

Sei nämlich $\alpha$ ein System von Achsen, deren Richtungen astronomisch fest sind, $\beta$ ein System, das in bezug auf $\alpha$ beliebig variabel ist. $P$ ein Punkt, der in bezug auf $\beta$ im Gleichgewicht ist, und der in einem gegebenen Augenblick sich in bezug auf $\beta$ zu bewegen beginnt.

Das Gesetz der beginnenden Bewegung sagt dann aus, daß, wenn sowohl die auf $P$ wirkende Kraft als auch die Bewegung von $P$ auf $\beta$ bezogen werden, die Kraft (im vektoriellen Sinne) der Beschleunigung proportional ist. Nun verwandelt sich diese Aussage in die folgende: Die Kraft in bezug auf $\beta$ ist proportional der Veränderung der Beschleunigung, die in bezug auf $\alpha$ gemessen wird.

Es geht daraus vermöge des Satzes von Coriolis hervor, daß das Gesetz vom Bezugsystem unabhängig ist.

Angesichts dieser Unabhängigkeit kamen REECH und ANDRADE[1]) auf den Gedanken, den klassischen Ausdruck des Bewegungsgesetzes zu ersetzen durch die Proportionalität der Kraft und der Veränderung der Beschleunigung.

Zwischen dieser Formulierung und der unsrigen bestehen zwei Unterschiede:

1. Der erste ist, daß wir uns auf den Fall der beginnenden Bewegung beschränken, in der allein man eigentlich von einer statisch definierten Kraft sprechen kann.
2. Der zweite ist, daß wir die Kraft als *relativ* zu demselben System nehmen, auf das wir die Bewegung beziehen, so daß wir den klassischen Ausdruck des Gesetzes nicht abzuändern brauchen.

Die erste Beschränkung ist vor allem wichtig für unseren Zweck, eine noch nicht aufgeklärte Hypothese hervorzuheben, die in der fortschreitenden Erweiterung des Bewegungsgesetzes enthalten ist.

## § 22. Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz.

Wir haben bemerkt, daß das Gesetz der beginnenden Bewegung (Lex II) von NEWTON durch das *Trägheitsgesetz* (Lex I) ergänzt wird, daß aber das allgemeine Bewegungsgesetz, wie es in der NEWTONschen Dynamik angewandt wird, noch eine weitere nicht aufgeklärte Hypothese hinzufügt. Der Übergang von dem Fall der beginnenden Bewegung zu dem allgemeinen Fall mit Hilfe des Prinzips der Resultante erfordert nämlich, daß die Kraft, die auf einen bewegten Punkt wirkt, so gemessen werden kann, als ob der Punkt einen Augenblick lang sich in Ruhe befände.

Diese Annahme der *von der Lage abhängigen Kräfte* bot sich NEWTON sehr natürlich dar, weil seine Dynamik

1) „Leçons de Mécanique physique", Paris 1898.



(obgleich mit einem universellen transzendenten Gewande bekleidet) im Grunde die Anwendung der irdischen Dynamik GALILEIS auf das astronomische Gebiet ist. Diese Entwickelung erklärt in unseren Augen den Weg, auf dem NEWTON zu dem allgemeinen Ausdruck der Prinzipien gelangte, und die Form, in der dies geschah.

Wenn wir nun ausdrücklich postulieren wollen, was zu dem Gesetz der beginnenden Bewegung hinzukommen muß, an Stelle der Lex I, so werden wir das folgende *verallgemeinerte Trägheitsgesetz* aussprechen:

In jedem Augenblick vollzieht sich die Bewegung eines materiellen Punktes so, als ob er aus einem Zustand der Ruhe losgelassen wäre, vorausgesetzt daß:

1. die relative Lage der äußeren Körper (die merklich auf die Erscheinung Einfluß üben) durch diese Annahme keine Veränderung erleiden;
2. man zu der auf den Punkt wirkenden Kraft, die statisch gemesssen wird, wenn er in Ruhe ist, einen Impuls hinzufügt, der der Geschwindigkeit der Bewegung gleich ist.

Es ist kaum nötig hervorzuheben, daß dieses Gesetz eine Tatsache postuliert, die mit hinreichender Annäherung jedesmal dann verifizierbar ist, wenn die Voraussetzungen hinreichend genau erfüllt sind.

Die Dynamik kann auch die Anwendung des Prinzips *korrigieren*, indem sie z. B. den *Widerstand des Mediums* berücksichtigt, in dem ein gegebener Körper sich bewegt; es handelt sich dann darum, auch die Bewegung des Mediums zu betrachten oder wenigstens daraus das Hinzutreten einer neuen Kraft zu entnehmen, die z. B. von der Zusammendrückung der Flüssigkeit oder von ihrer Trägheit usw. herrührt, und die von der Geschwindigkeit des gegebenen bewegten Körpers abhängt.

In diesem Sinne werden *von der Geschwindigkeit abhängige Kräfte* in die Gleichungen der klassischen

Dynamik eingeführt, um für die Bewegung eines Teilsystems das zu ersetzen, was von einem weiteren Systeme herrührt, wo sich die materiellen Punkte unter dem Einfluß von *Kräften* bewegen, *die nur von der Lage abhängen.*

Es bleiben noch zwei Punkte aufzuklären, nämlich:

1. das Verhältnis des gewöhnlichen Trägheitsgesetzes (Lex I) zu dem verallgemeinerten;
2. das Verhältnis dieses Gesetzes zu dem dynamischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung NEWTONS.

1. Das gewöhnliche Trägheitsgesetz ist ein spezieller Fall unseres Prinzips, den man erhält, wenn man ein Feld von *verschwindenden Kräften* voraussetzt. Unser Prinzip ist äquivalent der Vereinigung dieses speziellen Trägheitsgesetzes mit der Annahme der nur von der Lage abhängigen Kräfte.

Wir wollen noch bemerken, daß in dem speziellen Trägheitsgesetz zwei Annahmen zu unterscheiden sind: die Erhaltung der Richtung in der Bewegung und die Erhaltung der Geschwindigkeit.

Die erste entspricht der geometrischen Anschauung der Bewegung, wenn man die Kräfte als Wirkungen der Körper denkt. Denn ein Punkt, auf den keine Kräfte wirken, erscheint dann als ein solcher, auf den die Veränderungen der (entfernten) Körper keinen Einfluß haben, so daß die Bahn der Bewegung eine Linie wird, die sich nicht verändern würde, wenn man das astronomische Universum um eines ihrer Elemente rotieren ließe, d. h. sie ist eine Gerade.

Die Erhaltung der Geschwindigkeit ist ein Prinzip, das angesichts gewohnter Versuche paradox erscheint, und das eine abstrakte Induktion darstellt, die, wie wir sahen, von GALILEI in einem besonderen Fall gewonnen wurde, zu der die Annahme der nur von der Lage abhängigen Kräfte zusammen mit dem Bewegungsgesetz durch Kontinuität hinführt.



2. Das Verhältnis zwischen der Dynamik der Wirkung und Gegenwirkung und dem verallgemeinerten Prinzip der Trägheit läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

Das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, als allgemeine Beziehung zwischen den Beschleunigungen bewegter Massenpunkte aufgefaßt, folgt aus dem statischen Symmetrieprinzip zusammen mit dem verallgemeinerten Trägheitsgesetz, wenn man die Kräfte als „Wirkungen zwischen den Körpern" betrachtet.

Das dynamische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung in dem engeren HERTZschen Sinne folgt schon aus der Kombination des Gesetzes der beginnenden Bewegung mit dem statischen Symmetrieprinzip.

## § 23. Synthetische Bewertung der Prinzipien.

Die Untersuchung der Begriffe und Postulate der Mechanik des Punktes hat uns zu einer Aufzählung der impliziten und expliziten Voraussetzungen der Wissenschaft geführt, die nunmehr in folgender Anordnung aufgestellt werden können:

1. Postulate des Raumes (Kap. IV) und der Zeit (§§ 3—8),
2. Postulate der Statik: Prinzipien der Symmetrie und Prinzip der Resultante (§§ 15, 16),
3. Prinzip der Erhaltung der Materie (§ 19),
4. Gesetz der beginnenden Bewegung (Postulat I—V, § 21),
5. Die Hypothesen, auf denen die Konstruktion astronomisch fester Richtungen beruhen (§ 18),
6. Verallgemeinertes Trägheitsgesetz (§ 22).

Die Postulate 2. und 4. gelten für das Gleichgewicht und für die Bewegung in bezug auf ein beliebiges System. Nur das Postulat 6. erfordert, daß die Richtungen der Koordinatenachsen astronomisch fest sind.

Wenn wir dies berücksichtigen, ferner die Art, wie man zu den Postulaten selbst gelangt, ihr Verhältnis gegenseitiger Abhängigkeit usw., so wird es natürlich erscheinen, eine *Rangordnung der Prinzipien* aufzustellen.

a) Die Postulate 1. und 2., die direkt auf der Anschauung beruhen, und durch verschiedene Experimente kontrolliert werden, müssen als die allgemeinsten und sichersten Voraussetzungen im Verhältnis zu den übrigen betrachtet werden.

b) Auf dieser statischen und kinematischen Grundlage ruhen die Postulate 3. und 4., die für die Anschauung nicht ebenso evident sind, aber durch direkte Experimente bewiesen werden.

c) Das Postulat 6. (das bis zu einem gewissen Grade mit der Hypothese 5. verknüpft ist), und ebenso das Newtonsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, das sich daraus ableitet, werden an dritter Stelle als Hypothesen anzuführen sein, die zwar nicht mehr durch direkte (weder bewußte noch unbewußte) Experimente bewiesen werden, die aber durch Induktion und durch die Untersuchung der Gravitationserscheinungen auf der Erde und am Himmel nahe gelegt werden und durch diese Untersuchungen eine indirekte Bestätigung erfahren, die von der Annahme der vorhergehenden Postulate abhängt.

Wir wollen die vorstehenden Ergebnisse in dem folgenden überzeugenderen Ausdruck zusammenfassen: *Die Postulate 1.—5. definieren eine allgemeinere Mechanik, die für ein beliebiges Bezugsystem gilt und sowohl das Gleichgewicht als die beginnende Bewegung umfaßt.* Damit die Dynamik zu bestimmten Voraussichten führt, muß man zu diesem System eine Hypothese hinzufügen, die in der astronomischen Dynamik ihren passenden Ausdruck in dem verallgemeinerten Trägheitsgesetz findet. Man könnte diese Hypothese modifizieren, indem man an



ihrer Stelle irgendein komplizierteres Gesetz annimmt, wie wir es im Kap. VI tun werden. Jedenfalls würde das verallgemeinerte Trägheitsgesetz dieses Gesetz mit einer um so größeren Genauigkeit wiedergeben, je kleiner die betrachteten Geschwindigkeiten sind, d. h. in den Fällen, welche der beginnenden Bewegung *verhältnismäßig* nahe kommen, und dies ist im Planetensystem der Fall!

Eine Schwierigkeit könnte sich höchstens aus der Betrachtung ungeheuer viel größerer Geschwindigkeiten ergeben (s. Kap. VI).

## § 24. Statik der Systeme: Verbindungen.

Bisher haben wir uns auf die Mechanik des materiellen Punktes bezogen. In der Wirklichkeit muß man aber in vielen Fällen Körper betrachten, deren Dimensionen man nicht vernachlässigen darf, und auch in der Definition der „Kraft, die auf einen Punkt wirkt", kann man von einer gewissen Vorstellung solcher Körper nicht absehen.

Die Form, die Größe und im allgemeinen die geometrischen Eigenschaften der im Gleichgewicht oder in Bewegung befindlichen Körper sind eng mit gewissen sinnlichen Bestandteilen verbunden, die man als die *Natur* des Körpers bezeichnet, nicht so mit den Kräften, die auf ihn wirken.

Man kann sich den Körper aus materiellen Punkten bestehend denken, zwischen denen gewisse *innere Kräfte* wirken. Damit wird der Begriff des Körpers auf den eines „Systems von Punkten und Kräften" zurückgeführt: das Problem des Gleichgewichts und der Bewegung wäre hiermit auf die Prinzipien der Mechanik des Punktes zurückgeführt. Aber die Kräfte, um die es sich handelt, stellen in Wirklichkeit eine Annahme dar, die in den meisten Fällen keine Bestätigung erlaubt.

Es ist dahingegen leicht einzusehen, daß in vielen gewöhnlichen Fällen gewisse geometrische Eigenschaften unabhängig von den angewandten Kräften sich unverändert erhalten (oder in einem gewissen Verhältnis mit diesen Kräften variieren); man kann dann die Beobachtung dadurch wiedergeben, daß man hypothetische *Verbindungen* zwischen den Punkten des Körpers annimmt, der also als ein „an geometrische Bedingungen gebundenes System" aufgefaßt wird.

Eine derartige Annahme muß einfach als eine gedankliche Vereinfachung eines a posteriori festgestellten Faktums aufgefaßt werden, z. B. des Faktums, daß die gegenseitigen Entfernungen des Punktes eines festen Körpers innerhalb gewisser Grenzen annähernd unveränderlich bleiben.

Ob man den Begriff der Verbindungen durch den oben erwähnten eines Systems von inneren Kräften ersetzen will, oder ob man im Gegenteil, wie wir dies im Kap. VI tun werden, alle Kräfte als Reaktionen der Verbindungen auffassen will, jedenfalls legt die gleichzeitige Betrachtung von Kräften und Verbindungen unserer Vorstellung überflüssige Bedingungen auf. Sie bedeutet aber in diesem Falle, daß einige *Ergebnisse* (z. B. gewisse Verbindungen) an Stelle von unbekannten *Daten* (inneren Kräften) bei der Bestimmung der Erscheinung gesetzt werden.

Indem wir also alle Fragen über die Möglichkeit einer Reduktion dieser Grundbegriffe auf das VI. Kapitel verschieben, werden wir im folgenden von der Annahme ausgehen, daß Kräfte und Verbindungen in bezug auf die Erfahrung eine positive Bedeutung haben, und daß vermöge derselben es möglich ist, die sichtbaren Erscheinungen zu behandeln, ohne die Vorstellung einer unsichtbaren Welt heranzuziehen. Wir werden aber Gelegenheit haben, an mehreren Stellen die Notwendigkeit



hervorzuheben, zwischen den beiden Begriffen gewisse Beziehungen anzunehmen, die sich in Wahrheit an die oben erwähnten Vorstellungen knüpfen.

## § 25. Hebel und schiefe Ebene: Prinzip der statischen Momente.

Man kann sagen, daß der Begriff der Verbindung von Anfang an in der Statik vorkommt.

Das Gleichgewicht der Systeme nämlich, wie *Hebel* und *schiefe Ebene* haben Archimedes und Stevin früher beschäftigt, als sie zur Betrachtung der Zusammensetzung auf einen Punkt wirkender Kräfte geführt wurden.

Die Geschichte der Begründung der Statik zeigt uns den Weg, den die Entdecker der Grundprinzipien des Gleichgewichtes gegangen sind, Prinzipien, die an die Begriffe der *statischen Momente* und der *virtuellen Arbeit* anknüpfen.

Die Gleichheit der statischen Momente als Bedingung des Gleichgewichts am Hebel ist von Archimedes entdeckt worden. Dieser wollte sie aus Postulaten ableiten, die sich auf elementare Fälle von Symmetrie und Dissymmetrie beziehen, nämlich, daß „man Gleichgewicht erhält, wenn man gleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen anbringt", und daß „kein Gleichgewicht herrscht, wenn man ungleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen oder gleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen anbringt".

Mach hebt an dem Beweis des Archimedes einen notwendigen Fehler hervor. Derselbe macht nämlich stillschweigenden Gebrauch von der Annahme, daß „man, ohne das Gleichgewicht zu stören, ein an einem Hebelarme angebrachtes Gewicht in gleiche Teile teilen und dieselben symmetrisch vom Anbringungspunkte entfernen kann", oder daß „gleiche und parallele Kräfte,

die senkrecht auf einen starren Stab wirken, durch eine am Mittelpunkte des Stabes angebrachte Resultante ersetzt werden können, die den Komponenten parallel und ihrer Summe gleich ist".

Es ist nichtsdestoweniger zu erwägen, ob nicht vielleicht die von ARCHIMEDES implizite postulierte Hypothese infolge ihrer anschaulichen Evidenz oder wegen der Bedingungen, unter denen sie experimentell verifiziert werden kann, plausibler ist als der Satz, daß „am Hebel Gleichgewicht besteht, wenn die statischen Momente gleich sind". In dieser Beziehung nun können wir das abfällige Urteil MACHS nicht unterschreiben. Es scheint uns unzweifelhaft, daß der Beweis des ARCHIMEDES in Wahrheit lehrreich ist.

Seine Bedeutung, von unserem Gesichtspunkt betrachtet, wird um so größer, wenn man die Entwickelungen über die *Zusammensetzung paralleler Kräfte*, welche auf ein starres Punktsystem wirken, in Betracht zieht; Entwickelungen, die in einem ähnlichen Sinne wie die des § 16 vor sich gehen.

Eine Abhandlung von FONCENEX, die später von D'ALEMBERT und LAPLACE verbessert wurde, erlaubt nämlich ein Gesetz für die Zusammensetzung paralleler und gleichgerichteter Kräfte, durch das diese bis auf eine Konstante $k$ vollständig bestimmt ist, aus den folgenden Annahmen abzuleiten:

1. die Existenz einer einzigen Resultante,
2. die assoziative Eigenschaft der Zusammensetzung der Kräfte,
3. Symmetrieprinzipien.

Das gewöhnliche Gesetz, nämlich, „daß die Resultante zweier parallelen und gleichgerichteten Kräfte der *Summe* der Komponenten gleich ist," ist in dem vorstehenden allgemeineren enthalten und ergibt sich aus ihm, wenn man $k = \infty$ setzt.



Nun hat GENOCCHI gezeigt, daß mit Beziehung auf das Parallelenpostulat des EUKLID man $k = \infty$ ableiten kann. Die statischen Postulate, die er in seinem Beweise verwendet, sind die folgenden:

4. die Möglichkeit, eine Kraft längs ihrer Wirkungslinie zu verschieben,
5. das Prinzip der Zusammensetzung in einem Punkte zusammenlaufender Kräfte,

das hier allerdings in einem allgemeineren Sinne genommen wird, insofern es sich hier darum handelt, (in bezug auf die Gleichgewichtswirkungen), durch die Resultante nicht mehr Kräfte zu ersetzen, die auf einen freien Massenpunkt wirken, sondern Kräfte, die auf einen Massenpunkt wirken, der in einem starren System enthalten ist.[1]) Auf Grund dieser Entwickelungen gelangt man zu der Einsicht, daß die Gleichgewichtsbedingung des Hebels, die durch das Prinzip der statischen Momente ausgedrückt wird, außer durch direkte quantitative Experimente noch durch indirekte in gewisser Weise qualitative verifiziert werden kann, die sich zu einer synthetischen Vorstellung der Erscheinungen verbinden.

Auch für andere einfache Systeme kann man in ähnlicher Weise einen Beweis für das Prinzip der sta-

1) Für die Beziehungen der Frage zu dem Postulat des Euklid vgl. R. BONOLA „La Geometria non-euclidea", ein Werk, das bei Zanichelli im Erscheinen begriffen ist.

Man findet hier auch einen Bericht über die Art, wie Lagrange das Problem behandelt. Trotz des Interesses, welches diese Methode bietet, und trotz ihrer Einfachheit ziehen wir ihr dennoch die im Text erwähnten vor, weil in ihnen auf keine dynamische Anschauung Bezug genommen wird, was uns dem Geiste der Frage zu entsprechen scheint. Lagrange dagegen postuliert stillschweigend, daß „Verbindungen, die die gleichen Bewegungen erlauben, in bezug auf das Gleichgewicht durcheinander ersetzt werden können".

tischen Momente als Bedingung des Gleichgewichts erhalten.

Als Beispiel führen wir die Gleichgewichtsbedingung eines schweren Körpers auf der schiefen Ebene an, die von STEVIN abgeleitet worden ist, indem er sich des Postulats bediente, daß „eine geschlossene homogene Kette, die um ein Dreieck gelegt wird, sich im Gleichgewicht befindet". Dieses Verfahren erscheint so überzeugend, daß auch MACH ein ihm günstiges Urteil fällt.

## § 26. Prinzip der virtuellen Arbeit.

Das Prinzip des Gleichgewichts, welches auf der Vergleichung der statischen Momente beruht, bildet die Grundlage der Statik der Systeme auf einer Stufe der Entwickelung, die vor den dynamischen Erkenntnissen liegt, und in der die ersten elementaren Versuche unmittelbar an die Anschauung des Gleichgewichts angeknüpft werden, unabhängig von der Betrachtung der möglichen Bewegungen.

Eine höhere Entwickelungsstufe wird durch die Bezugnahme auf dynamische Betrachtungen charakterisiert, und speziell auf die Vergleichung der *virtuellen Arbeit*, d. h. der Arbeit, die an dem System bei kleinen (theoretisch unendlich kleinen) Verschiebungen, welche mit den Verbindungen vereinbar sind, geleistet wird.

(Wir wollen daran erinnern, daß man die von einer Kraft bei der Verschiebung eines Punktes geleistete *Arbeit* das Produkt aus der Kraft und der Projektion der Verschiebung auf die Kraftrichtung nennt.)

Eine erste Beobachtung STEVINS über das Gleichgewicht der Systeme von Rollen und eine ähnliche allgemeinere Beobachtung GALILEIS bei Gelegenheit der schiefen Ebene, die später von TORRICELLI vervollkommnet wurde[1]), haben zu dem Prinzip des Gleichgewichts geführt, das in seiner weitesten Bedeutung von JOHANN BERNOULLI (1717) erkannt wurde und von LAGRANGE der *analytischen Mechanik* zugrunde gelegt wurde.



Das Prinzip der *virtuellen Arbeit* oder *Geschwindigkeit* wird folgendermaßen ausgesprochen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines verbundenen Systems, das irgendwelchen Kräften unterworfen ist, ist, daß die von den Kräften bei einer virtuellen Verschiebung des Systems geleistete Arbeit verschwindet.

Dieses Prinzip drückt eine sehr allgemeine Annahme aus, *die sich auf die Natur der Verbindungen des Systems bezieht*, und die sich (gemäß dem historischen Gesichtspunkt) als ein Ergebnis der Induktion darstellt vermöge einer fortschreitenden Erweiterung des Begriffs der „Verbindung".

Der klassische Beweis, den man heute gewöhnlich für dieses Prinzip gibt[2]), läßt leicht erkennen, daß seine Geltung für die üblichen Maschinen im allgemeinen von einer Untersuchung der verschiedenen Arten von Verbindungen, die bei ihnen zur Anwendung kommen, abhängt.

Das Beweisverfahren stützt sich also auf die Feststellung, daß das Prinzip für die elementaren Fälle gilt: den freien Punkt, den auf einer Fläche beweglichen Punkt, die verbundenen Punkte, aufeinander rollende

1) Das Prinzip des TORRICELLI sagt aus, daß das Gleichgewicht der schweren Körper dem Minimum (oder dem Maximum) der Höhe des Schwerpunktes entspricht. Lagrange hat bemerkt, daß dieser spezielle Fall auf das allgemeine Prinzip, das er das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nannte, zurückgeführt werden kann.

2) Vgl. z. B. Appel „Traité de Mécanique rationelle", Paris. Gauthier et Villars 1893. (S. 225.)

Flächen usw., und diese Feststellung vollzieht sich durch eine direkte Vergleichung der auf diese Fälle bezüglichen Experimente oder die Vergleichung der durch das Verschwinden der virtuellen Arbeit gegebenen Gleichgewichtsbedingung mit anderen speziellen Gleichgewichtsbedingungen, die man auf Grund vorhergehender Experimente (bewußter oder unbewußter) als bekannt ansieht.

Es ist demnach klar, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit eine Gesamtheit von Tatsachen, die teilweise als evident vorgestellt werden, zu einer allgemeinen Annahme zusammenfaßt, und aus ihrer Gesamtheit andere Tatsachen ableitet, die durch verschiedene Experimente kontrolliert werden können.

Man muß auf den Punkt Gewicht legen, daß die Geltung des Prinzips der virtuellen Arbeit, sofern es aus den statischen Postulaten und gewissen elementaren Gleichgewichtsbedingungen der einfachsten Maschinen abgeleitet wird, durch die Natur der Verbindungen beschränkt ist.

Aber nichts steht einer induktiven Entwickelung des Prinzips entgegen, die zu seiner Anwendung auf Fälle führt, die nicht auf die geprüften Typen zurückführbar sind. Dadurch wird in Wahrheit die in dem Prinzip enthaltene *Annahme* auf einen größeren Kreis von Erscheinungen *ausgedehnt*, und es wird den aus ihm abgeleiteten Folgerungen überlassen, diese erweiterte Anwendung zu rechtfertigen.

Als bemerkenswertes Beispiel einer solchen Erweiterung kann man den Fall anführen, auf den man dadurch geführt wurde, daß man die Invarianz der Entfernungen in einem infinitesimalen Sinne auffaßte; dies ist bei den Gleichgewichtsproblemen der *Fäden* und der *biegsamen*, aber *undehnbaren Flächen* der Fall. Eine andere Erweiterung ergibt sich beim Problem des *hydrostatischen*



*Gleichgewichts*, wo als Bedingung die *Unveränderlichkeit des Volumens* auftritt, usw.

In einem anderen Sinne wird das Prinzip der virtuellen Arbeit erweitert, wenn es sich um Fälle handelt, in denen nicht sowohl die *Kräfte* als *gegeben* angenommen werden, sondern während jede Annahme über diese beiseite gelassen wird, die in Betracht kommende *Arbeit* direkt gemessen wird, so z. B. in der Theorie der *Elastizität* (Kap. VI). Man nähert sich auf diese Weise derjenigen Entwickelung der klassischen Mechanik, die in der Konstruktion der Energetik ihren konkreten Ausdruck gefunden hat (Kap. VI).

Schließlich müssen wir auf zwei Beobachtungen aufmerksam machen:

Die erste ist, daß das Prinzip des Gleichgewichts, das durch das Verschwinden der virtuellen Arbeit ausgedrückt wird, sich immer auf Fälle bezieht, in denen die Verbindungen selbst geometrische Beziehungen sind, welche durch *Gleichungen* ausgedrückt werden können. Wenn man allgemeiner auch Verbindungen in Betracht zieht, die durch *Ungleichungen* ausgedrückt werden (*einseitige* Verbindungen), so muß bekanntlich das Prinzip selbst auch in eine Ungleichung verwandelt werden.

Die zweite Beobachtung ist die, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit, wie im allgemeinen die Mechanik, sich auf den *Grenzfall* bezieht, in dem *von den Reibungen abstrahiert* werden kann. Es ist aber zu erwähnen, daß kürzlich Almansi den Versuch gemacht hat, die Reibung als einen Fall von Kräften mit (teilweise einseitigen) Verbindungen zu behandeln. Daraus scheint sich eine ziemlich interessante Verallgemeinerung zu ergeben.

## § 27. Dynamik der Systeme: das d'Alembertsche Prinzip.

Eine Beobachtung von Huyghens beim Studium der Schwingungsbewegungen, die in anderer Form von

Giacomo und später von Johann Bernoulli wieder aufgenommen wurde, wurde von d'Alembert (1743) zu einem allgemeinen Prinzip erhoben.

Ein System von Kräften $U$, welche auf einen aus verbundenen Punkten gebildeten Körper wirken, kann in bezug auf die Bewegungserscheinungen durch ein System von Kräften $V$ ersetzt werden, die auf die Elemente (Punkte) des Körpers wirken und gleich dem Produkt ihrer Massen und den Beschleunigungen sind, welche wirklich durch die Kräfte $U$ hervorgerufen werden.

Die *Bewegungsgleichungen* des Körpers werden demnach ausgedrückt durch die Bedingungen der statischen Äquivalenz der Kräfte $U$ und $V$, d. h. durch die *Gleichgewichtsbedingungen* des Systems der *verlorenen Kräfte* $U-V$.

Wir haben schon hervorgehoben (§§ 16, 21), daß dieses Prinzip bereits im Falle des materiellen Punktes eine tatsächliche Annahme enthält. Es ist nun zu bemerken, daß *das allgemeine* d'Alembertsche *Prinzip eine Folge des* Galileischen *Postulats in bezug auf die Dynamik des Punktes ist*, wenn man einige *implizite Hypothesen* annimmt, die sich an den *Begriff der Verbindung* knüpfen.

Der Beweis des allgemeinen d'Alembertschen Prinzips wird nämlich aus folgenden Annahmen geführt:

1. Die Verbindungen können in jedem Augenblick durch Kräfte *(Reaktionen)* ersetzt werden, die auf die Punkte des Systems wirken und von den äußeren Kräften abhängen.
2. Die dynamische Resultante der auf jeden einzelnen Punkt wirkenden Kräfte ist in jedem Augenblick ihrer statischen Resultante äquivalent (Galileisches Postulat).
3. Wenn man gleichzeitig an allen Punkten des Systems Kräfte anbringt, die den Resultanten der Verbindungen (und der gegebenen Kräfte) gleich und entgegengesetzt sind, so ändern sich deren Reaktionen nicht.



Besonders die dritte Hypothese drückt eine Vorstellung von den Verbindungen und von ihren Reaktionen aus, worin diese gedacht werden als Hindernisse für Entfernungsänderungen oder gewisse Bewegungen der Punkte des Systems, die daher ungeändert bleiben, wenn diese bestimmenden Umstände erhalten bleiben.

Das d'Alembertsche Prinzip hat zusammen mit dem der virtuellen Arbeit Lagrange ermöglicht, das Problem der Bewegung eines verbundenen Systems für alle die Fälle durch Gleichungen auszudrücken, in denen die Verbindungen durch Gleichungen ausgedrückt sind und sich letzten Endes auf die elementaren Typen zurückführen lassen.

Die *Bewegungsgleichungen* eines Systems drücken in mathematisch genauer Form aus, daß „die Bewegung selbst bestimmt ist, durch die Kenntnis der äußeren Kräfte, der Verbindungen und der (anfänglichen) Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte des Systems in einem gegebenen Augenblick". Diese Gleichungen enthalten als besonderen Fall die Gleichgewichtsbedingungen.

In der deduktiven Entwickelung der analytischen Mechanik hat es sich als nützlich herausgestellt, das d'Alembertsche Prinzip oder besser den Satz, den man aus ihm unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit erhält, auf andere *äquivalente* Formen zu bringen, die oft eine schnellere Anwendung gestatten.

*Das* Gausssche *Prinzip des kleinsten Zwanges* und *das* Hamiltonsche *Prinzip* sind solche Umformungen des besagten Satzes von d'Alembert und Lagrange. Aber in bezug auf das erste Prinzip ist zu bemerken, daß es für Gauss eine allgemeinere Bedeutung hat, insofern es auch den Fall der einseitigen Verbindungen umfaßt.

## § 28. Prinzip der lebendigen Kräfte und der kleinsten Wirkung.

Wir wollen nun ausdrücklich den Fall von Systemen betrachten, auf die das Theorem von D'ALEMBERT und LAGRANGE anwendbar ist.

Da dieser Satz auf die Bewegungsgleichungen führt, so wird die Bewegung selbst vollkommen bestimmt, wenn die Kräfte die Verbindungen und die (anfänglichen) Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte des Systems gegeben sind, die man für einen bestimmten Augenblick beliebig annehmen kann.

Daraus folgt, daß jedes andere Prinzip, durch welches die Bewegung solcher Systeme bestimmt wird:

1. entweder eine logische Folge des Satzes von D'ALEMBERT und LAGRANGE ist,
2. oder eine einschränkende Bedingung für die Daten (Kräfte und Verbindungen) enthalten muß.

Das erwähnte Gausssche Prinzip, das auch auf eine allgemeinere Klasse von Erscheinungen Anwendung findet, und ähnlich das HAMILTONsche Prinzip bieten Beispiele des ersten Falles.

Das Interesse an der Aufsuchung engerer Prinzipien, die dem zweiten Fall entsprechen, hängt mit der Ansicht zusammen, daß „die *Kräfte* und *Verbindungen* nicht *beliebige* Elemente der dynamischen Erscheinung sind", und daß besonders ihre gegenseitigen Beziehungen einer Beschränkung unterworfen sind, deren Kenntnis folglich erforderlich ist, um die konkrete Voraussicht der Tatsachen weiter zu treiben.

Wenn man z. B. eine Verallgemeinerung des astronomischen von NEWTON eingeführten Kraftbegriffes als „Wirkung der Massenpunkte, die sich nach dem dynamischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung vollzieht", *(Zentralkräfte)* zuläßt, und wenn man demnach die Verbindungen auf die Fälle beschränkt, die aus solchen Kräften sich ergeben würden, (Kap. VI), so gelangt man zur Einführung einer einschränkenden Bedingung, durch die man aus dem Theorem von D'ALEMBERT und LAGRANGE ein bestimmendes Prinzip ableiten kann, welches mehr ausdrückt.



In der Tat führt die Annahme der Zentralkräfte vor allem zur Aufstellung eines Resultates von großer physikalischer Bedeutung, nämlich des *Prinzips der lebendigen Kräfte*, aus dem sich dann eine einfachere Bestimmung der Bewegung ergibt.

Wir wollen kurz die Geschichte dieses Prinzips darstellen:

Als erster machte HUYGHENS beim Studium der Pendelbewegungen die Bemerkung, daß „die Veränderung der Summe der lebendigen Kräfte der Punkte eines bewegten Systems gleich und entgegengesetzt ist derjenigen der von den Kräften geleisteten Arbeit". Und dieser Satz findet auf den allgemeinen Fall Anwendung, auf den sich die LAGRANGEschen Gleichungen beziehen.

Aber mehr noch; die Veränderung der lebendigen Kräfte oder der Arbeit kann oft gemessen werden ohne Kenntnis der während der Bewegung durchlaufenen Bahnen, da sie nur von der *Anfangs- und Endfiguration* des Systems abhängt. Der Keim zu dieser Erkenntnis findet sich bei GALILEI. Dieser bemerkt, daß der Zuwachs an lebendiger Kraft bei einem fallenden Körper nur von der vertikalen Fallhöhe abhängt. HUYGHENS und EULER gaben der GALILEIschen Beobachtung eine allgemeinere Bedeutung.

Endlich erkannte DANIEL BERNOULLI, daß diese Beobachtung unter der Annahme von Zentralkräften allgemeine Gültigkeit besitzt. In diesem Falle nämlich haben die Kräfte ein *Potential*, das nur von der Kon-

figuration des Systems abhängt und „die Veränderung der lebendigen Kraft des bewegten Systems wird in jedem Augenblicke durch die des Potentials gemessen".

Dies ist das Prinzip der lebendigen Kräfte, das (wie wir im Kap. VI sehen werden) demjenigen *der Erhaltung der Energie* vorausgeht.

Für diejenigen Systeme, welche Kräften unterworfen sind, die ein Potential besitzen, erlaubt das Prinzip der lebendigen Kräfte diejenigen von GAUSS und HAMILTON auf einen einfacheren Ausdruck zu bringen, der das sogenannte *Prinzip der kleinsten Wirkung* darstellt.

Die Bewegung vollzieht sich so, daß die Variation des Mittelwerts der lebendigen Kraft des Systems in jedem Zeitintervall ein Minimum wird.

Dieses Prinzip geht historisch dem GAUSSschen vorher. Es wurde zuerst in einer etwas unbestimmten Form von MAUPERTUIS und genauer später von EULER ausgesprochen. LAGRANGE macht auf seinen Zusammenhang mit dem GAUSSschen Prinzip aufmerksam.

## § 29. Die Verifikation der Dynamik.

Aus den vorstehenden Paragraphen ergibt sich, daß eine psychologische Entwickelung der empirischen Daten die durch die Begriffe des Raumes und der Zeit dargestellten Assoziationen und Abstraktionen fortgesetzt hat in der Konstruktion einer Statik und weiter einer Dynamik, die die Statik selbst als Spezialfall umfaßt.

Diese psychologische Entwickelung kann aufgefaßt werden als eine Reihe von Induktionen, die von teils unbewußten, teils bewußten Experimenten ausgehend die anschauliche Auffassung der Tatsachen verallgemeinert.

Die Mannigfaltigkeit dieser Experimente, ihre intime Verbindung zu einem allgemeinen System von



Annahmen, durch die sie miteinander übereinstimmen und einander kontrollieren, bildet von vornherein eine Sicherheit für diese Annahmen selbst und bietet daher eine Garantie für ihre Geltung mit einem hohen Grade von Annäherung, wobei es berechtigt ist, die Prinzipien unter diesem Gesichtspunkt einer Rangordnung zu unterwerfen (vgl. § 23).

Zu einer genaueren und sichereren Bewertung der Dynamik ist es nun erforderlich, die sich aus ihr ergebenden Folgen einer Verifikation zu unterziehen.

Der Satz von D'ALEMBERT und LAGRANGE, der die Annahmen der Dynamik in ihrer Gesamtheit zusammenfaßt, drückt eine allgemeine Beziehung zwischen gewissen empirischen Daten aus, nämlich den Bewegungen eines Körpers, den auf seine Punkte wirkenden Kräften (d. h. dem Kraftfelde, in welchem der Körper sich bewegt), der Massenverteilung (Dichtigkeit) des Körpers selbst und den Verbindungen zwischen seinen Punkten.

Die Prinzipien der Mechanik, besonders die der Mechanik des Punktes, kann man als besondere Bestimmungen dieser Beziehung betrachten, die hypothetischen einfachen Bedingungen entsprechen. Daher bedeutet die Ableitung des Satzes von D'ALEMBERT und LAGRANGE aus jenen Prinzipien, daß die dynamische Erscheinung in ihrer Zusammensetzung erklärt wird als die Superposition einer gewissen Anzahl von elementaren Erscheinungen.

Nun erfordert die Verifikation der Dynamik eine Reihe von konkreten Fällen, in denen die angenommenen Daten (Bewegungen, Kräfte usw.) durch Erfahrung mit einem gewissen Grade von Annäherung bestimmt werden können.

Es ist demnach im folgenden besonders erforderlich,

1. daß ein bekanntes Kraftfeld vorliegt, z. B. ein Feld von konstanten Kräften, wie das der Schwerkraft auf der Erde, usw.;

2. daß die Masse des bewegten Körpers und ihre Verteilung (Dichtigkeit) gemessen werden kann;
3. daß die Verbindungen zwischen den Punkten des Körpers mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden können, wie dies vor allem im Falle der *starren Körper* zutrifft.

Diese Bedingungen sind ziemlich gut in zwei Fällen erfüllt, die zu denjenigen Erscheinungen gehören, aus deren Studium die Dynamik entstanden ist:

a) Bei der Bewegung freier fester Körper auf der Erdoberfläche (Fall der schweren Körper, Wurf der Geschosse usw.), wobei sich allerdings die Schwierigkeit zeigt, daß der *Widerstand der Luft* berücksichtigt werden muß, dessen genaue Bewertung zu einer Ergänzung des bewegten Systems durch die umgebende Flüssigkeit führt, d. h. eines Systems, das schwerer zu bestimmenden Verbindungen unterworfen ist.

b) Bei den Bewegungen des Planetensystems. Hier kann man das vollständige System als aus starren Körpern zusammengesetzt betrachten, und wenn man auch die Art, wie die Dichte wechselt, nicht kennt, so kann man doch von dieser Kenntnis absehen, indem man die Körper selbst einmal als Punkte oder als homogene Kugeln oder Ellipsoide oder als Körper betrachtet, deren Dichtigkeit mit einer gewissen Gleichmäßigkeit nach dem Mittelpunkt zu wächst. Bei den Hauptfragen der Astronomie der Lage kann man den Fehler, der aus solchen Annahmen entsteht, vernachlässigen, und es genügt daher, die Massen und die Kräfte, welche auf sie wirken, in ihrer Gesamtheit zu messen.

Nun sind diese Bestimmungen teilweise untereinander verknüpft und hängen von der hypothetischen Verallgemeinerung gewisser Versuche ab. So werden z. B. durch die von Cawendisch, Carlini und Airy und durch die Konstatierung der durch die Flutwellen



hervorgerufenen Kräfte, die mit astronomischen Beobachtungen verglichen werden, in der direktesten Weise die interplanetarischen Anziehungskräfte bewiesen. Durch die Pendelversuche von Bessel, die mit astronomischen Beobachtungen verglichen werden, beweist man, daß das Maß der Masse der von ihr ausgeübten Anziehungskraft proportional ist, usw. Immerhin muß hervorgehoben werden, daß der Genauigkeitsgrad dieser irdischen Experimente im allgemeinen ein geringerer ist als der der astronomischen Beobachtungen, aus denen durch geeignete Vergleichung gewöhnlich eine Korrektion der Massenwerte entnommen wird.

Demnach hat das Verfahren der Verifikation der Dynamik, wie es von den Astronomen geübt wird, folgende Bedeutung: Die Verifikation der Dynamik hängt ab von der Annahme von Hypothesen über die Kräfte und Massen, die ihrerseits direkt verifiziert werden durch eine Vergleichung der astronomischen Beobachtungen mit gewissen irdischen Experimenten, und zwar mit einem Grade von Annäherung, der geringer ist als der der letzteren.

Eine genauere Verifikation der Dynamik wird von der planetarischen Astronomie nur im folgenden Sinne geliefert: Man kann die Massen und Kräfte mit höherer Genauigkeit so bestimmen, daß sie in ihrer Gesamtheit die astronomischen Beobachtungen wiedergeben, und man kann Voraussagen machen, die sich mit sehr großer Genauigkeit bestätigen, nämlich mit einer Abweichung von 15 Winkelsekunden oder einer Zeitsekunde bei der Bewegung des Mondes innerhalb zwei und einem halben Jahrhundert, und mit der höchsten Abweichung von 8 Winkelsekunden oder einer halben Zeitsekunde bei der Bewegung des Merkur in einem Jahrhundert. (Eine Verschiebung des Perihels um 41″.) Für die anderen Planeten bleibt diese Abweichung unterhalb eines Win-

kels von 2″, obgleich sie in bezug auf den Knoten der Venus und das Perihel des Mars zu merkbaren Fehlern führt.[1])

Angesichts solcher Ergebnisse ist das erste Gefühl höchste Befriedigung und Bewunderung, die den Geist zu einer Apotheose der Wissenschaft erhebt.

Aber wer bereits unbegrenztes Vertrauen auf ihren Fortschritt besitzt, wird aus diesem Fortschritt neuen Mut schöpfen, um eine noch genauere Erkenntnis zu suchen.

Und allerdings sind die oben erwähnten Abweichungen obgleich praktisch außerordentlich klein, doch mit unseren feinen Instrumenten noch konstatierbar und überschreiten die Grenze der für die Anwendung der Newtonschen Theorie vorauszusehenden Fehler. Sie erfordern demnach eine angemessene *Erklärung*.

Man ist deshalb veranlaßt, zwischen den folgenden Erklärungshypothesen zu wählen:

1. Man kann den Fehler korrigieren, indem man die Beobachtung ausdehnt (z. B. indem man die Existenz neuer interplanetarischer Massen oder einer Abweichung der Sonne von der Kugelgestalt usw. erkennt).

2. Man kann das Anziehungsgesetz abändern, indem man dabei die Newtonsche Dynamik in ihrer Gesamtheit aufrechterhält und demnach eine Anziehungskraft ($f(r)$) als Funktion der Entfernung $r$ annimmt, die aber nicht mehr genau proportional zu $1 : r^2$ ist. In diesem Sinne wurde von Hall vorgeschlagen, den Exponenten 2 zu ersetzen durch 2,000.000.151.

3. Man kann schließlich die eigentlichen in der Newtonschen Dynamik enthaltenen Annahmen oder einen Teil von ihnen abändern, z. B. die momentane

1) Vgl. Tisserand „Traités de Mécanique céleste", Bd. IV, Kap. 29.



Ausbreitung der Anziehungskraft und folglich das verallgemeinerte Trägheitsgesetz.

Da es sich um einen sehr hohen Grad von Annäherung handelt, so ist es schwer zu sagen, ob gemäß der Annahme 2. eine derartige Bestimmung der Funktion $f(r)$ möglich ist, daß die Fehler in Grenzen eingeschlossen werden, die vernachlässigt werden können. Aber eine solche Annahme muß sicherlich wenig befriedigend erscheinen, wenn sie nicht durch irgendwelche Vorstellung verstärkt wird, und sie gibt deshalb unserem Vertrauen in die Dynamik ein geringes Gewicht.

Der Gedanke, die Hypothese der Anziehung zu korrigieren, indem man eine endliche Ausbreitungszeit annimmt, bot sich schon Laplace dar, der allerdings diese Korrektion nicht als eine Sache auffaßte, die die Prinzipien der Newtonschen Dynamik selbst berührte und deshalb wahrscheinlich mit irgendeiner anderen Korrektion derselben verbunden sei. Die Rechnung Laplaces, die von Lehmann-Filhés (1884) erneuert wurde, hat zu einer Ausbreitungsgeschwindigkeit geführt, die das Millionenfache derjenigen des Lichtes beträgt, und es scheint unmöglich, eine solche Geschwindigkeit von einer momentanen Ausbreitung zu unterscheiden.[1])

Wir wollen die astronomische Verifikation der Dynamik an dieser Stelle verlassen. Der erreichte Grad von Approximation, der wahrhaft wunderbar ist, scheint auf diesem Gebiete der Beobachtungen schwer zu übertreffen zu sein. Wir werden also erst nach einer Vergleichung mit weiteren Experimenten zu ihm zurückkehren (vgl. Kap. VI).

Neben den beiden Hauptfällen, die wir im vorstehenden betrachtet haben, muß man auch in Erwägung

1) Tisserand, op. cit. Bd. IV, Kap. 28.

ziehen, wie weit die Dynamik durch andere kompliziertere Erscheinungen verifiziert wird und besonders, in welcher Weise das Funktionieren der Maschinen eine solche Verifikation darstellt.

Nun ist bekannt, daß hier die Voraussagen der Theorie vielfacher Korrektionen bedürfen. Die Kräfte, Massen, Verbindungen und Bewegungen, die uns als *sichtbare Bestandteile* der Erscheinung sich darstellen, genügen nicht mehr zu ihrer Bestimmung. Man muß vielmehr daneben *störende Faktoren* in Betracht ziehen, und zwar in erster Linie die *Reibung*, an die sich Erscheinungen der *Erwärmung*, *Elektrisierung* usw. anschließen. Man ist deshalb gezwungen zuzugeben, daß die Dynamik in diesen Fällen eine grob angenäherte Erkenntnis darstellt, und weiter, daß die erwähnten Bedingungen einen *systematischen* Einfluß ausüben und daher auch nicht in einer *statistischen Theorie* vernachlässigt werden können.

Immerhin kann dieses Urteil modifiziert werden, indem man zu einer genaueren Verifikation der Dynamik gelangt, sofern es gelingt, *die Gesamtheit der sichtbaren Daten zu erweitern*, indem man z. B. die Schwingungsbewegungen berücksichtigt, die im Schall in Erscheinung treten, usw.

Nun ist diese Erweiterung theoretisch unbegrenzt, wenn man gestattet, mittels Hypothesen über das Feld der Erfahrung hinauszugehen. Man wird so darauf geführt, neben dem sichtbaren Teil der Erscheinungen eine hypothetische unsichtbare Welt zu konstruieren, die, indem sie sich immer weiter von dem entfernt, was unter die Sinne fällt, die Bedeutung eines *fiktiven Zwischengliedes zwischen den realen Gegenständen* erlangt (vgl. Kap. II).

Die so erweiterte Dynamik kann als verifiziert betrachtet werden, wenn die aufgestellte Zuordnung



zwischen den fiktiven Objekten und der physikalischen Wirklichkeit zu einer adäquaten Erkenntnis der verschiedenen Erscheinungsbeziehungen führt und besonders zu einer befriedigenden Korrektion der sich auf die Bewegung beziehenden Voraussagen.

Aber eine solche Verifikation bleibt in jedem Falle abhängig von der Annahme anderer Hilfshypothesen, die der Darstellung zugrunde liegen, durch welche die Kräfte bewertet werden. Welche Bedeutung ihr demnach zukommt, werden wir im Kap. VI prüfen.

Hier wollen wir unsere Kritik mit der folgenden Bemerkung schließen: Bei einer erweiterten Deutung der Dynamik werden nur gewisse Kombinationen der elementaren Daten derselben durch Definition die Bedeutung von realen Gegenständen erlangen und die experimentelle Verifikation wird sich direkt auf die Beziehungen zwischen diesen Gegenständen richten, d. h. auf gewisse Sätze, die aus den hypothetischen Prinzipien abgeleitet sind und nach Annahme mit den Voraussetzungen nicht äquivalent sind. Es wird daher der Gedanke natürlich erscheinen, diese Sätze selbst an Stelle der Prinzipien als Grundvoraussetzungen einer verallgemeinerten Theorie zu betrachten. Auf diese Weise wird die physikalische Interpretation der deduktiven Entwickelungen der Mechanik durch eine Reihe von sukzessiven Induktionen das Verfahren der Erwerbung wissenschaftlicher Begriffe ausführen gemäß den Gesichtspunkten, die im Kap. III dargelegt wurden.

Wie sie weiter zu einer wirklichen Korrektion der klassischen Mechanik führen kann, werden wir im VI. Kapitel sehen.

Kapitel VI.

# Die Erweiterung der Mechanik.

## A. Die Physik als Erweiterung der Mechanik.

### § 1. Entwickelung der mechanistischen Philosophie.

*„Alles das, worin sich die Tatsache der Bewegung fortsetzt, und alles, was ihr voraufgeht, zu erklären und als Bewegung darzustellen"*, das ist das Problem, das sich die Philosophie DESCARTES stellt und zu dessen Lösung in zwei Jahrhunderten die Arbeiten der größten Theoretiker der Physik beitrugen.

Wir wollen einen Augenblick das beiseite lassen, was den CARTESischen Gedanken im Gegensatz zu anderen verwandten Bestrebungen charakterisiert, und wollen ganz allgemein den genetischen Prozeß der Begriffe betrachten, der zur Konstruktion der Mechanik und zu ihrer fortschreitenden Ausdehnung auf die Physik führt.

Wir erkennen dann in diesem Prozeß eine doppelte Entwickelung:

1. eine *innere* Entwickelung, deren leitender Gedanke die fortschreitende *Reduktion der* in den Begriffen verbundenen *ursprünglichen Sinnesdaten* ist;
2. eine *äußere*, speziell *extensive* Entwickelung, die darauf ausgeht, unter dieselben Begriffe eine immer größere Mannigfaltigkeit von Sinnesdaten zu subsumieren.

Die Grundlagen dieser beiden Entwickelungsreihen sind in kühner Weise von DESCARTES gelegt worden,



noch ehe die Mechanik von NEWTON ausgebildet wurde: einerseits soll die Reduktion bis zu einer vollkommenen Unterdrückung aller *qualitativen Unterschiede* des Gegebenen fortgesetzt werden, d. h. zu einer vollkommenen Vereinheitlichung führen. Anderseits soll die Ausdehnung keiner Beschränkung unterworfen sein, das gesamte physische Weltall soll seine adäquate Erklärung in der Mechanik finden!

Dieser großartige metaphysische Entwurf stellt sozusagen den idealen Rahmen dar, in dem sich der Fortschritt der modernen Wissenschaft vollzieht.

Die ungeheure Arbeit zweier Jahrhunderte hat sicherlich der Physik große Fortschritte gebracht.

Aber schließlich hat sich in unseren Tagen eine Konsequenz ergeben, die von den Begründern dieser Entwickelung keineswegs vorausgesehen war, nämlich eine neue Kritik jener Prinzipien selbst, die bereits als undiskutierbare und strenge Wahrheiten betrachtet wurden; eine Untersuchung der Bedeutung, die ihnen beigelegt werden muß oder kann, damit sie für ein größeres Gebiet von Beziehungen gelten, und schließlich eine Korrektion der NEWTONschen Dynamik, die die neueste Entwickelung plausibel erscheinen läßt.

Dieses sind die für unsere Zeit charakteristischen Ansichten. Obgleich sie den steigenden Wert der Wissenschaft anerkennt, so lehnt sie doch vor allem die Ansicht als absurd ab, nach der der Mechanik eine *absolut strenge und universelle* Bedeutung zukommt, obgleich man für ihre Ausdehnung und für die entsprechende Vervollkommnung ihrer Prinzipien keine Grenze angeben kann.

Der Grundgedanke der CARTESischen Philosophie muß vor allem kritisch untersucht werden, insofern er darauf ausgeht, die qualitativen Unterschiede auf quantitative Beziehungen zurückzuführen.

## § 2. Quantität und Qualität: die Cartesische Hypothese

Quare opium facit dormire?
Quia est in eo virtus dormitiva,
Cuius est natura sensus assopire.

Diese berühmte Antwort des Arztes bei MOLIÈRE wird oft als Typus der scholastischen *Erklärung* angeführt, der allerdings seinen lächerlichen Anstrich verlieren würde, wenn er sich, wie es im Geiste der ARISTOTELischen Philosophie liegt, auf die einfache *empirische* Feststellung der vorliegenden Tatsache beschränkte und nicht den Anspruch erhöbe, ihr etwas hinzuzufügen durch Schaffung des *Namens* für eine entsprechende *Qualität*.

Gegenüber der Aristotelischen Ansicht erhebt sich der Cartesische Begriff einer *rationalen Erklärung*, die auf einer metaphysischen Voraussetzung beruht: Hinter den mannigfaltigen *Qualitäten*, die die Erscheinungswelt zusammensetzen, gibt es eine *einheitliche Substanz*, die nur *quantitativer Unterschiede* fähig ist, die Erklärung der Erscheinungen liegt in der Erkenntnis der quantitativen in ihnen enthaltenen Beziehungen.

Dieser Gegensatz in der Art, die „Erklärung" aufzufassen, wird von DUHEM[1]) vom historischen Gesichtspunkt beleuchtet.

Unsere Kritik soll den Unterschied von „Quantität" und „Qualität", einen der schwierigsten, mit denen der Philosoph sich zu befassen hat, unter einem anderen Gesichtspunkte beleuchten.

*Größen* heißen diejenigen Gegenstände einer *Klasse*, für die die *Gleichheit* und die *Summe* definiert sind. Eine Folge dieser Definition ist die Möglichkeit, zwischen

1) „L'evolution de la mécanique", Revue général des siences 1903. S. 63, 119, 171, 247, 301, 352.



solchen Gegenständen ein *Verhältnis* zu definieren (das *Maß* der einen in bezug auf die andere).

Die Aussage, daß zwei Dinge einer gegebenen Klasse gleich sind, besagt, daß „man von gewissen unterscheidenden Eigenschaften absieht, um ihre gemeinsamen Eigenschaften zu einer abstrakten Vorstellung zusammenzufassen".

Der eigentliche Sinn der Summe ist das „Vereinigen" oder „Zusammensetzen" des einen „neben" das andere oder „hinter" das andere, wobei die Dinge als Teile oder Addenden betrachtet werden. Es ist deshalb die direkte Assoziation in Raum oder Zeit der Empfindungsgruppen nötig, die den summierten Teilen entsprechen.

Wir wollen einige Beispiele anführen.

## § 3. Beispiele: die Gewichte.

Die Entfernungen, Volumina und Gewichte bilden ebenso viele Klassen von Größen. Sie werden als solche gedacht, sobald die Begriffe der „gleichen Entfernungen", „gleicher Volumina" und „gleicher Gewichte" in Beziehung zu denen der „Summe" gebildet sind.

Wir wollen bei dem Beispiel der Gewichte stehen bleiben.

Nehmen wir eine Wage mit einer gewissen Belastung, und nehmen wir an, daß der Körper $A$, auf die Wagschale gelegt, der Belastung das Gleichgewicht hält. Wenn wir dann $A$ durch den Körper $B$ ersetzen, und das Gleichgewicht bleibt erhalten, so sagen wir, „daß die Gewichte von $A$ und $B$ *in bezug auf die gegebene Wage gleich* sind".

Die Bedeutung dieser Definition ist eine Assoziation und eine Abstraktion. Wir verteilen die Körper in der Weise auf Klassen, daß alle diejenigen in dieselbe Klasse kommen, die demselben Gewichte auf einer

bestimmten Wage das Gleichgewicht halten. Wir konstruieren so den abstrakten Begriff des „Gewichtes in bezug auf die Wage"; ein Begriff, in bezug auf den jedes Element einer Klasse durch jedes andere ersetzt werden kann. Die formalen Eigenschaften der Gleichheit (Kap. III § 14) spiegeln diesen psychologischen Abstraktionsprozeß wieder.

Wir wollen nun eine zweite Abstraktion vollziehen. Wir vergleichen verschiedene Wagen. „Wenn zwei Gewichte in bezug auf eine von ihnen gleich sind, so sind sie es auch in bezug auf eine beliebige andere." Man kann deshalb die Gewichtsgleichheit als eine *Beziehung zwischen den* verglichenen *Körpern* ansehen, die von einer speziellen Wage *unabhängig* ist.

Wir schreiten zur Definition der „*Summe*". Die Summe zweier Gewichte $A$ und $B$ ist das Gewicht des Körpers, den man erhält, wenn man $A$ und $B$ vereinigt, oder eines beliebigen anderen Körpers von gleichem Gewichte, durch den diese Vereinigung ersetzt werden kann.

„Wenn $A$ und $C$ gegeben sind, so existiert immer ein Gewicht $B$, das, zu einem von ihnen addiert, ein Gewicht ergibt, welches dem anderen gleich ist."

Daraus ergibt sich, daß die Gewichte als Größen, d. h. als Summen von Teilen betrachtet werden können.

Es geht aber hieraus nicht a priori hervor, daß „Summen von gleichen Gewichten gleich sind". Wenn nämlich $A$ und $A'$ in gleicher Weise einem gegebenen Gewicht auf der Wage das Gleichgewicht halten und ebenso $B$ und $B'$, so folgt daraus nicht, daß $A$ durch $A'$ auf der Wage ersetzt werden kann, die sich im Gleichgewicht befindet und auf der einen Schale das Gewicht $A + B$ trägt.

Aber bei der Mannigfaltigkeit der möglichen Konstruktionen erkennt man, daß diese Ersetzbarkeit in



der Unabhängigkeit des Gewichts von der Wage erhalten ist.

Wir haben hiermit die Grundbeziehungen, die gestatten, die Gewichte als eine „Klasse von Größen" anzusehen.

Man kann zur Definition dieser Klasse auf verschiedenen anderen Wegen gelangen und ihre Übereinstimmung schließt das Stattfinden von Tatsachen ein, die im allgemeinen im Begriff des Gewichtes vorausgesetzt werden. So können z. B. auf einer Wage (und hier ist es wesentlich, daß es sich nicht um eine Dezimalwage handelt) die Gewichte zweier Körper, $A$ und $B$, unmittelbar verglichen werden, indem man sie auf die beiden Schalen legt. Das erste, was hier zu bemerken ist, ist, daß „das Gleichgewicht erhalten bleibt, wenn man $A$ und $B$ vertauscht" und folglich, „daß, wenn $A$ $B$ und $C$ das Gleichgewicht hält, auch $B$ und $C$ einander das Gleichgewicht halten", und daß schließlich „das Gleichgewicht zwischen $A$ und $B$ von der speziellen Wage, auf die man sich bezieht, unabhängig ist". Damit haben wir die Grundeigenschaften, die der „Gewichtsgleichheit" zukommen.

## § 4. Die Wärmemenge.

Ein zweites Beispiel für die Definition einer Klasse von Größen bietet die Wärme.

Man kann die „Wärmemengen", die ein Körper bei einer Temperaturveränderung abgibt oder aufnimmt, definieren, indem man sich auf die Masse einer gegebenen kalorimetrischen Substanz bezieht, deren Temperatur gemäß der Abgabe oder Aufnahme zwischen zwei gegebenen Punkten schwankt. (Die Temperaturgleichheit wird dabei als definiert angenommen auf Grund des thermischen Gleichgewichts, wie wir später ausführen werden.)

Diese Art der Vergleichung führt direkt zu einer Feststellung dessen, was unter „gleichen" Wärmemengen und unter der „Summe zweier Wärmemengen" zu verstehen ist.

Man gelangt so zum Ausdruck eines Abstraktionsprozesses, der drei Grundtatsachen voraussetzt, die denen analog sind, denen wir im vorhergehenden Falle begegneten: die Unabhängigkeit der definierten Beziehung von der besonderen kalorimetrischen Bezugssubstanz; die Ersetzbarkeit der als gleich bezeichneten Wärmemengen bei der kalorimetrischen Vergleichung (die Transitivität der Gleichheit, Kap. III § 14) und endlich die Gleichheit der Summe von gleichen Größen.

Die Verifikation der erwähnten Tatsachen bildet die wesentliche Bedingung für die Möglichkeit des Verfahrens, das uns zur Definition der Größen führt.

In vielen Fällen jedoch ist dieser Prozeß unmöglich. Die Wärme selbst bietet uns ein Beispiel davon, wenn man versucht, nicht mehr die Wärmemengen, sondern die *Temperaturen* zu definieren.

In diesem Falle braucht man einen Vergleichskörper, das Thermometer, indem man immer von der Erscheinung des Wärmeaustausches zwischen zwei sich berührenden Körpern ausgeht. Auf Grund des thermischen Gleichgewichts werden die „gleichen Temperaturen" definiert, und diese Beziehung erweist sich als unabhängig von dem Thermometer und besitzt die formalen Eigenschaften der Gleichheit.

Aber betrachten wir nun die Summe. Wenn man zwei gleichwarme Körper vereinigt, so erhält man nicht einen wärmeren Körper, die Temperatur verändert sich nicht.

Wir sind demnach verhindert, die Temperaturen als Größen, d. h. als Summen von Teilen, zu betrachten.



Um diesen Zweck zu erreichen, müßte man nicht den Begriff von „gleichen Temperaturen" besitzen, sondern denjenigen „gleicher Temperaturzuwächse".

Man könnte dann als Summe zweier Zuwächse von $A$ bis $B$ und von $B$ bis $C$ den Temperaturzuwachs betrachten, durch den man von $A$ zu $C$ übergeht, indem man die beiden Übergänge nacheinander ausführt.

Aber wenn auch jedes Thermometer für sich gestattet, gleiche Temperaturzuwächse zu definieren, so hängt doch diese Definition durchaus von der Wahl der Thermometersubstanz ab. Denn „Temperaturzuwächse, die gleichen Dilatationen einer gegebenen Substanz entsprechen, entsprechen ungleichen Dilatationen einer anderen"; und anderseits liegt in dem Begriff des Temperaturzuwachses kein sinnliches Datum, das zur Auswahl einer gewissen Gruppe von Thermometern berechtigte.

## § 5. Die Messung des Intensiven.

Welche Bedeutung hat nun die metaphysische Hypothese, die hinter jeder Veränderung der Erscheinungen ein quantitatives Substrat postuliert?

Nehmen wir z. B. an, daß die Wärme auf einer besonderen in den Körpern enthaltenen Flüssigkeit beruhe.

Für einen mit hinreichend scharfen Sinnen versehenen Beobachter wäre dann die Erwärmung begleitet von dem Anblick der Vermehrung der Flüssigkeitsmenge. Nehmen wir die Wärmeerscheinung in ihrer zusammengesetzten Gesamtheit. Ein Tasteindruck und eine Beobachtung durch den Gesichtssinn. Wenn wir dann von der ersten Empfindungsart absehen, so gelangen wir zu einer Vorstellung der Temperaturen als Größen, die der Dichte der Wärmeflüssigkeit proportional sind.

Die Hypothese der Wärmeflüssigkeit hat also die Bedeutung, daß sie uns zu der Annahme führt, daß mit der Temperatur ein quantitatives Element *wesentlich* verbunden ist. Allerdings erlaubt uns die Stumpfheit unserer Sinne nicht, dasselbe zu erkennen: ein glücklicher Umstand, der uns verhindert, die metaphysischen Hypothesen auf die Probe zu stellen. Aber es bleibt das Vertrauen, daß man zwischen den verschiedenen möglichen Assoziationen der Erscheinung eine Gruppe *auszeichnen* kann, aus der sich eine indirekte Konstatierung ihres hypothetischen Substrats ergibt. Außerdem führt uns die Vorstellung der Wärmeflüssigkeit, wie wir sehen werden, zu einer konkreten Wahl.

Dieselbe Rolle spielt im allgemeinen die Cartesische Hypothese für die *Messung des Intensiven.*

Es sei in einer Erscheinungsreihe der Sinn der *Gleichheit* und des *größer* festgestellt, so daß man durch Abstraktion eine *Reihe von Intensitätsgraden* erhält. Nun können diese Grade den Zahlen oder den wachsenden Größen einer Klasse zugeordnet werden. Die Cartesische Hypothese erlaubt eine solche Zuordnung und leitet sie in jedem Falle der konkreten Vorstellung in einem nicht willkürlichen Sinne.

Hierbei muß man überlegen, daß das Vertrauen, ein mit dem Wesen der Erscheinungen zusammenhängendes Maß des Intensiven zu finden, die Wirkung hat, daß man einer bestimmten Messung den Vorzug gibt.

Wenn auch diese Assoziationen keine besonders bemerkenswerte reale Bedeutung haben, so ist doch schon die Tatsache, daß sie zu einer Messung führen, ein wichtiges Ergebnis, das von Duhem folgendermaßen beurteilt wird (l. c. S. 301):

„Cette extension de la notion de mesure, cet emploi du nombre comme symbole d'une chose qui n'est pas quantitative, eût sans doute étonné et scandalisé les



péripatéticiens de l'Antiquité. Là est le progrès le plus certain, la conquête la plus durable que nous devions aux physiciens du XVII^e siècle et à leurs continuateurs; ... ils ont établi cette vérité, d'un prix inestimable: *Il est possible de discourir des qualités physiques dans le langage de l'Algèbre.*"

## § 6. Das natürliche oder absolute Maß: die Temperatur.

Aber, wie wir sagten, führt die metaphysische Hypothese des Descartes nicht nur zu einer quantitativen Vorstellung oder zu einer Messung des Intensiven, sondern sie erhebt auch den Anspruch, die fast unbegrenzte Willkürlichkeit der Assoziationen, die imstande sind, sie zu liefern, zu beseitigen und will so eine bevorzugte, d. h. *natürliche* oder *absolute* Messung liefern.

Kehren wir zum Beispiel der Temperatur zurück!

Da ihre Messung vom Thermometer abhängt, so wird sie definiert bis auf eine Substitution

$$\tau = f(t)$$

wo $f$ eine beliebige wachsende Funktion bezeichnet.

Nun läßt uns aber die Hypothese der Wärmeflüssigkeit den Gedanken einer *absoluten* Temperaturmessung fassen, d. h. sie läßt uns untersuchen, „ob mit den Veränderungen, die die Körper bei der Erwärmung erleiden, irgendeine Größe verbunden ist, die von der Qualität des Körpers nicht abhängt und daher bei verschiedenen Körpern zwischen gleichen Temperaturen um den gleichen Betrag wächst".

In der Tat, wenn man diese Hypothese annimmt, so wird die in einem Körper enthaltene Wärmemenge $Q$ eine Menge der Flüssigkeit sein, die dem eingenommenen Volumen und der Dichtigkeit $t$ proportional ist, und $t$ wird die absolute Temperatur darstellen.

Die Hypothese der Wärmeflüssigkeit führt also zu der Annahme, daß die Wärmemengen, die bei dem Übergange von gleichen zu gleichen Temperaturen von verschiedenen Körpern aufgenommen oder abgegeben werden, einander proportional sind.

Diese Folge bestätigt sich zwar nicht allgemein, aber sie bestätigt sich in dem *Grenzfall* reversibler *(adiabatischer)* Transformationen, für die die Bedingung der Unzerstörbarkeit der Wärme, die in der Hypothese vorausgesetzt war, sich realisiert.

Und das wichtigste ist, daß die positive Definition der *absoluten Temperatur*, zu der man durch die reversiblen Transformationen geführt wird, sich als unabhängig erweist von der Hypothese der Wärmeflüssigkeit, sie bleibt als Ausdruck einer Tatsache bestehen, obgleich jene Hypothese sich als ungeeignet erweist zur Erklärung der Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit und der umgekehrten Erzeugung von Wärme durch die Reibung oder den Stoß der Körper, usw.

Die Tatsache, die bei der Definition der absoluten Temperatur vorausgesetzt wird, kann vermittelst verschiedener Hypothesen erkannt werden, z. B. mittels der *kinetischen Gastheorie* (vgl. § 10), wo als absolute Temperatur der Mittelwert der lebendigen Kraft der bewegten Gasmoleküle betrachtet wird.

Diese beiden Darstellungen enthalten gleichermaßen jene Tatsache, insofern sie gewisse Verknüpfungen zwischen den Sinnesdaten ausdrücken. Aber sie decken sich nur teilweise und die zweite Darstellung gibt noch mehr, nämlich die Fixierung des *Nullpunktes*, so daß die Temperatur bis auf einen Faktor, der von der Wahl der Maßeinheit abhängt, definiert ist, während sie bei der ersten Darstellung nur bis auf eine lineare Substitution

$$\tau = a\,t + b$$

bestimmt ist.



Und die Bedeutung dieser Wahl eines absoluten Nullpunktes ist die Erkenntnis eines *Maximums* von Wärmemenge (oder von Arbeit), die ein Gas liefern kann.

Wir machen schließlich noch darauf aufmerksam, daß die fundamentale Tatsache, die der Definition der absoluten Temperatur zugrunde liegt, vermöge der kinetischen Theorie ergänzt wird durch die Erkenntnis, daß die Wärmemengen, die von verschiedenen Gasen aufgenommen oder abgegeben werden, den Temperaturveränderungen und folglich untereinander (Joulesches Gesetz) und den respektiven Dilatationen proportional sind, woraus sich eine Übereinstimmung der Gasthermometer ergibt, die allerdings nur mit dem Grade von Annäherung besteht, mit dem die kinetische Theorie in ihrer einfachsten Form anwendbar ist.

## § 7. Zusammenfassung und Kritik.

Aus der vorstehenden Diskussion können wir den folgenden Schluß ziehen: Die Darstellung einer Reihe von Erscheinungsdaten als Größen ist das Ergebnis eines gewissen Assoziations- und Abstraktionsprozesses, der gewisse Tatsachen voraussetzt. Der Erfolg des Verfahrens bei jeder Assoziation ist an die Geltung dieser Tatsachen gebunden. Aber, wo diese nicht gelten, läßt es sich ermöglichen, indem man die Assoziationen selbst erweitert, d. h. indem man den Erscheinungsdaten andere quantitative Daten entsprechen läßt, die in der Wirklichkeit mit ihnen verbunden sind.

Immerhin bleibt die so erhaltene quantitative Darstellung eine *willkürliche* Vereinbarung, solange man nicht eine *Gruppe von Assoziationen auszeichnet*, in bezug auf welche diese Vereinbarung einen *invarianten* Charakter hat.

Die metaphysische Hypothese drückt das allgemeine Vertrauen aus, derartige Invarianzen (*natürliche* oder

*absolute* Maße) erkennen zu können, und sie treibt die Untersuchung so weit, bis sie sich zu einem geeigneten *System von Bildern* ausgestaltet hat.

Aber mehr noch, diese Hypothese erleichtert die Betrachtung der erscheinungsmäßigen Beziehungen, an die sich unsere Erwartungen knüpfen, indem sie dieselben durch *quantitative Beziehungen* zwischen den (natürlichen) Maßen gewisser Daten ausdrückt, und die Bilder verhelfen zu dieser *analytischen Darstellung* der physikalischen Realität, sei es, indem sie uns zur Erkenntnis der genannten Beziehungen führen, sei es, indem sie ihre Deutung erleichtern. Darin besteht der Wert der metaphysischen Hypothese für den Fortschritt der Wissenschaft.

Allerdings haben wir auf diese Weise die Metaphysik der Größe gedeutet, indem wir ihren positiven Gehalt hervorhoben. Diese Metaphysik erhebt aber außerdem den Anspruch, daß die Bilder einer *unzugänglichen und allgemeinen Wirklichkeit* entsprechen.

Sie nimmt also vor allem an, daß ihre Hypothesen den Wert von Tatsachen haben, d. h. daß *aus ihnen mögliche Wahrnehmungen eines mit hinreichend feinen Sinnen versehenen Beobachters folgen*, in zweiter Linie, daß sie einen konkreten Ausdruck finden *können*, der geeignet ist, von *allen* möglichen Beziehungen zwischen den verschiedenartigsten Erscheinungen Rechenschaft zu geben.

Wer den ersten Anspruch in positivem Sinne verstehen wollte, würde dadurch die Konstruktion der Bilder sehr stark beschränken. Eine vergleichende Prüfung der wirklich konstruierten Bilder zeigt aber sofort, daß diese Grenzen durchaus nicht respektiert werden, daß diese Hypothesen, anstatt die gedachten Empfindungen nur zu verschärfen, sie widernatürlich machen, daß man, wenn man mit ihnen arbeitet, gezwungen ist, eine Reihe



von widersprechenden Folgerungen auszuschließen, denen man nicht entgehen könnte, wenn man ihnen einen tatsächlichen Inhalt zuschriebe (vgl. Kap. I).

Wenn man demnach festhält, daß die metaphysische Hypothese in jedem ihrer konkreten Ausdrücke ein *Modell* darstellt, das geeignet ist, eine gewisse Art von wirklichen Erscheinungen abzubilden, so bleibt noch zu untersuchen, ob es denkbar ist, daß man zu einem einzigen Modell gelangt, das der *universellen Wirklichkeit* adäquat ist.

Die Unsinnigkeit dieser Behauptung wird klar, wenn man die *partiellen Modelle* als Resultate von Assoziationen und Abstraktionen betrachtet; denn ein *universelles Modell* würde eine transzendente Erweiterung dieses psychologischen Prozesses erfordern.

Wenn wir zur Prüfung der Einzelheiten herabsteigen, so werden wir noch besser sehen, wie die Konstruktion eines Modells immer zur Herstellung eines Parallelismus zwischen zwei Erscheinungsreihen dient und demnach notwendig eine *relative* und *eingeschränkte* Bedeutung hat, insofern keine Reihe als absolut isoliert von allen anderen betrachtet werden kann. Noch anderes wäre zu sagen über die Cartesische *Substanz*, die qualitativer Unterschiede bar ist. Aber wenn auch derartige Einwände unbekannt wären, was hätte es für einen Wert, einen Philosophen zu widerlegen? Nichts ist leichter, aber auch unnützer, hat Schopenhauer gesagt.

Die Metaphysik der Größe bleibt, wenn sie auch als solche nicht angenommen werden kann, immer der leitende Gedanke einer sich auf Jahrhunderte erstreckenden Bewegung, die wir in einem positiven Sinne als psychologischen Assoziationsprozeß erklärt haben. Man muß deshalb untersuchen, in welcher Weise sie sich konkret einer *Physik* unterordnet, *die als eine Erweiterung der Mechanik betrachtet wird.*

Wir wollen deshalb die theoretischen Entwickelungen überschauen, die durch eine dynamische Betrachtung der physikalischen Erscheinungen nach einer Fixierung der *quantitativen* Beziehungen einiger als charakteristisch betrachteten Daten streben, und die in diesen Beziehungen die vollkommene Bestimmung der Tatsachen erblicken.

Wir nehmen uns also vor, folgendes hervorzuheben und zu erklären:

1. das Streben nach Reduktion der Grunddaten der Mechanik und ihre eigentliche psychologische Bedeutung;
2. in welcher Weise und bis zu welchem Grade diese Entwickelung zu einer Bestätigung oder Korrektion der Postulate der Mechanik führt;
3. den Erkenntniswert und die heuristische Bedeutung der mechanischen Modelle.

## § 8. Die beiden Formen des Mechanismus: die Cartesische und die Newtonsche.

Die Daten der Mechanik sind qualitativ verschieden; es sind *extensive*, geometrische und kinematische Daten und *intensive* dynamische Daten (die Kräfte). Die innere Entwickelung der Philosophie der Mechanik richtet sich auf ihre fortschreitende Reduktion.

Bei dem eigentlich Cartesischen Plan sucht man die intensiven Daten auf die extensiven zurückzuführen, durch die man unmittelbar die quantitative Darstellung mit Bezug auf die Gesichtswahrnehmungen erhält. In diesem Sinne fordert man eine *Erklärung der Kräfte*. Demgegenüber zählt die Newtonsche Schule die Kräfte als elementare Wirkungen der Teilchen der Körper aufeinander zu den ursprünglichen Daten und versucht sie zu vereinheitlichen und aus ihnen die Erklärung anderer extensiver Daten abzuleiten, speziell will sie mittels der Kräfte *die Verbindungen erklären*.



Die beiden Typen des Mechanismus stellen einen Unterschied in der Auffassung dar, der unter verschiedenen Gesichtspunkten beleuchtet werden kann:

1. Der Typus der Cartesischen Darstellung ist ein ausschließlich *optisches Modell*, während das Newtonsche Modell der physischen Wirklichkeit vornehmlich mit *Tast-* und *Muskelempfindungen* operiert.
2. Die Cartesische Form entspricht der *assoziativen Phase* des wissenschaftlichen Verfahrens, die Newtonsche Form vielmehr der *abstraktiven Phase*. Demnach ist die quantitative Darstellung der Erscheinungen für die Cartesianer ein Ergebnis, dessen *Entstehung* man erklären muß und die Gesichtsassoziationen geben davon eine *klare* und *deutliche* Anschauung. Demgegenüber wird diese Darstellung von den Newtonianern oft in weiterem Sinne aufgefaßt als ein *aktuelles* Gegebenes, das man verwendet, und dessen Anwendungen man verfolgt.
3. Der Cartesische Typus entspricht vor allem der *inneren Entwickelung* der Philosophie der Mechanik, der Newtonsche vielmehr der *äußeren*.

Die Cartesische Tendenz, die Vorstellungen im optischen Sinne zu polarisieren, muß als ein Versuch erklärt werden, die Sinnesdaten zu *vereinheitlichen*; denn die Gesichtsbilder nehmen im allgemeinen bei den psychologischen Konstruktionen einen hervorragenden Platz ein und können jedenfalls nicht durch die Anschauung der Kräfte der Bewegung usw. eliminiert werden.

Demgegenüber muß die Newtonsche Tendenz, ein Modell für den Tastmuskelsinn zu konstruieren, das sich in einer abstrakten Konstruktion der Gesichtsanschauung superponiert, als der Versuch angesehen werden, die Sinnesdaten in *extensiverer* Weise zu assoziieren.

Die erste Tendenz hat also einen vorzüglich *ökonomischen* Wert für die fertige Wissenschaft und einen *psychologischen* als Anreiz für die Untersuchung; die zweite entspricht mehr der Aufgabe der wissenschaftlichen *Voraussage*. Aber vor allen Dingen liegt der Erfolg der beiden Tendenzen in ihrer Abwechslung.

Und so schlichtet die positive Erkenntnistheorie den Streit vom höheren Gesichtspunkt des wissenschaftlichen Fortschritts!

Wenn man nämlich als höchstes Ziel die einheitlichere und erweiterte Assoziation der verschiedenen Sinnesdaten betrachtet, so wird man erkennen, daß die Abwechslung der beiden Entwickelungstendenzen uns diesem Ziele näher gebracht hat.

Den ersten Versuchen im CARTESIschen Sinne verdanken wir vor allem die kinetische Gastheorie. Aber die weitere Entwickelung der Untersuchungen über die Elastizität (sei es das Suchen nach einer genaueren Darstellung der Eigenschaft dieser Gase, sei es speziell die einer Darstellung der festen und flüssigen Körper) findet ihren konkreten Ausdruck in einer Erklärung nach dem NEWTONschen Typus. Diese erhebt sich, indem sie sich kompliziert, zur mechanischen Wärmetheorie und schließlich zu der abstraktesten Form der energetischen Mechanik, wobei allerdings die Untersuchungen über die Lokalisation und die Bewegung der Energie (die mit den Fortschritten der elektrischen Theorien zusammenhängen) wieder zu der entgegengesetzten Tendenz nach dem CARTESIschen Modell führen.

Ein Fortschritt der mechanischen Erklärung im CARTESIschen Sinne ist deutlicher in den optisch-elektromagnetischen Theorien zu erkennen. Von MAXWELL, W. THOMSON usw. wird der Begriff der Verbindung weiter ausgedehnt. Das Gesichtsbild des Atoms erhält



in den neuesten Entwickelungen eine größere Bedeutung, und doch macht sich die entgegengesetzte Tendenz in einem elektrischen Modell der Dynamik geltend.

Wenn nun auch eine so mannigfaltige und große Gedankenentwickelung nicht zu einem einheitlichen Ergebnis führt, so kann man doch zusammenfassend sagen, daß diese Entwickelungen einerseits zu einer *Vereinheitlichung der Kräfte*, anderseits zu einer *erweiterten Anwendung der Verbindungen* geführt haben, so daß sie sich in verschiedener Weise in einer einheitlicheren und ausgedehnteren Assoziation der Sinnesdaten einander genähert haben.

Diese Betrachtungen werden durch eine Prüfung der verschiedenen Entwickelungen, die sich in den verschiedenen Disziplinen der Physik vollzogen haben, klarer werden. Aber vor allem wird diese Prüfung uns zeigen, daß die mannigfachen partiellen Fortschritte eine kritische Periode der Wissenschaft rechtfertigen, indem der Mangel einer Verifikation eine neue induktive Entwickelung der Mechanik zu erfordern scheint.

## § 9. Die Zurückführung der Kräfte auf den Stoß: die Gravitation.

Die Versuche, die Kraft zu *erklären*, waren im 17. Jahrhundert an der Tagesordnung. Unter dem Einfluß von GASSENDI, DESCARTES, HUYGHENS versuchte man die dynamischen Eigenschaften der Materie zu erklären, indem man auf die antiken Bilder des DEMOKRIT und des EPIKUR zurückgriff: bewegte *Körperchen*, ihr *Stoß* und *Wirbelbewegungen* der umgebenden Flüssigkeiten.

In diesem Gedankengang ist besonders die Hypothese zu bemerken, nach der die allgemeine Gravitation durch den Stoß *kleiner Körper* entsteht, auf der der Erklärungsversuch von FATIO DE DUILLIERS beruht, der später von LESAGE erneuert wurde.

Was bedeutet eine solche Erklärung der Kraft?

Wir beobachten elastische Körper, die bei ihrer Bewegung einander stoßen. Es erscheinen drei Momente des Phänomens: Bewegung, Kraft und wieder Bewegung. Die Kraft, die aus dem Gebiete des Sichtbaren heraustritt, welches sich nacheinander als „Wirkung" und als „Ursache" darstellt, kann in Gedanken von demjenigen unterdrückt werden, der die beiden Momente der Bewegung verbindet, indem er sie durch die deskriptiv betrachtete Tatsache des Stoßes miteinander verknüpft. Man erhält so eine Folge von Gesichtsbildern, deren einmal erkannte Beziehung, die gegebene „Kraft" zu eliminieren und in diesem Sinne zu erklären erlauben würde.

Die Schwierigkeit entsteht bei der Bestimmung dieser Beziehung ohne Benutzung eines Tastmuskelbildes. Wenn man dagegen zu einem solchen greift, indem man die Elementargesetze des Stoßes auf die Betrachtung der elastischen Kräfte gründet, so hat offenbar das erreichte Ergebnis nur einen relativen Reduktionswert.

Bei den Hypothesen von Fatio und Lesage würde diese Reduktion wesentlich sein. Die Newtonsche Kraft, die in der Entfernung wirkt, wäre dargestellt als Wirkung elementarer Kräfte, die in der Berührung wirken (gemäß dem Fortschritt, den im allgemeinen die Darstellung der Ursache anstrebt). Daraus würde sich im speziellen eine Korrektion der Newtonschen Theorie ergeben durch Einführung einer „endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation". Eine Hypothese, die im übrigen bis heute noch keine konkrete Gestalt angenommen hat, die mit den Beobachtungen der Planetenbewegung übereinstimmte (vgl. Kap. V § 29), aber die, wie wir sehen werden, in unseren Tagen in neuer Form wieder erscheint.



## § 10. Die kinetische Gastheorie.

Daniel Bernoulli benutzte im Jahre 1738 in ähnlicher Weise die Stöße beweglicher Partikel zur Erklärung des Gasdrucks. So entstand die *kinetische Gastheorie*, die ein Jahrhundert später von Krönig und Clausius (1856-57) wieder aufgenommen und von Maxwell, Boltzmann und van der Vaals zu größerer Vollkommenheit ausgebildet wurde.

Nach der ursprünglichen Vorstellung Bernoullis bewegten sich die elementaren Körperchen des Gases in gerader Linie bis zum Zusammenstoß mit der Wand des Gefäßes, alle mit einer gleichen und gleichförmigen Geschwindigkeit, aus der sich in natürlicher Weise ein Maß für die Temperatur ergab. Diese Ansicht mußte korrigiert werden, wenn man die Stöße der Moleküle untereinander berücksichtigen wollte, die nicht vernachlässigt werden können, wenn man diesen eine nicht verschwindende Ausdehnung zuschreibt. Durch die Wirkung dieser Stöße müssen die molekularen Geschwindigkeiten, wenn sie auch im Anfang als gleich vorausgesetzt werden, in weiten Grenzen verschieden und als solche in Rechnung gezogen werden.

Es handelt sich dann darum, die mittleren Wirkungen der Erscheinung nach den Gesetzen der *Wahrscheinlichkeit* darzustellen. Speziell liefert der Mittelwert der lebendigen Kraft das natürliche (oder absolute) Maß der Temperatur gemäß dem Jouleschen Gesetz.

Die Folgen dieser Voraussetzungen sind sehr bemerkenswert[1]). Wenn man von den molekularen Dimensionen absieht, so erhält man als *erste Annäherung* die Gasgesetze, die durch die Formel

$$pv = RT$$

1) Vgl. L. Boltzmann: „Vorlesungen über Gastheorie". Leipzig 1896/98.

ausgedrückt werden ($p$ = Druck, $v$ = spezifisches Volumen, $T$ = Temperatur und $R$ = einer Konstanten für alle Gase).

Es sind dies die Gesetze von BOYLE, GAY-LUSSAC und AVOGADRO für die sog. *vollkommenen Gase.*

Dazu kommt die wichtige Beziehung zwischen den beiden spezifischen Wärmen für konstantes Volumen und konstanten Druck ($c_p$, $c_v$) und dem Molekulargewicht ($\mu$):

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu}.$$

Diese Gesetze werden für die wirklichen Gase von der Erfahrung nicht genau bestätigt. Die Abweichungen in verschiedenem Sinne, die mit mannigfachen Bedingungen zusammenhängen, erfordern eine Erklärung, indem man die Theorie für einen *zweiten Annäherungsgrad* aufstellt und, wie BERNOULLI vorausgesehen hat, erhält man schon eine Korrektion, wenn man die Dimensionen der Moleküle berücksichtigt, aber diese ist weit entfernt davon, den Anforderungen des Experimentes zu genügen. Offenbar muß man eine weitere Korrektion suchen, indem man sich auf die Vorstellung dieses Moleküls selbst bezieht, das als eine elastische undurchdringliche Kugel angesehen wurde.

Dieses etwas grobe Bild wird modifiziert werden müssen. In welchem Sinne?

Das Molekül erscheint schon in der Chemie als ein zusammengesetztes mechanisches System, sobald gewisse Erscheinungen die Annahme einer Dissoziation in Ionen nahelegen. Demgemäß benutzte man zur Vervollkommnung der kinetischen Theorie die Hypothese eines mit der Temperatur veränderlichen Wirkungsfeldes von Repulsivkräften, die innerhalb dieses Feldes zwischen den Molekülen wirken. Man richtete auch die Aufmerksamkeit auf ein spezielles Gesetz ($1 : r^5$).



Diese Entwickelungen entfernen sich, wie jeder sieht, von dem CARTESIschen Mechanismus, der sich nach der ursprünglichen Idee dazu eignen sollte, die Kraft zu erklären, welche aus dem Gasdruck entsteht. Sie bezeichnen jedoch einen extensiven Fortschritt der Theorie beim Studium der Eigenschaften der Gase, obgleich ihre Gründer darin übereinstimmen, daß sie den angenommenen Hypothesen einen nur provisorischen Charakter zuschreiben.

## § 11. Die Elastizitätstheorie: die festen Körper.

Nehmen wir anderseits an, daß der einfache Mechanismus, der auf der Hypothese des Stoßes elastischer Kugeln beruht, sich als geeignet erwiesen hätte, das Studium der Eigenschaften der Gase in Übereinstimmung mit den genauesten Experimenten theoretisch fortzuführen.

Nichtsdestoweniger könnte auch dann die elastische Kraft der Gase nicht als vollkommen *erklärt* betrachtet werden, es sei denn, daß man die *Elastizität der festen Körper* als gegeben betrachtet. Von dieser muß man nämlich, wie wir schon bemerkten, notwendig Gebrauch machen, um die Stoßgesetze zu erklären, wenn man diese nicht in abstrakter Weise als ein rein optisches Faktum betrachten will, wobei man das wesentliche Moment der Erscheinung vernachlässigen würde.

Zu derselben Vorstellung gelangt man, wenn man versucht, sich die physikalische Natur der *Verbindungen* allgemeiner vorzustellen, indem man sie auf Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten des Körpers wirken, zurückführt (Kap. V § 24), und indem man speziell die angenäherte Starrheit der festen Körper, die Inkompressibilität der Flüssigkeiten und die daraus sich ergebenden elastischen Reaktionen in diesem Sinne zu erklären sucht.

Die Schwierigkeiten, sich eine derartige Vorstellung von dem festen oder flüssigen Aggregatzustand der Materie zu machen, erscheinen größer als im Falle der Gase.

Wir wollen mit wenigen Strichen die Geschichte dieses Gegenstandes zeichnen.

Angeregt durch die astronomische Theorie NEWTONS und durch einige Bemerkungen dieses Mannes über die Erscheinungen der Kapillarität hat BOSCOVICH (1763) eine allgemeine Vorstellung der Materie erdacht, als eines mechanischen Systems von *Massenpunkten*, die aufeinander Wirkung und Gegenwirkung ausüben, die gleich und entgegengesetzt sind und für jedes Punktepaar die Richtung ihrer Verbindungslinie haben und von ihrer Entfernung abhängen *(Zentralkräfte)*.

Diese Theorie wurde bis zur Behandlung konkreter Probleme von der LAPLACEschen Schule weitergeführt. Diese bildete besonders die Erklärung der Kapillaritätserscheinungen, die von verschiedenen Vorgängern nach dem NEWTONschen Plan behandelt worden waren, zu einem hohen Grade der Vollkommenheit aus.

Und diese Richtung führte bei POISSON zu der Konstruktion einer Theorie, die unter dem Namen der *physikalischen Mechanik* der *analytischen Mechanik* des LAGRANGE entgegengesetzt ist und den Begriff der Verbindung systematisch auf den der Kräfte zurückzuführen sucht.

Im Jahre 1821 unterwarf NAVIER zum erstenmal die Prinzipien der Theorie der Elastizität der festen Körper einer analytischen Behandlung, indem er sich dem POISSONschen Verfahren anschloß. Diese Theorie wurde später in verschiedenen Richtungen von CAUCHY, POISSON, GREEN und LAMÉ weiterentwickelt.

Es ist wichtig, die Ergebnisse dieser Untersuchungen etwas näher zu prüfen. Denken wir uns die folgenden Hypothesen zugrunde gelegt:



a) 1. Die materiellen Punkte, aus denen ein fester Körper besteht, befinden sich im Gleichgewichtszustand in Ruhe.
   2. Die Verteilung der Materie ist homogen.
   3. Die inneren Kräfte entstehen aus elementaren Wirkungen zwischen den Teilen des Körpers und sind zentral.

Man kann dann die *Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer fester Körper* hinschreiben und in diesen kommen 15 voneinander unabhängige Koeffizienten vor. Wenn der Körper *isotrop* ist, so reduzieren sich die Koeffizienten auf einen einzigen, und man findet speziell, daß der Koeffizient der kubischen Kompressibilität und der des Zuges sich wie 3 : 2 verhalten.

Diesen Folgerungen aus der Theorie von NAVIER und POISSON stehen die Ergebnisse der allgemeineren Behandlung des Problems nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit (Kap. V § 26) entgegen.

Es werde angenommen, daß:

b) 1. die Punkte eines festen elastischen Körpers außer den äußeren und den Massenkräften *inneren Kräften* unterworfen sind, über deren Ursprung man keine Annahme macht;
   2. die Arbeit der inneren Kräfte von der Deformation des Volumenelementes abhängt und deshalb, wenn man von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung absieht, sich durch eine quadratische Form in den sechs Deformationskomponenten, d. h. in den Veränderungen der Seiten und Winkel eines Parallelepipeds ausdrücken.

Dann führt (nach GREEN) das Prinzip der virtuellen Arbeit zu allgemeineren Elastizitätsgleichungen, in denen statt 15 21 unabhängige Koeffizienten vorkommen; im Falle der isotropen Körper hat man *zwei* unabhängige

Koeffizienten, deren Verhältnis einen beliebigen Wert haben kann.

Nun entspricht die größere Allgemeinheit in dieser Theorie in Wahrheit unmöglichen Fällen. Während nämlich die Elastizitätskoeffizienten der Metalle bis zu einem gewissen Grade mit den Voraussagen der ersten Theorie übereinstimmen, so findet der Fall eines fast imkompressiblen festen Körpers, wie der Gelatine, darin keinen Platz.

Es bleibt deshalb zu erklären, in welcher Weise die Hypothesen a) modifiziert werden müssen.

Zu diesem Zwecke hat man eine Abänderung der Hypothese 3. vorgeschlagen, die auch in einigen der angesehensten neueren Lehrbüchern vorkommt. Sie besteht in folgenden Annahmen:

3'. Die Kraft, die auf einen Massenpunkt des festen Körpers wirkt, hängt *von der Gesamtheit* der benachbarten Teile ab und kann nicht zerlegt werden in eine Resultante von elementaren Wirkungen, oder

3''. Die Kräfte, die zwischen den Punkten des festen Körpers wirken, sind keine Zentralkräfte.

Diese Hypothesen widersprechen direkt der klassischen Statik. Die erste leugnet das Prinzip der Resultante, die zweite das statische Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung!

Man hat natürlich versucht, einem solchen Ergebnis auszuweichen. Poisson machte schon einen derartigen Versuch, indem er die *Formen* der Partikelchen berücksichtigte; aber allerdings erscheinen derartige Betrachtungen ein wenig künstlich.

W. Thomson hat eine befriedigendere Lösung gezeigt, indem er vorschlug, die Hypothese a) 2. oder a) 1. und vor allem diese letztere zu modifizieren.

Die Annahme, daß die Massenpunkte eines festen Körpers beim Gleichgewicht wirklich in Bewegung sind,



d. h. daß da, wo wir Ruhe sehen, es sich um ein *statistisches Gleichgewicht* handelt, im Sinne der kinetischen Gastheorie, ist eine Art, die Schwierigkeit zu beseitigen, die auf den ersten Blick kühn erscheinen könnte, die aber durch die mechanische Wärmetheorie eine Bestätigung erhält.

Wenn wir diese Modifikation annehmen, so kann man die Zentralkräfte, die zwischen den bewegten Punkten wirken, nicht in jedem Moment durch gleichfalls zentrale Kräfte ersetzen, die zwischen ihren mittleren Lagen wirken. Dadurch erklären sich die Hypothesen 3'- und 3''. als schematische Vereinfachungen der Darstellung.

Aus der vorstehenden Diskussion ergibt sich, in welcher Weise die Hypothese eines Newtonschen Mechanismus die Elastizität der festen Körper in demselben Sinne zu erklären erlaubt, wie das Prinzip der virtuellen Arbeit.

Und das, was wir für die festen Körper gesagt haben, könnte man für die flüssigen wiederholen.

Immerhin wird man dieser *kinetischen Theorie der Materie* den Vorwurf machen, daß sie im allgemeinen wenig fruchtbar an positiven Konsequenzen ist, obgleich die Darstellung, die sie liefert, sich an die mechanische Wärmetheorie anschließt.

Wir werden im kurzen auf diesen Gegenstand zurückkommen. Zunächst wollen wir aber einen Einwand prüfen, der der allgemeinen Elastizitätstheorie entgegengehalten wird und der durch die Erfahrung angeregt wird.

## § 12. Bleibende Veränderungen.

Die Grundhypothese, die gestattet, die Arbeit der inneren Kräfte eines elastischen Körpers bei einer unendlich kleinen Deformation zu berechnen, besteht in der Annahme, daß diese für jedes Element von der

*augenblicklichen lokalen* Deformation abhängt und nicht von derjenigen des übrigen festen Körpers und auch nicht von der Reihe der *vorhergehenden Konfigurationen*, durch die der feste Körper selbst hindurchgegangen sein mag.

Eine unangenehme Folge dieser Hypothese ist, daß, wenn die deformierende Kraft zu wirken aufhört, der elastische Körper seinen ursprünglichen Zustand (den *natürlichen*) wieder annehmen muß, und daß im allgemeinen die elastischen Deformationen, die er erleidet, seine Elastizität nicht beeinflussen dürfen.

Nun widersprechen diesen Folgerungen direkt die *bleibenden Veränderungen*, die man nach Analogie mit den von Ewing als *magnetische Hysteresis* bezeichneten Erscheinungen auch als Erscheinungen der *elastischen Hysteresis* bezeichnet, und es handelt sich dabei um einen Widerspruch, der die Grundlage der mechanischen Theorie der Elastizität berührt.

G. Robin hat in seinen Vorlesungen über allgemeine Thermodynamik den Umstand betont, daß die Prinzipien der Mechanik eine Hypothese der *Nichterblichkeit* enthalten. Denn es wird darin postuliert, daß der zukünftige Zustand eines Systems von den *augenblicklichen* statischen Bedingungen abhängt. Und in einigen überzeugenden Abschnitten seines neuesten Buches über „La science moderne et son état actuel"[1]) entwickelt E. Picard interessante Betrachtungen über eine Mechanik, in der man im Gegenteil die *Erblichkeit* zu berücksichtigen hat: gewisse *Funktionalgleichungen* würden dann an Stelle der klassischen *Differentialgleichungen* treten.

Die bleibenden elastischen Veränderungen, wie im allgemeinen die Erscheinungen der Hysteresis, scheinen eine solche tiefgehende Modifikation zu erfordern.

1) Paris, Flammarion.



Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß es sich nur um Fälle von *scheinbarer Erblichkeit* handelt.

Um diese Fälle in der klassischen Mechanik unterzubringen, genügt in der Tat die Annahme, daß man nicht *alle* in Betracht kommenden Elemente, welche die Erscheinung bestimmen, berücksichtigte, d. h. es genügt, das System als *Teil eines umfassenderen Systems* zu betrachten, auf welches die mechanischen Postulate Anwendung finden.

Diese Art, die Schwierigkeit aufzulösen, könnte zu vielen Überlegungen Anlaß geben. Wir wollen aber für den Augenblick diese *abweichenden Fälle* beiseite lassen, indem wir uns vorbehalten, sie später bei den Endergebnissen unserer Kritik wieder in Betracht zu ziehen.

Und wir wollen von der kinetischen Theorie der Materie zu den thermodynamischen Entwickelungen übergehen, die sich daran knüpfen.

## § 13. Die mechanische Wärmetheorie: die Erhaltung der Energie.

Wenn, wie schon Descartes annahm, die Wärme eine ungeordnete Bewegung der elementaren Teilchen der Materie ist und diese Bewegung sich durch Zentralkräfte erklären läßt, so muß ein *mechanisches Wärmeäquivalent* existieren. Diese Folgerung ist implizite in dem Prinzip der lebendigen Kräfte (Kap. V § 28) enthalten. Sie geht um ein Jahrhundert der Entdeckung der *Erhaltung der Energie* voraus.

Über das Verdienst an dieser Entdeckung herrscht zwischen verschiedenen Forschern Streit, und an die Frage der Priorität knüpft sich das für den Philosophen interessantere Problem der Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen der theoretischen Spekulation und der

experimentellen Forschung. Ohne nun in eine allzu genaue Erörterung einzutreten, wollen wir folgendes sagen:

Die Vorstellung der ***Wärmeflüssigkeit***, durch die die ersten kalorimetrischen Untersuchungen von BLACK und CRAWFORD veranlaßt waren, ist als der Hauptgrund dafür anzusehen, daß die Erkenntnis der Äquivalenz zwischen Wärme und Arbeit derjenigen des Prinzips der lebendigen Kräfte erst so spät gefolgt ist.

Jene Vorstellung wurde unmittelbar erschüttert durch die Experimente von RUMFORD und DAVY, der 1812 wieder zu der Betrachtung der Wärme als einer Form der Bewegung zurückgeführt wurde. Dennoch halten die Untersuchungen über die thermischen Maschinen, die SADI CARNOT 1824 vornahm, noch immer das Bild der unzerstörbaren Wärmemenge fest. Erst einige Jahre später rektifizierte CARNOT diese Ansicht und gelangte zur Anerkennung eines mechanischen Äquivalentes der Wärme. Aber seine Aufzeichnungen über diesen Gegenstand blieben während 40 Jahren noch nach seinem Tode, der 1832 eintrat, unveröffentlicht.

In dem Dezennium zwischen 1830 und 1840 näherten sich verschiedene Denker der Vorstellung, daß die Wärme Bewegung sei und entnahmen daraus die Ansicht von der Erhaltung dessen, was man heute ***Energie*** nennt. Wir erwähnen z. B. eine Arbeit von MOHR (1837), die von TAIT wieder aufgefunden wurde.

Daraus ergibt sich, daß die mechanische Vorstellung der Wärme mehr oder weniger implizite als Leitgedanke bei der Forschung nach einer Äquivalenz zwischen Wärme und Arbeit anzusehen ist und deshalb als eine Vorbereitung zu betrachten ist auf die Entdeckung, die sich an die Namen MAYER (1842), JOULE und COLDING (1843) knüpft.

Ohne die respektiven Verdienste dieser drei Entdecker einer Diskussion zu unterwerfen, genügt es, zu



konstatieren, daß, welches auch ihre persönlichen Ansichten gewesen sein mögen, sie sich vor einer *bereits gestellten Frage* sahen. Gerade in der Fragestellung erkennt man den Einfluß der Theorie auf die experimentelle Forschung, d. h. den heuristischen Wert des Modells, das aus der Wärme eine Form der Bewegung macht.

Vergebens würde man gegen diese Behauptung die persönlichen Ansichten MAYERS anführen, der eine solche mechanische Vorstellung ablehnte; um so mehr als in der Untersuchung MAYERS sich schon von vornherein das Postulat der Erhaltung von etwas Gemeinsamem zwischen Arbeit und Wärme herausstellt und die numerische Bestimmung des thermodynamischen Äquivalents ohne Beweis dieses Faktums aus der Vergleichung der spezifischen Wärmen der Luft geführt wird.

Die Beziehung zwischen dem Prinzip der Äquivalenz und der mechanischen Wärmetheorie scheint von JOULE und COLDING klar aufgefaßt worden zu sein und erscheint in noch klarerem Lichte in den Arbeiten von HELMHOLTZ (1847). Wenn man jedes isolierte System als einen NEWTONschen Mechanismus betrachtet, so daß ein Potential oder eine potentielle Energie (deren lokale Variation die Kraft mißt) existiert, so kann man die *Gesamtenergie* des Systems betrachten, d. h. die Summe dieser potentiellen Energie und der kinetischen Energie oder lebendigen Kraft, die in verschiedene *Energien* zerfällt, welche ihre eigene physikalische Bedeutung haben: in eine in die Erscheinung tretende mechanische Energie (kinetische und potentielle), eine thermische Energie oder Wärmemenge und im allgemeinen in andere Energieformen (elektrische, Lichtenergie usw.). Die Summe der verschiedenen genannten Energien bleibt konstant.

Dies ist das allgemeine Prinzip der *Erhaltung der Energie*, das die thermodynamische Äquivalenz als Spezialfall umfaßt.

Wir wollen ausdrücklich hervorheben, daß das Prinzip der Erhaltung der Energie heute als ein *experimentelles Prinzip* anzusehen ist, das von der Hypothese der Zentralkräfte unabhängig ist.

Eine solche Behauptung widerspricht nicht dem erkannten Zusammenhange zwischen dieser Hypothese und dem Prinzip. Dieses ist eine Folge von jener, aber nicht umgekehrt. Wenn demnach mannigfache und untereinander übereinstimmende Experimente das Energieprinzip direkt bestätigen, so wird dadurch die Gültigkeit des Prinzips selbst auf eine neue Grundlage gestellt, während die anfängliche Hypothese, die zu seiner Entdeckung führte, nur eine unvollkommene und indirekte Bestätigung erhält.

Nun beruht das übereinstimmende Vertrauen auf das Energieprinzip auf zwei Arten von Beweisen:

1. den direkten Experimenten von JOULE, HIRN usw., durch die das mechanische Wärmeäquivalent durch die verschiedensten Verwandlungen der Energie hindurch wiedergefunden wird.
2. dem indirekten Beweis von HELMHOLTZ, der das Prinzip der Erhaltung der Energie aus der *Unmöglichkeit des Perpetuum mobile* bewiesen hat, wobei er diese Unmöglichkeit als bewiesen annahm durch eine kritische Prüfung der unfruchtbaren Versuche, die sich auf das genannte Problem beziehen.

## § 14. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik entspringt offenbar nicht aus mechanischen Vorstellungen der Wärme, sondern wird nahegelegt durch die Analogie des „Temperaturgefälles" mit der Bewegung einer Flüssigkeit. Wir werden auch sehen, welche Schwierigkeiten sich seiner Vereinigung mit dem Mechanismus entgegenstellen.



Seine Entdeckung knüpft sich an die Untersuchungen von SADI CARNOT über die thermischen Maschinen. Es war nur nötig, die aus diesen bei der Hypothese der Wärmeflüssigkeit erhaltenen Resultate zu berichtigen, indem man sie mit dem Prinzip der Äquivalenz von Wärme und Arbeit in Übereinstimmung brachte. Dies tat CLAUSIUS 1850.

Das Grundpostulat von CLAUSIUS ist, daß „die Wärme nicht ohne Anwendung von Arbeit und ohne daß gleichzeitig andere Wärme von einem dritten zu einem vierten Körper von niedrigerer Temperatur übergeht, von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen kann". Aus diesem Postulate kann man ein äquivalentes Prinzip ableiten, das die *Unmöglichkeit des sogenannten Perpetuum mobile der zweiten Art* ausdrückt, d. h. „es ist nicht möglich, Wärme dadurch in Arbeit zu verwandeln, daß man die Wärme aus einer einzigen Quelle von gleichmäßiger Temperatur entnimmt".

Wenn man dieses Prinzip mit dem der Äquivalenz kombiniert, so gelangt man zu dem CARNOT-CLAUSIUSschen *Satz*, den wir in seiner allgemeinsten Form auf die reversiblen Kreisprozesse bezogen aussprechen werden, indem wir einige Einschränkungen von sekundärer Bedeutung, die man bei seinem Beweise benutzt, beiseite lassen.

Es sei ein System von Körpern gegeben, das nach einem geschlossenen Kreisprozesse von reversibeln Umwandlungen zu seinem ursprünglichen Zustand zurückkehrt. Wenn man dann längs der Transformationslinie $s$ die Wärmemenge $Q$ und die (absolute) Temperatur $T$ des Systems berechnet, so erhält man

$$\int_s \frac{dQ}{T} = 0.$$ [1]

1) Wenn die Temperatur nicht gleichförmig ist, so muß man das System in eine entsprechende Anzahl elementarer Teile einteilen und die Summe der CLAUSIUSschen Integrale betrachten. Vgl. „POINCARÉ „Thermodynamique". CARRÈ, Paris 1892, S. 224.

Wenn man folglich das CLAUSIUSsche Integral $s = \int \frac{dQ}{T}$ längs eines offenen Kreisprozesses von reversibeln Transformationen berechnet, so erhält man eine Größe, die nur von dem Zustande des Systems und nicht von der Reihe der ausgeführten Transformationen abhängt. Diese Größe erhält den Namen der *Entropie*.

Der CARNOT-CLAUSIUSsche Satz kann als zweiter Hauptsatz der Thermodynamik betrachtet werden, und es handelt sich nun darum zu untersuchen, auf welche Weise man eine mechanische Erklärung für ihn liefern kann.

Machen wir die Annahme, daß die Wärme der sinnliche Ausdruck für *innere* (unsichtbare) *Bewegungen* der Moleküle ist. In den thermodynamischen Transformationen eines Körpers werden wir dann ein mechanisches System erblicken, für das man zwei Komponenten der Gesamtenergie unterscheiden kann:

1. die *innere* Energie, die durch die *Wärmemenge* $Q$ dargestellt wird;
2. die *äußere* kinetische Energie, die von der sichtbaren Bewegung des Systems herrührt.

Aber diese zweite Energie kann gegenüber der ersten vernachlässigt werden, wenn man sich darauf beschränkt, *langsame Transformationen* zu betrachten, wo die Geschwindigkeiten der sichtbaren Bewegung, verglichen mit den molekularen Geschwindigkeiten, sehr klein sind.

Um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik mechanisch zu deuten, muß man also den dynamischen Ausdruck für eine Größe suchen, welche die Temperatur $T$ darstellt und die für jede elementare Transformation ein integrierender Teiler der Variation $dQ$ ist.

Wenn man außerdem gemäß dem Gesichtspunkt der kinetischen Gastheorie das thermische Gleichgewicht als ein *statistisches* ansieht, so muß die Grundeigenschaft



der Temperatur erfüllt sein, d. h. wenn man zwei in statistischem Gleichgewicht befindliche Systeme, deren Zustand demselben Werte von $T$ entspricht, vereinigt, so muß man gleichfalls ein System im statistischen Gleichgewicht erhalten, dem derselbe Wert von $T$ zukommt.

Die Darstellung der Gase, wie sie von der kinetischen Theorie (§ 10) gegeben wird, führt zu einer Definition der (absoluten) Temperatur $T$, bei der die ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß die kinetische Hypothese die *Gesetze der vollkommenen Gase* enthält.

Die mechanische Darstellung der tropfbarflüssigen und der festen Körper läßt sich weniger leicht mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Einklang bringen.

Die wichtigsten Versuche, einen Mechanismus zu konstruieren, der geeignet ist, diese Körper vorzutäuschen, verdankt man BOLTZMANN (1866), CLAUSIUS (1871), H. HELMHOLTZ[1]) (1884) und J. W. GIBBS[2]) (1902).

Diese Versuche und besonders jene bemerkenswertesten der beiden zuletzt angeführten Autoren lassen die gewünschte mechanische Erklärung als möglich erscheinen, wenn sie gleich keine vollkommen befriedigende Antwort auf das Problem liefern.

In den von HELMHOLTZ konstruierten Mechanismen (*monozyklischen Systemen*, in denen verborgene stationäre Bewegungen, z. B. Wirbel- oder Schwingungsbewegungen stattfinden) gelingt es, $T$ zu definieren als proportional der mittleren kinetischen Energie der Moleküle, so daß

---

1) „Wissenschaftliche Abhandlungen" Bd. III, S. 176. Vgl. H. POINCARÉ „Thermodynamique" S. 392.

2) „Elementary Principles in Statistical Mechanics" New York und London. Vgl. T. DUHEM l. c.

es für jede elementare Transformation ein integrierender Teiler der Variation $dQ$ wird; aber man sieht nicht recht, wie $T$ die zweite oben angeführte Grundbedingung erfüllt.

GIBBS hat sich vor allen Dingen bemüht, dieser Bedingung zu genügen und hat dies unter sehr allgemeinen Voraussetzungen erreicht, indem er Systeme betrachtete, die aus einer ungeheuren Zahl von sehr verschiedenen Elementen (Körpern) bestehen. Unglücklicherweise entfernen sich diese Systeme von der NEWTONschen Form des Mechanismus; denn es treten dabei Kräfte auf, die von festen Zentren ausgehen, anstatt der gegenseitigen Einwirkungen der in Bewegung befindlichen Teile.

Wenn in den GIBBSschen Systemen eine besondere Bedingung (die *kanonische Verteilung*) erfüllt ist, so kann man also eine gewisse Größe (den *Verteilungsmodul*) $T$ definieren, der die erwähnte Grundeigenschaft besitzt. Damit die Vereinigung zweier im statistischen Gleichgewicht befindlicher Systeme mit kanonischer Verteilung wieder ein kanonisches System in statistischem Gleichgewicht ergibt, ist es notwendig und hinreichend, daß die beiden Systeme denselben Verteilungsmodul besitzen. Allerdings stimmen die Gleichungen des statistischen Gleichgewichts für die GIBBSschen Systeme nicht genau mit denen der Thermodynamik überein, vielmehr kommt darin eine Abweichung vor, die allerdings um so geringer wird, je mehr die Zahl der Parameter wächst, von denen die Bestimmung eines jeden Elementes des Systemes abhängt, so daß die *thermodynamischen Gesetze hier als Grenzfälle der mechanischen erscheinen.*

## § 15. Die irreversibeln Erscheinungen.

Es wäre gewagt, aus diesem Ergebnis irgendeinen Schluß ziehen zu wollen. Offenbar stellen die von GIBBS erdachten Systeme nicht die einzig mögliche mechanische



Illustration der thermodynamischen Gesetze dar. Es scheint demnach nicht ausgeschlossen, daß man auch, ohne die NEWTONsche Formel des Mechanismus zu verlassen, zur Konstruktion eines hinreichend allgemeinen mechanischen Modells gelangen kann, das den gewünschten Bedingungen genau entspricht.

Aber es gibt noch eine andere Seite des Problems, die unsere Aufmerksamkeit erfordert.

Bisher haben wir nur reversible thermodynamische Vorgänge betrachtet. Nun ist dies nur ein Grenzfall des allgemeinen Falles, in dem man irreversible Erscheinungen hat, für die der CARNOT-CLAUSIUSsche Satz dahin abgeändert werden muß, daß an die Stelle der oben betrachteten Gleichung eine Ungleichung tritt. Wenn man dann auch für diesen Fall die Veränderung der Entropie definiert[1]), so gelangt man zu dem folgenden Resultat:

*Bei jeder irreversiblen Transformation eines isolierten Systems nimmt die Entropie beständig zu.*

Es scheint demnach dieselbe Tendenz alle Naturerscheinungen in einem bestimmten Sinne zu beherrschen.

Wie stimmt dieses mit der mechanischen Darstellung überein?

Eine der unangenehmsten Konsequenzen der den LAGRANGEschen Gleichungen eigentümlichen Form ist die Umkehrbarkeit der Bewegungen. Demnach kann kein Mechanismus, sofern er gemäß den Prinzipien der Dynamik diesen Gleichungen gehorcht, ein Beispiel von irreversiblen Vorgängen bieten.

Es scheint auf den ersten Blick, als könne diese Schwierigkeit nicht beseitigt werden. Nichtsdestoweniger hat man zwei Erklärungen vorgeschlagen, um das Paradoxon zu beseitigen.

---

1) Vgl. POINCARÉ, Op. c. S. 229.

HELMHOLTZ bemerkt, daß die Reversibilität nur den *vollständigen* mechanischen Systemen zukommt; in *unvollständigen* Systemen ist eine scheinbare Irreversibilität möglich. Dies ist z. B. bei dem FOUCAULTschen Pendel der Fall, wegen der Bewegungen der Erde, die das System vervollständigen.

Wir können nun annehmen, daß die uns von der Erfahrung gegebenen irreversibeln Vorgänge nur der sichtbare Teil der vollständigen Erscheinungen sind, in denen *verborgene Bewegungen* eine Rolle spielen. Die Irreversibilität würde deshalb nur die Erscheinung von Tatsachen sein, die in ihrer Gesamtheit reversibel wären.

Man darf sich über die Tragweite dieser Erklärung keine Illusionen machen. DUHEM bemerkt richtig, daß sie zwar von der Existenz irreversibler Vorgänge Rechenschaft gibt, uns aber nicht sagt, weshalb diese sämtlich einer gemeinsamen Tendenz gehorchen; warum man neben den scheinbar isolierten Systemen, in denen die Entropie wächst, nicht auch solche findet, in denen das Gegenteil der Fall ist.

Etwas befriedigender ist die Erklärung der Irreversibilität, die von den Begründern der kinetischen Gastheorie vorgeschlagen wurde.

Betrachten wir ein System, das besteht aus einer ungeheuren Anzahl von Elementen, die sich auf jede mögliche Weise bewegen, z. B. jenes, das wir als Modell eines Gases bezeichnet haben. Eine Transformation des Systems entspricht dem Übergang von einem Zustand zu einem anderen, wobei jeder Zustand definiert ist durch die Geschwindigkeit der Elemente nach Größe und Richtung.

In Ermangelung einer genauen Kenntnis des Prozesses ist es unmöglich zu sagen, welche Veränderung das System nach einer Zeit erfahren haben wird. Aber in der Gesamtheit der möglichen Veränderungen erscheinen



diejenigen am *wahrscheinlichsten*, die sich einer Verteilung der Geschwindigkeiten nähern, welche von MAXWELL angegeben wurde und für die eine gewisse Funktion $H$ (die somit die Rolle der Entropie spielt) ein Maximum wird, entsprechend einem Zustand vollkommener *Unordnung* des Systems.

Man kann also behaupten, daß nach einer hinreichend langen Zeit $t$ das System eine Veränderung erlitten haben wird, die sehr wahrscheinlich im Sinne eines Anwachsens von $H$ liegt; allerdings wäre eine solche Veränderung immer noch theoretisch umkehrbar; aber die entgegengesetzte Transformation kann nicht als ebenso wahrscheinlich wie die gegebene betrachtet werden, weil die Fortsetzung der letzteren für einen größeren Wert von $t$ wahrscheinlich zu einem ungeordneten Zustand führen würde, für den $H$ einen größeren Wert hätte.

Wir wollen uns bei den schwierigen Punkten dieser Überlegung aufhalten.

Obgleich die möglichen Transformationen unseres Systems sich paarweise darstellen, indem neben jeder die umgekehrte steht, folgt doch daraus nicht, daß jede von ihnen ebenso wahrscheinlich ist wie ihre Umkehrung. Diese Folgerung wäre nur berechtigt, wenn die Transformationen in endlicher Anzahl vorhanden wären, während ihre Anzahl doch unendlich ist. Die Umkehrbarkeit erscheint so als eine mittlere Wirkung in einer Reihe von Erscheinungen, die jede für sich umkehrbar sind. Von dieser Seite ist dagegen nichts einzuwenden.

Wir wollen jedoch den Charakter der so erhaltenen Erklärung enthüllen. Sie fügt zu der mechanischen Darstellung das experimentelle Prinzip hinzu, nach dem in einer großen Zahl von Fällen das Gesetz der Wahrscheinlichkeit erfüllt ist.

Dieses Prinzip setzt anderseits eine Gleichheit der Bedingungen voraus, unter denen die angegebenen ele-

mentaren Erscheinungen sich vollziehen, deren mittlere Wirkung man sucht. Wer versichert uns nun, daß eine ursprüngliche Verteilung unseres Mechanismus diese Gleichheit nicht zerstören und folglich das erwähnte Gesetz unanwendbar machen könnte? BOLTZMANN (op. c.) gibt in diesem Punkte zu, daß die Theorie auf einer Hypothese beruht. Wir glauben, daß eine genauere Bestimmung derselben wünschenswert ist.

Man kann jedenfalls nicht den Wert einer Erklärung leugnen, die sich als geeignet erweist für das Studium der konkreten Fälle, indem man mit ihrer Hilfe z. B. eine kinetische Theorie der Diffusion der Gase konstruiert und so einen irreversibeln Vorgang mechanisch darstellt.

Anderseits darf man sich nicht darüber beklagen, daß die mechanische Theorie der irreversibeln Transformationen unter besonderen Bedingungen eine Umkehrung des natürlichen Verlaufes der Erscheinungen im Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik als möglich erscheinen läßt. Wer versichert uns, daß das CLAUSIUSsche Postulat nicht irgendwelche Ausnahmen erleidet? z. B. bei den Lebenserscheinungen?

Unwillkürlich denkt man hier an die MAXWELLsche Vorstellung des Dämonen als Verteilers der Energie. Indem er in einem Gase die mit größerer Geschwindigkeit begabten Moleküle auswählt und von den übrigen trennt, könnte dieser Dämon die Temperatur von einem Teil desselben auf Kosten des anderen erhöhen, ohne irgendwelche Arbeit zu leisten.

Aber eine solche Erscheinung scheint notwendig eine *Kraft der Auswahl* zu erfordern.

G. LIPPMANN[1]), der die Benutzung eines solchen Mittels verschmähte, hat einen idealen Versuch vorgeschlagen, durch den man unter Voraussetzung der kinetischen Theorie einem Gase von gleichförmiger Temperatur Wärme entnehmen könnte, indem man es in ein Magnetfeld bringt und so das Postulat von CLAUSIUS widerlegen könnte. Es handelt sich darum, die alternierenden induzierten Ströme zu benutzen, die durch die Bewegung der von den Molekülen mitgeführten elektrischen Ladungen erzeugt werden, wobei man die kleinen Unterschiede in der Verteilung der Geschwindigkeiten berücksichtigt.

1) Rapports du Congrès international de Physique. Paris 1900. Bd. I.



In Wirklichkeit würde diese Wirkung nicht merkbar gemacht werden können und folglich keinen eigentlichen Widerspruch gegen den thermodynamischen Hauptsatz darstellen, wenn man denselben in seiner realen Bedeutung als Erfahrungstatsache nimmt. Aber wenn wir uns nicht täuschen, kann man der Überlegung LIPPMANNS eine andere Bemerkung entgegenhalten; ein Gas von *gleichförmiger* Temperatur läßt nach der kinetischen Theorie immer sehr kleine Temperaturunterschiede an verschiedenen Punkten zu. Es scheint also, daß diese Unterschiede, die sich immer mehr ausgleichen, wie ein unendlich kleines Temperaturgefälle zur Hervorbringung von Wirkungen derselben Ordnung benutzt werden können, ohne daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik dadurch verletzt würde.

## § 16. Energetische Mechanik.

Wir wollen die vorstehenden Entwickelungen über die Elastizität und die Wärme als einen Versuch betrachten, die NEWTONsche Mechanik einer erweiterten Verifikation zu unterwerfen.

Die Möglichkeit der Verifikation bleibt abhängig von der Annahme *verborgener Bewegungen*. Wir werden sehen, wie diese Annahme in den elektromagnetischen

Theorien eine Erweiterung erfährt, in dem dort auch *verborgene Massen* postuliert werden.

Nun enthält diese hypothetische Konstruktion einer unsichtbaren Welt, verglichen mit den Erfahrungstatsachen, die sie als Folge der angenommenen Prinzipien erklären will, eine um so unbegrenztere Willkür, als uns die irreversibeln Vorgänge zwingen, die verborgenen Bewegungen zu vervielfältigen und nur ihre *mittleren Wirkungen* gemäß dem Gesetz der großen Zahlen zu berücksichtigen.

Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, erhält die Physik den Charakter einer *Schranke* für die Mechanik und deren Verifikation mangelt vollständig, da sich eine *Modifikation der mechanischen Prinzipien als möglich* erweist, die so beschaffen ist, daß sie bei der Mittelbildung nicht in Erscheinung tritt.

Der vorstehende Schluß kann ausgedrückt werden, indem man sagt, daß die mechanische Erklärung der physikalischen Erscheinungen *indifferente Hypothesen* enthält in bezug auf die Folgen, die die allgemeinen Prinzipien der Erscheinungen selbst bilden.

Durch das Bestreben, *das Indifferente zu eliminieren*, wird eine neuere induktive Entwickelung der Dynamik gerechtfertigt, bei der diese Prinzipien als allgemeinste Voraussetzungen an die Stelle der Newtonschen treten. Dieser Entwickelung begegnen wir in der Konstruktion einer *energetischen Mechanik*, die ihre Entstehung Helmholtz verdankt.

Denken wir sie uns ausgehend von einem Newtonschen Mechanismus, d. h. von einem System bewegter Punkte, zwischen denen Zentralkräfte wirken; dann ist eine *potentielle* und eine *kinetische Energie* definiert, die nach den verschiedenen mechanischen Darstellungen eine unmittelbare physikalische Bedeutung erhalten, indem sie zu meßbaren Größen werden, und man kann die folgenden fundamentalen Postulate aufstellen:



1. Die Summe der beiden Energien ist in jedem isolierten System konstant *(Erhaltung der Energie)*.
2. Die Veränderung findet so statt, daß das Mittel aus den Unterschieden zwischen den beiden Energien in jedem Zeitintervall ein Minimum wird (Hamiltonsches *Prinzip*).

Die größere Allgemeinheit dieser Postulate im Vergleich mit der klassischen Mechanik ergibt sich aus den folgenden Bemerkungen:

a) Jede Art von Erscheinungen, für die man zwei Arten von Energie definieren kann, die als kinetische und potentielle zu unterscheiden sind, so daß die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, gestattet *eine und folglich auch unendlich viele mechanische Erklärungen* (Poincaré).

b) Eine energetische Erklärung einer Art von Erscheinungen kann auch einem hypothetischen Mechanismus entsprechen, für den die dynamischen Grundsätze nicht gelten.

Immerhin muß man dabei eine mechanische Erklärung gemäß der klassischen Dynamik im Auge haben; und es ist zu bemerken, daß als energetische Erklärung *nur eine solche* gelten kann, für die die Kräfte ein Potential besitzen, d. h. für die das Prinzip der lebendigen Kraft gilt (Kap. V § 28).

Die Energetik ist also nur eine allgemeinere Mechanik, wenn man den Fall der Kräfte ohne Potential ausschließt, welcher Fall, wenn die Erscheinungen dem Gesetz der Erhaltung der Energie nicht gehorchen, als ein Kunstgriff bezeichnet werden kann, der dazu dient, eine engere Mechanik der unvollständigen Systeme abzugrenzen und in dieser das zu ersetzen, was von nicht eigentlich mechanischen Energieformen herrührt.

## § 17. Materie und Energie.

Die energetische Mechanik stößt, wie die klassische, auf die Schwierigkeit, die irreversibeln Erscheinungen nicht erklären zu können, und wenn sie die Mittelbetrachtungen und Grenzübergänge vermeiden will, so ist sie gezwungen, *qualitativ verschiedene Energieformen* anzunehmen, und folglich neue Postulate über ihre Transformation aufzustellen. In diesem Sinne gehen in utilitaristischer Absicht gewisse neuere Arbeiten auf dem Gebiete der physikalischen Chemie vor.[1])

Es ist nicht unsere Absicht, diese zu prüfen. Wir wollen vielmehr hier unter verschiedenen Gesichtspunkten die Grundbegriffe der energetischen und der klassischen Mechanik einander gegenüberstellen.

Wir haben schon hervorgehoben (Kap. V § 20), daß die Kritik der die Bewegung bestimmenden Umstände auf folgende Unterscheidung gerichtet ist; nämlich zu unterscheiden:

1. die *inneren* Eigenschaften des bewegten Körpers, auf die sich die Vorstellungen beziehen, die zu dem Begriff der *Masse* führen,
2. die *äußeren* Beziehungen, d. h. das *Kraftfeld*, in dem der Körper sich bewegt.

Die Ausdrücke „innen" und „außen" haben hier eine relative Bedeutung. Als innere Bestandteile werden diejenigen betrachtet, die durch Experimente *an dem Körper* selbst geliefert werden, wobei zwar *andere* Körper (Instrumente usw.) eine Rolle spielen, die Experimente aber von der Bewegung, deren Bestimmung geschehen soll, unabhängig sind, die also nach Belieben an dem Körper vorgenommen werden können, z. B. im Zustand der Ruhe. Als äußere Daten werden demgegenüber diejenigen Bedingungen des bewegten Körpers betrachtet, deren Wirkung man konstatieren kann, indem man in das Feld einen beliebigen anderen Körper (von gleicher Masse) bringt. Durch Abstraktion betrachtet man diese bis zu einem gewissen Grade von dem Körper unabhängigen Daten als äußere.

1) Vgl. Duhem a. a. O.



Wir haben nun schon Gelegenheit gehabt, zu bemerken, daß diese schematische Unterscheidung nur unvollkommen der Wirklichkeit entspricht, wenn man die bekannten Tatsachen in ihrer weitesten Ausdehnung betrachtet. Einerseits nämlich führt uns die Vergleichung der Massen chemisch nicht aufeinander zurückführbarer Körper zu Bewegungsexperimenten, bei denen mindestens implizite die Kräfte eine Rolle spielen. Anderseits zeigen uns bereits die Newtonschen Kraftfelder eine Abhängigkeit der als äußeres Datum aufgefaßten Kraft von der Masse, auf welche sie wirkt, und die elektrischen usw. Erscheinungen zeigen uns sogar eine Abhängigkeit derselben von dem physikalischen Zustand des Körpers, d. h. von Eigenschaften desselben, die wenigstens auf den ersten Blick sich als innere darstellen.

Die weitere Entwickelung ähnlicher Überlegungen führt natürlich zu der Auffassung, daß die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Eigenschaften oder Beziehungen eines Körpers, *in einem allgemeinen Sinne genommen*, eine fiktive ist. Diese Kritik ergibt denselben Begriff von *Materie*, wie er sich an die vorstehende Unterscheidung knüpft.

Wenn man demnach *einem Stoff* gewisse Eigenschaften zuschreibt, so hat man darunter zu verstehen die Erkenntnis der Verknüpfung gewisser Erscheinungsdaten, die man einem abstrakten Objekt, dem *materiellen Körper*, entsprechen läßt. Hauptsächlich deshalb, weil man dadurch eine gewisse *Lokalisation* und dadurch die Möglichkeit erhält, die Erscheinungen zu *verteilen*.

Von besonderer Wichtigkeit sind unter diesem Gesichtspunkt die *festen* Körper, die auch als Gefäße für die *tropfbarflüssigen* und für die *Gase* dienen.

Nun entspricht die Verteilbarkeit der Materie einer Reihe superponierter *Invarianten* in bezug auf die physikalisch-chemischen Umwandlungen. Die *Masse* ist einer dieser Invarianten in bezug auf die Gruppe aller erwähnten Umwandlungen. Gewisse *Kraftfelder*, die wir einem Körper beilegen, z. B. die NEWTONschen Anziehungskräfte, haben nur einen relativ invarianten Sinn. Diese Invarianz wird ausgedrückt, wenn man sagt, daß für einen *isolierten* Körper die Masse konstant ist usw., wobei die Isolierung eine fiktive Annahme ist, die eine Abstraktion in vereinfachter Form wiedergibt.

Neben diesen Invarianten und allgemeiner als sie stellt sich die *Energie* dar, d. h. die Summe der verschiedenen Energien eines *isolierten Systems*.

Die Bedeutung der Energie selbst kann durch die verschiedenen möglichen Umwandlungen definiert werden, indem man sie durch Äquivalenz auf eine bestimmte Form, z. B. eine *Arbeit*, zurückführt, die dann unmittelbar einer bestimmten Gruppe von Tastmuskelempfindungen entspricht und mittels geeigneter Instrumente noch genauer bewertet werden kann.

Nun geht die Schule, die in OSTWALD ihren theoretischen Vorkämpfer gefunden hat, von der Grundanschauung aus, daß die Energie als ein *Gegenstand* betrachtet werden kann, wie die Materie, ja, daß diese sogar als eine *besondere Form der Energie* betrachtet werden muß.

Diese Behauptung hat großes Aufsehen erregt. Man hat von der *Immaterialität der Materie* und von der *Materialisation der Energie* gesprochen, als ob unter diesen Worten eine *Tatsache* von großer Bedeutung sich verberge, und man hat an den *gesunden Menschenverstand* appelliert. Ein kluger Ausweg für den, der sich eine Kritik der wissenschaftlichen Ausdrücke ersparen will!



In Wirklichkeit bezeichnen die oben wiedergegebenen Ausdrücke keineswegs eine Tatsache und die energetische Anschauung will in keiner Weise *die Wirklichkeit verändern*, sondern nur *die Bilder*, die wir uns von ihr machen, oder besser die Bilder, die bei dem abstrakten Studium der physikalischen Beziehungen auftreten, da doch die Anschauungen der Materie aus der konkreten Deutung der Theorie keineswegs verbannt wird.

Die Kritik des Massenbegriffs, die der energetischen Anschauung zugrunde liegt, und die Auffassung der Energie als „Gegenstand" können zu keinem berechtigten Einwand Anlaß geben. Man kann nur über den Wert dieser Bilder im Vergleich mit denjenigen diskutieren, die durch den Massenbegriff nahegelegt werden und speziell den *atomistischen* Bildern.

Nach Ansicht der Energetiker sind in dem Begriff der Energie alle partiellen Invarianten aufgegangen, die mit der Materie verknüpft waren, und besonders die Invarianz der Masse. Sie verwerfen anderseits jede atomistische Vorstellung.

Diese Ansichten erscheinen uns nicht hinreichend gerechtfertigt, und es ist bekannt, daß, während die atomistische Theorie in der Chemie einen wichtigen Platz einnimmt, ähnliche Vorstellungen mit Erfolg in den neueren Untersuchungen über den Elektromagnetismus Verwendung finden.

### § 18. Die Lokalisation und Bewegung der Energie.

Es gibt im übrigen zwei Arten, die Erscheinungen energetisch darzustellen.

Der erste, der partiellen Nützlichkeitszielen entspricht (vor allem in der neueren physikalischen

Chemie), sieht von allen Gesichtselementen ab, die mit *lokalen Beziehungen* zusammenhängen, und versucht, den Typus des NEWTONschen mechanischen Modells zu einem höheren Grade von Abstraktion zu führen.

Aber demgegenüber beginnt eine andere Entwickelung im CARTESischen Sinne, die ihren Ausdruck in den Theorien über *die Lokalisation und Bewegung der Energie* findet.

Hier wird die Energie sozusagen materialisiert, und man vergleicht sie mit einem in den verschiedenen Gegenden des Raums verschieden dichten Fluidum und die Erklärung der Erscheinungen ist zurückgeführt auf die Beschreibung der Bewegung dieses Fluidums.

Diese Bilder gehen von der Theorie der Elektrizität aus (vgl. § 21). MAXWELL hat als erster die elektrische Energie in dem Dielektrikum lokalisiert und POYNTING hat die Einfachheit hervorgehoben, mit der sie sich bewegt. Abgesehen von einer das Volumen nicht verändernden Deformation ist ihre Strömung normal zu der Ebene der elektrischen und magnetischen Kräfte und dem Inhalt des von ihnen gebildeten Parallelogramms proportional.

Neuerdings hat VOLTERRA einen Weg vorgeschlagen, um die NEWTONsche und die elastische Energie zu lokalisieren und hat ihre Bewegung beschrieben: ein richtiges optisches Modell der *Wanderungen der Energie*.

Man kann heute noch nicht den positiven Wert dieser schönen spekulativen Resultate abschätzen.

Sie liefern uns aber eine mehr synthetische Anschauung von den Unterschieden zwischen inneren und äußeren Eigenschaften der Materie, und in bezug auf unsere Betrachtung haben sie folgendes Interesse: sie zeigen, daß der Dualismus zwischen der CARTESischen und der NEWTONschen Anschauung, den wir in dem sinnlichen Gehalt der Bilder nachwiesen, sich auch noch bis in die Entwickelung der energetischen Begriffe hinein fortsetzt.



## § 19. Die elastische Erklärung der optischen und elektro-magnetischen Erscheinungen.

Neben der Entwickelung der Mechanik in den allgemeinen Theorien der Elastizität und der Wärme sind diejenigen zu erwähnen, welche das Licht, die Elektrizität und den Magnetismus betreffen. Über diese wollen wir kurz sprechen.

Diese Art von physikalischen Erscheinungen hängt auf zwei Weisen mit dem allgemeinen Begriff der Elastizität zusammen:

1. durch die Darstellung des Lichts als Schwingung eines elastischen Mediums (die FRESNELsche *Undulationstheorie*).
2. durch die MAXWELLsche Vorstellung, die aus dem Dielektrikum zwischen elektrisierten Körpern ein elastisches Medium macht, dessen Deformationen direkt gewisse Druck- oder Spannungskräfte erzeugen, welche von uns als elektrostatische Wirkungen wahrgenommen werden.

Die Vereinigung dieser beiden Anschauungen hat MAXWELL zur Begründung jener allgemeinen *elektromagnetischen Theorie* geführt, der die Optik untergeordnet wird.

## § 20. Die Optik.

Ohne in eine bis ins einzelne gehende historische Untersuchung einzutreten, können wir leicht die Entstehung der Ideen darstellen, die zu einer mechanischen Theorie des Lichtes geführt haben. Es genügt, sich folgendes gegenwärtig zu halten:

1. die Analogie zwischen gewissen optischen und akustischen Erscheinungen und zwischen diesen und einigen elementaren mechanischen Vorgängen

(die geradlinige Ausbreitung, das Gesetz der Reflexion usw.);

2. die Möglichkeit, für den Schall eine konkrete mechanische Erklärung zu geben, indem man die direkt konstatierbaren Schwingungen der schallaussendenden Körper benutzt;
3. die grundlegende Tatsache, daß das Licht eine endliche, wenn auch sehr große Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt.

Trotz der erwähnten Analogien hat NEWTON, auf den die mechanische Theorie des Schalles (die später nur in einem Punkte von LAPLACE verbessert wurde) zurückgeht, die erste optische Theorie auf eine wesentlich andere Hypothese gegründet, nämlich auf die *Emission* einer Substanz durch die leuchtenden Körper; und es ist nicht schwer, sich den Grund zu erklären, weshalb er den anderen Weg wählte.

Da es nicht möglich ist, die Lichterscheinungen durch Bewegung der unter unsere Sinne fallenden Materie zu erklären, so erfüllt die Emissionshypothese den leeren Raum mit einem Dinge, das gewissermaßen den geringsten Grad von Abstraktion erfordert und das anderseits auf spontanen Assoziationen beruht, deren Spuren sich in dem gewöhnlichen Sprachgebrauch finden. Es kommt hinzu, daß der Gedanke, das Licht mit dem Schall durch eine Undulationstheorie in engere Verbindung zu bringen, einigen ernsten Schwierigkeiten begegnen mußte, wie dies bei ihrer Entstehung auch tatsächlich der Fall war.

Wie dem auch sei, die Emissionstheorie erreichte durch die Arbeit der Nachfolger NEWTONS einen hohen Grad von Vollkommenheit und ermöglichte es LAPLACE, vermittels einer Anzahl von Hilfshypothesen die ersten Eigenschaften der Reflexion und der Brechung zu erklären.



Aber die Fortschritte in der experimentellen Untersuchung dieser letzteren Erscheinung und besonders die Messung der Lichtgeschwindigkeit in den Medien von verschiedenen Brechungsvermögen erwiesen sich als unvereinbar mit der Gesamtheit der angenommenen Hypothesen.

Demnach befestigte sich gegenüber der NEWTONschen Hypothese ihre Nebenbuhlerin, die von HUYGHENS erdacht und von YOUNG und FRESNEL weiter entwickelt wurde; dieselbe ließ eine Analogie zwischen dem Schall und dem Licht hervortreten, indem sie die Lichterscheinung als Schwingung eines elastischen Mediums des den ganzen Raum erfüllenden *Äthers* darstellte.

Und diese Theorie erwies immer mehr ihre Fruchtbarkeit, indem es z. B. FRESNEL selbst gelang, die Erscheinungen der Beugung, die von POISSON vorausgesagt worden waren, zu erklären.

Nun bestand das Grundproblem, das FRESNEL zu lösen hatte, in der Herstellung eines adäquaten Begriffs, von der dem Äther hypothetisch zugeschriebenen Elastizität.

Vor allem erwies sich die einfachste Hypothese, die darin bestand, den Äther als ein äußerst verdünntes gasförmiges Medium vorzustellen, als mit den Tatsachen unvereinbar. Die Erscheinungen der Polarisation und der Interferenz zusammen mit den Ergebnissen der Intensitätsmessungen bei den Untersuchungen der Reflexion und der Brechung führen notwendig zu der Annahme, daß die *Schwingungen des Lichtes transversal sind*.

Demnach stellt sich der Äther dar als mit einer Elastizität begabt, die derjenigen der Gase in gewissem Sinne entgegengesetzt ist, indem diese nur longitudinale und nicht transversale Wellen fortpflanzen, da das Gleiten der Moleküle keinem elastischen Widerstande begegnet.

Wie haben wir uns ein derartiges Medium vorzustellen?

Wenn wir uns nicht von den gewöhnlichen Bedingungen eines mechanischen Modells entfernen wollen, so müssen wir es entweder als einem festen Körper ähnlich vorstellen, indem wir ihm *Inkompressibilität* zuschreiben oder wir müssen ihm im Gegenteil eine *unendliche Zusammendrückbarkeit* verleihen.

Diese zweite Annahme wird im allgemeinen von FRESNEL gemacht, während F. NEUMANN und MAC-CULLAGH eine andere Theorie entwickelt haben, in der systematisch die erste Hypothese verwandt wird.

Die beiden Ansichten führen dazu vorauszusetzen, daß bei dem polarisierten Licht die Schwingung eines Ätherteilchens der Polarisationsebene parallel bzw. senkrecht zu ihr ist. Aber es erscheint schwierig, durch das Experiment zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden. Auch zeigt die Anyalse POINCARÈS, daß die Unterscheidung zwischen ihnen eine wenigstens im Gebiete der Optik ruhender Körper indifferente Hypothese darstellt. Immerhin wird ein kürzlich gemachtes photographisches Experiment WIENERS von diesem als eine Bestätigung der FRESNELschen Ansicht gedeutet.

Was die Leichtigkeit der Vorstellung betrifft, so enthält sie offenbar viel Subjektives. Der FRESNELsche Äther ist ein vollkommen neues elastisches Medium, das man sich nur vorstellen kann, wenn man an ein Gas denkt, in dem die Rolle der Elastizität durch die der Zähigkeit ersetzt ist. Die Annahme des festen Äthers bietet größere Schwierigkeiten in bezug auf die Vorstellung der Beziehungen zwischen dem Äther selbst und der Materie und erfordert die Annahme einer besonderen Kraft (die KIRCHHOFFsche genannt), um die Verschiedenheit der Elastizität des Äthers auf den beiden



Seiten einer Fläche zu erklären, die Medien von verschiedenem Brechungsvermögen trennt.

Wir werden Gelegenheit haben, später zu sehen, daß die Elastizität des Äthers unter einem neuen Gesichtspunkt durch stationäre Bewegungen erklärt wird (§ 24). Aber auch in bezug auf die neue Auffassung stellt sich in der Theorie des Lichtes die Reziprozität der Erklärungen dar, auf die wir hingewiesen haben.

## § 21. Die Elektrostatik.

Die Versuche einer mechanischen Erklärung der elektrischen und elektromagnetischen Erscheinungen knüpfen an zwei fundamentale Gesichtspunkte CLERK MAXWELLS an, die beide vorauszusetzen und in einer synthetischen Theorie zu verbinden sind, die aber dennoch schwer in Übereinstimmung zu bringen sind, eine Schwierigkeit, die der Autor selbst nicht vollständig überwunden hat, obgleich er die Tatsachen mit einer scharfen Logik und bewundernswerten Anschauung der Analogien untersuchte und kritisierte. MAXWELL hat es vorgezogen, in den einzelnen Gebieten der Erfahrung verschiedene Konstruktionen beizubehalten in dem Vertrauen, daß scheinbare Widersprüche bei einer erweiterten Betrachtung der physikalischen Beziehungen verschwinden müssen, anstatt willkürlich durch den Geist der systematischen Komposition beseitigt zu werden.

Eine erste Art von Analogie, die in dem MAXWELLschen Werke eine Lehre für sich bildet, ist die *elastische Theorie der elektrostatischen Wirkungen.*

In derselben Weise, wie die Optik die Vorstellung eines elastischen Mediums nahelegt, durch das sich die Lichtwellen fortpflanzen, führte die Anziehung und Abstoßung in der Entfernung zwischen elektrisierten Körpern MAXWELL zu der Annahme eines besonderen elastischen Mediums, das zwischen den Leitern sich befindet. Die

Druck- und Spannungskräfte des Mediums drücken sich in den elektrischen Wirkungen aus, und diese Vorstellung findet ihre Begründung in den Versuchen FARADAYS, aus denen die wichtige Rolle der Dielektrika in den elektrischen Erscheinungen hervorgeht.

Wie man sieht, strebt der MAXWELLsche Versuch nach einer Zurückführung der zwischen entfernten Körpern wirkenden Kräfte auf solche, die in der Berührung wirken. Immerhin fordert das System von Bildern, in das sich dieser leitende Gedanke umsetzt, schwerwiegende Einwände heraus.

BELTRAMI hat bemerkt, daß die Spannungen, die in dem MAXWELLschen Medium bestehen, nicht den Differentialbedingungen genügen, die im allgemeinen für *elastische Medien* gelten, wenn man als charakteristische Eigenschaften derselben voraussetzt, daß der in ihnen durch eine unendlich kleine Deformation erzeugte Spannungszustand für jedes Element von dieser Deformation abhängt und nicht von der Folge von Zuständen, durch die der Körper vorher hindurch gegangen ist.

Diese Einwände berühren nicht die Möglichkeit einer elastischen Erklärung der elektrostatischen Wirkungen, aber sie zeigen, daß diese nicht in der einfachen von MAXWELL vorgeschlagenen Form gegeben werden kann, in der die Spannungen von dem lokalen Zustand der Kräfte des Feldes abhängen. Man kann jedoch in anderer Weise einem elektrostatischen Kraftfelde, wie im allgemeinen jedem Kraftfelde, eine wohldefinierte Deformation eines elastischen Mediums zuordnen, das sich unter der Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht befindet. In diesem Sinne hat SOMIGLIANA das Problem gelöst, die Deformation und den entsprechenden Spannungszustand zu bestimmen, der einem elastischen Medium zukommen muß, wenn es die elektrostatischen Wirkungen erklären soll.



Aber hier hängen die Spannungen von dem ganzen gegebenen Kraftfelde ab.

## § 22. Der Elektromagnetismus.

Auch bei der Behandlung der elektromagnetischen Erscheinungen wird MAXWELL von dem Gedanken geleitet, die in der Entfernung wirkenden Kräfte auf Berührungswirkungen zurückzuführen. Wir wollen, ohne uns allzu enge Fesseln aufzuerlegen, versuchen, den Gedanken zu erläutern, der diese Theorie beherrscht.

Wir gehen aus von der Analogie mit der mechanischen Wärmetheorie.

Wie man hier durch die Beziehung zwischen Wärme und Arbeit zu der Hypothese geführt wurde, daß die Wärme einer inneren Bewegung der Teile des Körpers entspricht, ebenso legen die Tatsachen der elektromagnetischen Induktion, mit der sich die Erzeugung mechanischer Arbeit verbindet, den Gedanken nahe, daß die elektromagnetische Energie als eine Form der Bewegung anzusehen ist.

MAXWELL legt besonderen Nachdruck auf die Analogie zwischen den Erscheinungen der Selbstinduktion der Ströme und den Trägheitskräften, um daraus den Gesichtspunkt zu entnehmen, daß dem Strome etwas entspricht, was sich bewegt. Da aber diese Erscheinungen von der Form des Stromkreises und von dem umgebenden Medium abhängen, so verwirft er die Hypothese, daß das, was sich bewegt, die Elektrizität in dem Leitungsdraht sei. Dagegen legt ihm eine Anschauung, die dem *synthetischen* Geiste FARADAYS gemäß ist, den Gedanken nahe, daß es sich um die Bewegung eines Fluidums handelt, welches das umgebende Dielektrikum erfüllt. Es handelt sich nun darum, durch eine solche Hypothese die verschiedenen Erscheinungen der elektromagnetischen Induktion zu erklären. Dieses

ist der Zweck der Theorie, welche MAXWELL in dem vierten Teile seines Buches über die Elektrizität und den Magnetismus entwickelt.

Und die Erklärung wird im Sinne der energetischen Mechanik (§ 16) erhalten, deren Gesichtspunkte hier zum erstenmal eine wichtige konkrete Anwendung erfuhren.

Wir wollen die leitenden Grundsätze der MAXWELLschen Theorie auseinandersetzen, indem wir uns der Einfachheit halber auf die Elektrodynamik der *ruhenden Körper* in einem *homogenen Medium* beziehen. Trotz der Unmöglichkeit, den verborgenen Mechanismus zu bestimmen, der den sichtbaren Tatsachen entspricht, kann man mit Hilfe des HAMILTONschen Prinzipes die Beziehungen bestimmen, die zwischen zwei gegebenen Energieformen im Gebiete der Erfahrung bestehen, nämlich zwischen der *elektrischen Energie*, die (unabhängig von den besonderen Hypothesen des vorangehenden Paragraphen) als *potentielle Energie* angesehen werden kann, und der *elektromagnetischen Energie*, die als *kinetische Energie* oder lebendige Kraft zu betrachten ist. Die elektrostatische Theorie ergibt den Ausdruck der ersten Energie als Funktion der elektrischen Ladungen der Entfernungen usw. Die Art, wie die zweite Energie von der Stärke der elektrischen Ströme und von den geometrischen Verhältnissen der Stromkreise abhängt, wird von MAXWELL kritisch untersucht.

Nun *stellen die vorstehenden Beziehungen die Tatsache der elektromagnetischen Induktion gut dar.*

Von ihnen geht man leicht zu den *Gleichungen eines elektromagnetischen Feldes* über, die ausdrücken, daß der zukünftige Zustand des Feldes durch den gegenwärtigen bestimmt ist und in denen gewisse Elemente verbunden auftreten, die in den Integralkombinationen vorkommen, welche die beiden erwähnten Energien darstellen.



Der positive Gehalt der genannten Gleichungen wird weiterhin im Anschluß an HERTZ und LEVI-CIVITÀ aufgeklärt werden.

Aus den MAXWELLschen Entwickelungen ergibt sich keine adäquate Vorstellung des verborgenen Mechanismus der elektromagnetischen Erscheinungen, sondern nur das Schema eines Mediums, das man in grober Annäherung sich als ein *zellenförmiges System* vorstellen kann, *welches eine Flüssigkeit enthält.*

Die Bewegung der Flüssigkeit entspricht der elektromagnetischen Energie und die elastischen Reaktionen, d. h. die Druck- und Spannkräfte, die durch diese Bewegung in den Zellwänden erzeugt werden, ergeben die elektrostatische Energie.

Wir haben schon hervorgehoben, daß die Bedeutung dieses Schemas in der Verbindung besteht, die zwischen den verschiedenen elektromagnetischen Erscheinungen und besonders denen der Induktion hergestellt wird.

Es wird dadurch möglich, die Vorstellung dieser Erscheinungen über das Gebiet der Erfahrung hinaus zu erweitern und so wurde MAXWELL zu seiner wichtigsten Entdeckung geführt.

Er hat bemerkt, daß sehr schnelle periodische elektromagnetische Oszillationen Erscheinungen erzeugen mußten, die denen des Lichtes ähnlich sind. Die Lichtwellen werden demnach als ein besonderer Fall solcher Schwingungen angesehen werden können, welcher einer sehr kleinen Wellenlänge entspricht.

Diese theoretischen Gesichtspunkte empfingen durch das MAXWELLsche Werk eine begrenzte Bestätigung: die am meisten in die Augen springende ist das Zusammentreffen, durch das die Lichtgeschwindigkeit merklich gleich dem Verhältnis zwischen den beiden Einheiten der Elektrizitätsmenge in dem elektrostatischen und dem elektromagnetischen Maßsystem ist. Die Vergleichung

zwischen den optischen und elektrischen Eigenschaften der Körper ergibt weniger befriedigende Resultate, wenn man etwas genauere quantitative Übereinstimmung fordert.

Zwanzig Jahre später wurden die elektrischen Schwingungen durch HERTZ experimentell verwirklicht und ihre Geschwindigkeit gemessen, die sich gemäß der theoretischen Voraussage gleich der des Lichtes ergab!

Seit jenem Tage haben sich neue Analogien zwischen den optischen und den elektromagnetischen Erscheinungen in großer Zahl ergeben; z. B. hat man mit den elektromagnetischen Wellen die verschiedenen Versuche über die Spiegelung, Brechung usw. wiederholt, wofür im besonderen die Arbeiten AUGUSTO RIGHIS[1]) in Betracht kommen. So kann man sagen, daß der allgemeine Begriff der elektromagnetischen Theorie des Lichtes nachgerade einen gesicherten Besitz der Wissenschaft darstellt.

## § 23. Der positive Gehalt der MAXWELLschen Theorie.

In dem MAXWELLschen Werke erkennt man die Übereinanderlagerung verschiedener partieller Konstruktionen, die einerseits auf eine mechanische Darstellung der optisch-elektromagnetischen Erscheinungen und anderseits auf eine Zusammenfassung der verschiedenen Erscheinungsdaten gerichtet sind, die durch die Gleichungen eines elektromagnetischen Kraftfeldes ausgedrückt wird.

Nun kommen in diesen Gleichungen verschiedenartige Größen vor, nämlich solche, die sich auf das mechanische Modell beziehen neben anderen, die durch

1) Vgl. „L'Ottica delle oscillazioni elettriche", Bologna, ZANICHELLI 1897.



mögliche Experimente definiert sind. Daher ist es notwendig, eine Kritik anzuwenden, um den positiven Gehalt der MAXWELLschen Theorie zu erkennen.

Eine solche Kritik hat HEAVISIDE und HERTZ dazu geführt, die MAXWELLschen Gleichungen umzuformen und zu vereinfachen.

Vor allem kommt HERTZ neben der Ausdehnung der Gleichungen auf anisotrope kristallinische Medien das Verdienst zu, die Bedeutung dieser Gleichungen in zwei klassischen Abhandlungen in klarer Weise dargestellt zu haben. Diese Abhandlungen beziehen sich bzw. auf die Elektrodynamik *ruhender* und die *bewegter Körper*.[1])

Wir wollen hier den ersten Fall behandeln.

In einem homogenen Medium oder im leeren Raume seien mehrere unbewegliche Körper gegeben als Sitz elektrischer und elektromagnetischer Erscheinungen. Dadurch ist ein *elektromagnetisches Kraftfeld* definiert, d. h. es sind für jeden Punkt zwei Vektoren als Funktionen der Zeit definiert: die *elektrische* und die *magnetische Kraft*. Die elektrische Kraft ist diejenige Kraft, die in jedem Punkte des Feldes auf die elektrische Einheit, wenn man sie dorthin bringt, wirken würde. Sie ist also definiert unabhängig von der Unterscheidung der Kräfte *elektrostatischen* und *elektromagnetischen Ursprunges*, deren Resultante sie darstellt. Die magnetische Kraft wird in ganz ähnlicher Weise definiert.

Diese Definitionen haben eine positive Bedeutung in bezug auf mögliche Experimente, abgesehen von der praktischen Schwierigkeit, die elektrische Kraft in elektrostatischen Einheiten zu messen.

Die Kenntnis des elektrischen und magnetischen Kraftfeldes bestimmt dann vollständig den Ablauf der Er-

1) „Wiedemanns Annalen" Bd. 40, 41 (1890) und „Nuovo Cimento" Bd. 28.

scheinungen und besonders den der elektrodynamischen, unabhängig von der Kenntnis der elektrisierten Körper, der Ströme und der Magnete, die zur Definition des Feldes dienten. Dies findet statt auf Grund einer *fundamentalen Hypothese*, die im allgemeinen als eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes betrachtet wird, das für die beständigen Erscheinungen sich bestätigt: Der elektrische Strom in einem Leiter ist für jeden Punkt der dort wirkenden elektrischen Kraft vektoriell proportional.

Das elektrische und das magnetische Kraftfeld stehen in einer engen Abhängigkeit voneinander. Hertz nimmt ohne weiteres an, daß die Gleichungen, die eine solche Abhängigkeit ausdrücken, und die sich auf ein homogenes und isotropes umgebendes Medium beziehen, sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

1. Die Variation der magnetischen Kraft in bezug auf die Zeit ist dem *curl*[1]) der elektrischen Kraft proportional.
2. Die Variation der elektrischen Kraft ist dem *curl* der magnetischen Kraft umgekehrt proportional.

Wenn das Feld ein Leiter ist, so wird dieses zweite Gesetz in dem Sinne abgeändert, daß zu der Veränderung der Kraft diejenige hinzukommt, die von dem Strome herrührt und die (wie wir bemerkten) der Kraft selbst proportional ist.

Die genannten Gleichungen, zu denen Heaviside gleichfalls gelangt war, indem er die Maxwellschen Gleichungen umformte und vereinfachte, bestimmen die Kenntnis des zukünftigen elektromagnetischen Feldes, wenn sein gegenwärtiger Zustand gegeben ist. Sie sagen uns nämlich, wie jede elektromagnetische Störung sich im Raume und in der Zeit ausbreitet.

1) Der curl bezeichnet eine geometrische Operation an den Vektoren, die von der *lokalen* Variation des Vektors im Felde abhängt.



Zu den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes muß man nun noch die Bedingungsgleichungen hinzufügen, welche die *Erhaltung der Elektrizität* und des *Magnetismus* ausdrücken und von denen die erste zur Unterscheidung des (leeren) Äthers von der Materie dient.

Man kann diese Gleichungen interpretieren und aus ihnen, wie Hertz zeigt, die bekannten physikalischen Gesetze ableiten. In erster Linie diejenigen, die sich auf einen dauernden Zustand beziehen, z. B. das Ohmsche Gesetz für die geschlossenen Stromkreise, die Kirchhoffschen Prinzipien für verzweigte Leiter, die Ampèresche Regel und das Biot-Savartsche Gesetz, ferner die Gesetze der Induktion, die wir durch das Experiment an geschlossenen Stromkreisen kennen lernen, usw.

Die Verifikation der aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes gezogenen Folgerungen rechtfertigt nach Hertz diese Gleichungen selbst, die als Grundhypothesen der Theorie angenommen worden waren.

Damit aber diese Verifikation der Hypothesen wirkliche Beweiskraft erlange, muß man feststellen, daß diese ihrerseits aus einigen der der Erfahrung entnommenen physikalischen Gesetzen abgeleitet werden können.

Dies hat T. Levi-Cività[1]) ausgeführt. Er nahm die Helmholtzsche Theorie wieder auf und verbesserte sie durch die Annahme einer endlichen Ausbreitungszeit der Fernwirkungen. Er hat gezeigt, daß sie dann zu den Hertzschen Gleichungen führt.

Wir wollen dieses wichtige Ergebnis genauer erläutern. Angenommen, daß

1. das Prinzip der *Erhaltung der Elektrizität* gelte und man infolgedessen die Veränderung eines elektromagnetischen Feldes als die Bewegung einer

1) Vgl. das „Nuovo Cimento", 1897.

Flüssigkeit darstellen kann, die da, wo sich die Materie befindet, eine Verdichtung erfährt, daß

2. gelten die Gesetze über die elektrostatische Wirkung von COULOMB, über die elektromagnetische Wirkung von BIOT und SAVART und über die elektrodynamische Induktion von F. NEUMANN[1]), verbessert durch die Annahme einer *Ausbreitungsgeschwindigkeit*, die derjenigen des Lichtes proportional ist.

Dann kann man in jedem Punkte des Feldes die elektrische Kraft berechnen, die sich aus den beiden Komponenten von elektrostatischem und elektrodynamischem Ursprunge zusammensetzt, und die magnetische Kraft, die durch das BIOT-SAVARTsche Gesetz gegeben wird. Diese beiden Kräfte werden in jedem homogenen isotropen ruhenden Medium durch die HERTZschen Gleichungen verknüpft.

Wir können also folgendermaßen zusammenfassen: *Die Arbeiten von* HERTZ *und* LEVI-CIVITÀ *lassen den positiven Gehalt der* MAXWELLschen *elektromagnetischen Theorie erkennen: für homogene und isotrope ruhende Medien ist diese Theorie äquivalent dem Prinzip der Erhaltung der Elektrizität zusammen mit dem* COULOMBschen, *dem* BIOT-SAVARTschen *und dem* F. NEUMANNschen *Gesetz, wenn diese durch die Annahme einer endlichen Ausbreitungszeit der Fernwirkungen verbessert werden.*

## § 24. Die Elastizität als Bewegung betrachtet.

Während die positive Kritik der MAXWELLschen Theorie aus den Feldgleichungen jeden Unterschied

1) LEVI-CIVITÀ hebt ausdrücklich hervor, daß es wesentlich ist, das Neumannsche Potentialgesetz auszuwählen aus den verschiedenen elementaren Induktionsgesetzen für offene Stromkreise, die mit den Experimenten an geschlossenen Kreisen vereinbar sind, und leitet daraus ein Argument ab zur Unterstützung dieses Gesetzes im Vergleich mit anderen, die man vorgeschlagen hat.



zwischen den elektrischen Kräften elektrostatischen und elektromagnetischen Ursprunges beseitigt, streben auch die Spekulationen über das mechanische Modell dieser Erscheinungen von der anderen Seite her zur Beseitigung dieses Unterschiedes.

MAXWELL hatte die elektrostatischen Kräfte als *wahre elastische Kräfte angesehen*, und die elektromagnetischen Kräfte als *scheinbare* oder *Trägheitskräfte*, die von *verborgenen Bewegungen* herrühren. Eine Entwickelung der mechanischen Darstellung im CARTESIschen Sinne führt dazu, auch die elektrostatischen Wirkungen als von verborgenen Bewegungen herrührend anzusehen und allgemeiner die *Elastizität als eine Form der Bewegung* zu erklären.

Dieser Gedanke tritt zuerst bei MAC CULLAGH auf (1839), der bei der Erklärung der optischen Eigenschaften der Kristalle dazu geführt wurde, den Lichtäther nicht mehr als ein elastisches Medium im eigentlichen Sinne zu betrachten, sondern als ein Medium, in dem gewisse stationäre Bewegungen stattfinden, die eine *Rotationselastizität* vortäuschen. FITZGERALD machte die Bemerkung, daß dieses Modell sehr gut dazu geeignet ist, die Darstellung der optischen Erscheinungen mit derjenigen der elektromagnetischen in Einklang zu bringen. Aber die Schwierigkeiten der Vorstellung wurden von W. THOMSON durch das konkrete Modell eines *gyrostatischen Äthers* behoben.

Die Grundlage der Konstruktion bildet die Eigenschaft der Permanenz der Rotationsachsen, die man beim Kreisel beobachtet. Mit vier gekoppelten Kreiseln kann man ein System zusammenstellen, das die Elastizität einer Feder vortäuscht; wenn man dem ganzen System eine Rotationsgeschwindigkeit erteilt, so bietet die Achse einer Verschiebung aus ihrer Richtung einen Widerstand dar. Wenn man demnach unendlich viele derartige

elementare Systeme zusammensetzt, so erhält man das Modell eines Äthers, der imstande ist, die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in einem magnetischen Kraftfelde (eine von FARADAY beobachtete Erscheinung) darzustellen.

Eine weitere Entwickelung seines Konstruktionsgedankens führte THOMSON dazu, ein *hydrokinetisches Modell* der elektrodynamischen Wirkungen zu erdenken, in dem die Undurchdringlichkeit und die Trägheit der Materie beim Stattfinden stationärer Bewegungen scheinbare Kräfte erzeugen, die denjenigen der AMPÈRESchen Wirkungen der Ströme ähnlich sind.

Neben diesem Modell ist dasjenige zu erwähnen, das von C. A. BIERKNES für die elektrostatischen (oder die NEWTONschen) Wirkungen vorgeschlagen wurde und in dem diese Wirkungen durch die schwingende Bewegung von *Kugeln* erzeugt werden, *welche* in einer Flüssigkeit *pulsieren*.

Es tritt aber der Fall ein, daß in diesen Modellen die vorgetäuschten Wirkungen den wirklichen *entgegengesetzt* sind. Aber POINCARÉ hat gezeigt, daß diese Umkehrung beseitigt werden kann, wenn man die Interpretation der Modelle selbst ändert.[1])

In dem BIERKNESschen Modelle kommt noch eine andere Schwierigkeit vor. Er mußte nämlich voraussetzen, daß die pulsierenden Kugeln die gleiche Periode und die gleiche Phase (oder Phasen, die sich um $\pi$ unterscheiden) besitzen, und das erscheint unannehmbar.

Man kann diese Schwierigkeit beseitigen, indem man eine kontinuierliche Kontraktions- oder Dilatationsbewegung anstatt einer abwechselnden voraussetzt.

Dieser Fall entspricht der Darstellung eines elektrisierten Teilchens, wenn man eine Verallgemeinerung der

1) „Electricité et Optique", Paris 1901, S. 616f.



FRESNELschen Optik vornimmt, die den elektromagnetischen Erscheinungen angepaßt ist, d. h. eine Theorie, die gewissermaßen die Umkehrung derjenigen ist, die kürzlich von LARMOR als Erweiterung der Optik von MAC CULLAGH und NEUMANN konstruiert wurde.[1])

Während diese Spekulationen zu einer konkreten Darstellung der elektrischen Kräfte als Trägheitskräfte strebten, wurde HERTZ zu der Überlegung geführt, daß eine derartige Erklärung im allgemeinen für alle Kräfte möglich sein müßte, d. h. daß diese immer ersetzt werden können durch die *Bewegungen verborgener verbundener Massen*.

In seiner posthumen Mechanik findet sich eine Rechtfertigung dieser Ansicht und der Plan einer Behandlung der Wissenschaft von der Bewegung, aus der jeder eigentliche Kraftbegriff verbannt ist.

Die Grundhypothese ist also, daß verbunden mit der sichtbaren Materie unsichtbare Massen existieren, derart, daß jede Erscheinung und speziell jede Bewegung der sichtbaren Materie im allgemeinen eine Bewegung der unsichtbaren nach sich zieht. Das Gesetz der Bewegung reduziert sich auf eine *Verallgemeinerung des* GALILEI-NEWTONschen *Trägheitspostulats*.

Jedes isolierte System bewegt sich derart, daß die Folge seiner Lagen einer Minimumsbedingung entspricht, die durch das GAUSSsche *Prinzip des kleinsten Zwanges* ausgedrückt werden kann und die derjenigen analog ist, der die Gerade unter den möglichen Bahnen eines Punktes im Raume und die geodätische Linie unter den möglichen Bahnen eines Punktes auf einer Fläche entsprechen.

Die scheinbaren *Kräfte* sind nichts anderes als die *Reaktionen der starren Verbindungen*.

Das von HERTZ entworfene Schema ist von ihm nicht bis zur Behandlung bestimmter Probleme fortgeführt

1) Vgl. POINCARÉ a. a. O.

worden, bei der sich ergeben hätte, in welcher Weise und in welchem Sinne die Willkür aufgehoben werden kann, die in der Wahl der verborgenen Bewegungen enthalten ist, und welchen Vorteil man aus dieser Hypothese für die Erklärung der Erscheinungen ziehen kann.

Aber die mechanischen Darstellungen des Elektromagnetismus, die oben angeführt wurden, z. B. das Bjerknessche Modell, können als Illustration des Hertzschen Programms dienen.

Anderseits kann man bemerken, daß die verschiedenen Entwickelungen der Mechanik und Physik, die wir bisher analysiert haben, im allgemeinen nach einer Reduktion der Kräfte auf den elastischen Typus streben, so daß man, um den Hertzschen Gedanken zu verwirklichen, nach dem Gesichtspunkt von Thomson die Elastizität vollständig als Bewegung behandeln muß.

## § 25. Die Elektrodynamik der bewegten Körper: die Hertzsche Theorie.

Die spekulative Entwickelung, die nach einer mechanischen Erklärung der elektromagnetischen Erscheinungen strebt, gelangt zu einem Modell vom Cartesischen Typus, das, theoretisch betrachtet, allgemein und vollkommen ist, obgleich es noch nicht in konkreter Weise adäquat ausgebildet ist. Aber die Spekulationen über diesen verborgenen Mechanismus bleiben zu weit entfernt von den konkreten Anwendungen der Theorie, die, wie wir sahen, einen Inhalt hat, der von ihrer mechanischen Grundlage unabhängig ist.

Wenn es sich darum handelt, diese Anwendungen weiter zu verfolgen und das elektrische Modell der optischen Erscheinungen zu vervollkommnen und zu erweitern, so kann man die elektrischen Kräfte als ursprüngliche Daten annehmen, ohne sich um ihre mögliche Reduktion zu bekümmern.



Dies ist der Fall in den Hertzschen Gleichungen, die wir im § 23 betrachteten, indem wir uns auf die Elektrodynamik der ruhenden Körper beschränkten. Es ist aber ebenso der Fall in den neuen Entwickelungen, zu denen der Versuch geführt hat, die verschiedenen Erscheinungen des Elektromagnetismus an bewegten Körpern in ein System zu bringen, und speziell in der Lorentzschen Theorie.

Wir wollen einen kurzen Bericht über diese Theorien geben, indem wir die vorhergehenden Arbeiten von Maxwell beiseite lassen. Wir beginnen also mit der Behandlung der Elektrodynamik bewegter Körper von Hertz, indem wir versuchen, die Entstehung des leitenden Gedankens, der sie beseelt, zu deuten.

Wenn wir ein ruhendes (oder als solches betrachtetes) undeformierbares Medium betrachten und in ihm ein elektromagnetisches Feld bestimmen (mittels unbeweglicher elektrisierter, magnetisierter oder von Strömen durchflossener Körper), so finden wir, daß in jedem Punkte die elektrische und magnetische Kraft durch die Differentialgleichungen verknüpft sind, deren Inhalt wir im § 23 analysiert haben.

Nun können diese Gleichungen in zweierlei Sinne verallgemeinert werden:

Erstens kann man annehmen, daß sie gelten, auch wenn das *elektromagnetische Feld durch Körper erzeugt* wird, *die sich innerhalb des gegebenen Mediums bewegen.* So wird z. B. ein elektrisierter bewegter Körper in jedem Punkte eine fortschreitende Veränderung der elektrischen Kraft hervorrufen und folglich zu einer Störung Anlaß geben, die der durch einen Strom erzeugten völlig analog ist. Dieses stimmt überein mit den Experimenten von Rowland, nach denen der elektrische *Konvektionsstrom* dem (Voltaschen) *Leitungsstrom* ähnlich ist.

Zweitens, wenn die Erscheinungen sich in verschiedenen Medien ausbreiten, die gegeneinander in Bewegung sind, so kann man eine *relative Unabhängigkeit* derselben annehmen, d. h. man kann annehmen, daß in jedem von ihnen ein eigenes elektromagnetisches Feld vorhanden ist, das durch dieselben HERTZschen Gleichungen, die aber *auf das Medium bezogen* werden, definiert sind.

HERTZ nimmt diese Hypothese an, indem er sie ergänzt für den Fall von *deformierbaren* materiellen *Medien*.

Man wird auf diese Verallgemeinerung leicht durch die folgenden Überlegungen geführt.

Aus den Differentialgleichungen, die sich auf ein undeformierbares Medium beziehen, kann man *Integralgesetze* ableiten (deren eines von MAXWELL angegeben wurde), welche die Änderung der Strömung der elektrischen oder magnetischen Kraft durch eine geschlossene Oberfläche ausdrücken durch die Strömung der magnetischen bzw. elektrischen Kraft längs des Umfanges. HERTZ *nimmt als Grundhypothese an, daß diese Gleichungen für ein bewegtes Medium gelten relativ zu ihm, d. h. bezogen auf materialisierte Stromkreise, die sich mit dem Medium zusammen deformieren.*

Die HERTZsche Theorie wird vom Autor selbst als eine Gesamtheit von Hypothesen dargestellt, die vereinbar sind mit einer kleinen Zahl von Experimenten über die Bewegung elektrisierter Körper und über die Wirkungen der Induktion bei der Bewegung von Stromkreisen, die von Strömen durchflossen sind. Und der Autor hebt hervor, daß es sich in diesen Experimenten immer um Bewegungen handelt, die gegen die Lichtgeschwindigkeit langsam sind.

Die Notwendigkeit einer Korrektion ergibt sich auch aus den optischen Erscheinungen, die bei Körpern in



relativer Bewegung auftreten und speziell aus der *astronomischen Aberration*.

Sei $B$ ein unpolarisierbares Medium, $A$ eine Quelle von elektromagnetischen oder Lichtwellen und nehmen wir, um die Begriffe zu fixieren, an, daß $A$ sich in großer Entfernung von $B$ befindet, so daß man die Wellen als eben betrachten kann. $B$ kann unsere Atmosphäre darstellen und $A$ einen Stern. Nach Annahme bewegt sich $B$ in bezug auf $A$.

Wenn man die Gleichungen an den Grenzen der Medien von $A$ und $B$ berücksichtigt, so führt die HERTZsche Theorie zu dem Ergebnis, daß die von $A$ ausgesandten Wellen von $B$ festgehalten und in seiner Bewegung mitgenommen werden, wobei sie in $B$ den Charakter als ebene Wellen beibehalten. Daraus ergibt sich, daß die relative Ausbreitungsgeschwindigkeit in $B$ dieselbe, $V$ ist, die sie hätten, wenn $B$ in bezug auf $A$ in Ruhe wäre.

Dieser Folgerung widerspricht die seit BRADLEY bekannte Aberration des Lichtes. Diese Aberration zeigt nämlich, daß das Licht, das von dem Stern $A$ kommt, sich in der Atmosphäre $B$ mit derselben Geschwindigkeit $V$ *in bezug auf* $A$ zu bewegen fortfährt und sich deshalb (wenn man mit $v$ die Geschwindigkeit der Erde bezeichnet) in bezug auf die Erde mit einer Geschwindigkeit $V-v$ bewegt.

Um die astronomische Aberration zu erklären, kann man versuchen, das HERTZsche Prinzip, das eine *lokale Relativität* der elektromagnetischen Erscheinungen ausdrückt, zu ersetzen durch ein *verallgemeinertes Relativitätsprinzip*, das mit dem synthetischen Gesichtspunkt von FARADAY und MAXWELL übereinstimmt.

Betrachten wir der Einfachheit halber ein undeformierbares Medium $B$, das sich in bezug auf $A$, den Sitz der elektromagnetischen Erscheinungen, bewegt.

Man kann annehmen, daß für einen innerhalb $B$ befindlichen und in dem Medium mitgeführten Beobachter die Erscheinungen sich so abspielen, als ob das Medium $B$ sich so weit ausdehnte, daß es $A$ umfaßt.

Um eine solche Hypothese zu rechtfertigen, genügt es, sich die elektromagnetischen Erscheinungen als Störungen in einem Äther vorzustellen, die durch die *singulären Punkte* definiert sind, welche den auf $A$ befindlichen elektrischen Ladungen entsprechen.

Die Ausbreitung dieser Störungen mit der Bewegung von $A$ gegen $B$ kann man sich einfach vorstellen, indem man sich den Äther selbst zusammen mit $A$ in bezug auf $B$ bewegt denkt.

Dieselbe Hypothese kann man ausdrücken, indem man den Äther zusammen mit $A$ als unbeweglich betrachtet und $B$ als bewegt. Wenn $A$ ein Stern ist, $B$ die Erde, $v$ die Geschwindigkeit von $B$ in bezug auf $A$, $V$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Medium wie unsere Atmosphäre, so findet man, daß das Licht, welches von dem Sterne ausgeht, sich in der irdischen Atmosphäre mit der Geschwindigkeit $V-v$ ausbreitet.

Daraus ergibt sich eine Erklärung der Erscheinung der Aberration in der Weise, die der Ansicht von FRESNEL in der Undulationstheorie entspricht.

Aber die Erklärung gilt nur für den einfachen von BRADLEY beobachteten Fall.

Die Astronomen von Greenwich haben die Aberration mit einem Fernrohr gemessen, das mit Wasser angefüllt war. Die veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtwellen im Wasser müßte hier zu einem veränderten Aberrationswinkel führen. Der Winkel ändert sich aber nicht.

Dieses Resultat wurde von FRESNEL dahin gedeutet, daß „der Äther in bezug auf das Wasser nicht mehr fest bleibt, sondern teilweise mitgenommen wird".



Die *teilweise Mitnahme der Lichtwellen* in der bewegten Materie wurde später durch die Experimente von FIZEAU bestätigt, die kürzlich von anderen wiederholt wurden: Die Bewegung des Wassers erzeugt eine Verschiebung der durch interferierende Lichtstrahlen erzeugten Streifen.

Daraus ergibt sich, daß die feineren Experimente, welche sich auf die optisch-elektrisch-magnetischen Erscheinungen an bewegten Körpern beziehen, auch durch eine *verallgemeinerte Relativitätshypothese*, wie die oben ausgesprochene, nicht erklärt werden können. Die erwähnten Erscheinungen hängen von der relativen Bewegung der Körper ab, von der Ausbreitungsgeschwindigkeit in dem Medium, in welchem sie konstatiert werden und von *etwas anderem*, nämlich (wenn man sich an die Erfahrung hält) von qualitativen Eigenschaften der Materie, die dieses Medium bildet.

Es handelt sich darum, eine Theorie zu konstruieren, die geeignet ist, von den komplizierten tatsächlichen Bedingungen Rechenschaft zu geben.

## § 26. Die LORENTZsche Theorie.

Die LORENTZsche Theorie[1]) (1892) ist zu diesem Zwecke aufgestellt worden. Ihr Grundbegriff besteht in der Zurückführung des teilweisen Mitnehmens der elektromagnetischen Wellen durch die bewegte Materie auf die Veränderung des Feldes, die hervorgerufen wird durch die elektrischen Ladungen, welche nach Annahme von dieser Materie mitgeführt werden.

Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir einen Körper $A$ betrachten, der in bezug auf den Äther als fest

1) Für die Bibliographie vgl. man den Art. von LORENTZ im Bd. V 2 Heft 1 der Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften, Leipzig, B. G. Teubner, 1904.

anzusehen ist, und einen Körper *B*, der sich in bezug auf *A* (und den Äther selbst) bewegt. Innerhalb von *B* superponieren sich dann zwei Reihen von Störungen, die von *A* und von *B* herrühren. Diese letzteren schreiten mit der Bewegung von *B* fort, und *das Gesamtergebnis* ist *äquivalent der Annahme einer teilweisen Mitnahme des Äthers innerhalb von B.*

Der vorstehende Fall kann verallgemeinert werden, indem man mehrere Körper *A*, *B*, *C* ... in relativer Bewegung betrachtet. In diesem Falle liegt kein Grund vor anzunehmen, daß einer oder der andere von diesen Körpern, von denen elektromagnetische Wellen ausgesandt werden, in bezug auf den Äther sich in Ruhe befindet.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, postuliert LORENTZ ein *absolutes* Bezugssystem, d. h. einen von der Materie unabhängigen Äther, dessen Teile sich nicht gegeneinander verändern, und vergleicht die Bewegung der Körper mit diesem als unbeweglich betrachteten Äther.

Das Postulat ist allerdings willkürlich und wird zu Konsequenzen Anlaß geben, die wir später zu prüfen haben werden. Jetzt wollen wir versuchen, uns von der Art und Weise Rechenschaft zu geben, in der die erste Grundhypothese bei LORENTZ durch ein System von atomistischen Bildern konkrete Gestalt erhält.

In der alten Theorie von POISSON gab es zwei *elektrische Fluida*, das positive und das negative (vgl. Kap. II § 26). LORENTZ nimmt im wesentlichen diese Vorstellung wieder auf, sieht aber die beiden Fluida als zusammengesetzt aus materiellen Teilchen *(Elektronen)* an, deren Bewegung die Ströme hervorruft.

Für den Magnetismus nimmt er ferner die AMPÈREsche Hypothese an, wonach dieser die Erscheinung von Strömen in den Teilchen des Magneten ist.



So erhält man eine einheitliche Ansicht von den verschiedenen elektromagnetischen Erscheinungen.

Es ist vor allem interessant zu sehen, wie eine geniale Vergleichung verschiedener Tatsachen dazu geführt hat, die drei Arten von elektrischem Strom auf einen einzigen Typus zurückzuführen, nämlich:

1. die VOLTAschen *Ströme* in den Leitern,
2. die *elektrolytischen Ströme* in Gasen oder Flüssigkeiten, die sich zersetzen,
3. die *Konvektionsströme*, d. h. die Ströme, welche durch Bewegung elektrisierter Körper entstehen.

Die einheitliche Hypothese von LORENTZ findet ihre Grundlage in der folgenden Betrachtung:

1. Die Versuche von ROWLAND beweisen die Wirkung der Konvektionsströme auf das Galvanometer.
2. FARADAYS Gesetze der Elektrolyse lassen (wie schon MAXWELL und HELMHOLTZ bemerkten) die Erklärung zu, daß die elektrolytischen Ströme von der Bewegung kleiner und veränderlicher elektrischer Ladungen herrühren, die mit gewissen Atomgruppen verbunden sind.
3. Speziell die Tatsachen, die sich auf die Ausbreitung der Elektrizität in den Gasen beziehen, legen die Annahme einer *elektrischen Dissoziation* oder *Ionisation* derselben nahe.
4. Die Ionisation der Gase durch die *Kathodenstrahlen*, die von den CROOKESschen Röhren ausgesandt werden, legt die Ansicht nahe, daß diese Strahlen Entladungen von Elektronen sind.
5. Die Durchlässigkeit der Metalle für die Kathodenstrahlen führt zu der Annahme, daß die Elektronen sich in den Leitern frei bewegen können, wie es die Hypothese erfordert, nach der die VOLTAschen Ströme in der Bewegung von Elektronen bestehen.

In welcher Weise liefern nun die Ansichten von LORENTZ ein System von bestimmten Hypothesen, die sich durch Gleichungen eines elektromagnetischen Feldes ausdrücken lassen?

Für den freien Äther werden ohne weiteres die HERTZschen Gleichungen angenommen. Das gleiche findet statt für den in der Materie enthaltenen Äther, wenn sich dort keine elektrisierten Teilchen befinden, abgesehen von der Notwendigkeit, die Kräfte zu berücksichtigen, welche die Elektronen selbst auf die Materie ausüben. Die ganze Schwierigkeit besteht darin einzusehen, wie diese Gleichungen modifiziert werden müssen für das Feld im Innern eines Elektrons, dem endliche Ausdehnung zugeschrieben wird. Wir werden nicht versuchen, diesen Punkt aufzuklären und uns auf die Bemerkung beschränken, daß hier einige Hypothesen eingeführt werden, die a priori nur teilweise gerechtfertigt sind und die später durch die daraus abgeleiteten Folgerungen indirekt bestätigt werden können.

Wenn die Elementargesetze sozusagen der Erscheinungen einmal aufgestellt sind, so hat man weiter nichts zu tun, als sie zu superponieren, um im allgemeinen diese Gleichungen abzuleiten, die nach LORENTZ das allgemeinste elektromagnetische Feld darstellen. Dazu muß man für jeden Punkt das *Mittel* aus den Wirkungen nehmen, welche durch die Bewegung der Elektronen hervorgerufen werden.

Wir haben demnach hier eine *statisch-kinetische Theorie der Bewegung der Elektronen*, die an die kinetische Gastheorie erinnert.

Und das wichtige ist folgendes: Die Theorie gibt nicht nur Rechenschaft von den Tatsachen, im Hinblick auf welche sie aufgestellt wurde, sondern sie liefert auch eine gute Erklärung für die Experimente FARADAYS über die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in



einem Magnetfelde und läßt neue Beziehungen zwischen dem Licht und dem Magnetismus voraussehen, besonders die Teilung der Linien des Spektrums in einem magnetischen Felde, die von ZEEMANN verifiziert wurden.

Allerdings haben neue Experimente über diese Erscheinung zu einer teilweisen Modifikation der Voraussagen geführt und die ursprünglichen Gesichtspunkte von LORENTZ kompliziert. Aber die auf dem Wege der Rechnung durch die Theorie herbeigeführte experimentelle Entdeckung bedeutet immer einen Erfolg für diese Theorie.

Und der Erfolg springt in dem uns beschäftigenden Falle um so mehr in die Augen, als es einem Ziele der elektromagnetischen Optik entspricht, neue positive Beziehungen zwischen dem Licht und dem Elektromagnetismus zu entdecken.

## § 27. Kritik: das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung.

Das Interesse, das die LORENTZsche Theorie erregte, ihr Erfolg in der Erklärung der bekannten Tatsachen und in der Voraussage neuer hat die Kritik der berühmtesten Gelehrten auf sie gelenkt und den Anstoß zu den ausgedehntesten Verifikationsversuchen gegeben.

Vom Standpunkt der klassischen Dynamik hat die LORENTZsche Theorie einen großen Mangel: *Sie genügt nicht dem* NEWTONschen *Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung;* wenigstens ist das Prinzip nicht erfüllt, wenn man es in der einzigen Art verstehen will, in der es eine positive Bedeutung hat, nämlich *bezogen auf die Materie.*

Man kann sich leicht davon Rechenschaft geben, daß diese Folgerung sich nicht sowohl aus den besonderen LORENTZschen Gesichtspunkten ergibt, als vielmehr aus der Rolle, die nach dem MAXWELLschen Gedanken dem

Äther als Ausbreiter der scheinbaren Fernwirkungen zuerteilt wird.

Ein vom Lichte getroffener Körper erfährt einen Druck, der schon von MAXWELL und BARTOLI vorausgesehen wurde und durch LEBEDEFF experimentell bestätigt wurde, und obgleich es sich um feine Experimente handelt, erscheint das Ergebnis um so plausibler, als es mit den Erscheinungen übereinstimmt, die bei der Bewegung der Kometen auftreten und die schon FAYE zur Annahme einer ähnlichen Hypothese veranlaßt hatten.

Nun verträgt sich der MAXWELL-BARTOLIsche Druck nicht mit dem NEWTONschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, weil der Augenblick, in dem das Licht einen Körper trifft, nicht mit demjenigen übereinstimmt, in welchem es die Quelle verläßt.

Aber mehr noch; eine tiefer gehende Analyse POINCARÉs hat gezeigt, daß die Verletzung des NEWTONschen Prinzips notwendig verknüpft ist mit jeder elektromagnetischen Theorie, die von der *teilweisen Mitnahme der Lichtwellen* Rechenschaft geben will.

Man kann diese Notwendigkeit leicht einsehen, wenn man sich einen Augenblick an die HERTZschen Hypothesen erinnert.

Zwischen zwei in relativer Ruhe befindlichen elektrisierten Körpern $A$ und $B$ wirken elektrostatische Kräfte gemäß dem NEWTONschen Prinzip. Wenn aber $A$ und $B$ sich bewegen und die Wirkung sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, so ist die Kraft, welche auf jeden Punkt von $A$ wirkt, nicht mehr nach den Punkten von $B$, von denen sie ausgeht, gerichtet. Es kommt aber als Korrektionsglied in den HERTZschen Gleichungen die AMPÈREsche Wirkung hinzu, die zwischen den *Stromelementen*, welche der Bewegung von $A$ und $B$ entsprechen, stattfindet. Und demnach wird das NEWTONsche Prinzip für die zusammengesetzten Wirkungen erfüllt.



Setzen wir nun aber voraus, daß die Ausbreitung der von $A$ auf $B$ ausgeübten Kraft durch die Bewegung eines $B$ begleitenden Mediums modifiziert wird (dies ist im wesentlichen die Hypothese, welche der erwähnten Mitnahme entspricht). Dann ergibt dies eine Veränderung der Richtung der auf $B$ wirkenden zusammengesetzten Kraft, d. h. jene zufällige Kompensierung, welche in der HERTZschen Theorie stattfand, wird wieder aufgehoben. Das NEWTONsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung gilt nicht mehr!

Und dieses Ergebnis entspringt nicht sowohl aus den besonderen Hypothesen von LORENTZ als vielmehr aus den Versuchen von FIZEAU. Der Fall des Prinzips drängt sich als Tatsache auf.

Wir werden weiterhin die Folgen davon diskutieren.

## § 28. Das Relativitätsprinzip.

Wir kommen nun zu einem anderen schwerer wiegenden Umstand, der nur scheinbar mit dem vorigen verbunden ist.

Die LORENTZsche Theorie läßt die Möglichkeit zu, die *Bewegung der Materie in bezug auf den Äther* festzustellen, d. h. eine wahre *absolute Bewegung*, die nicht von den Beziehungen der Körper zueinander abhängt!

Man hat über die Möglichkeit eines verifikatorischen Experimentes diskutiert. Man hat zuerst gefunden, daß bei irdischen Experimenten die Lichterscheinungen die Bewegung der Erde nicht erkennen lassen bei einem Grade von Approximation, bei dem das Quadrat der astronomischen Aberration vernachlässigt wird. Aber, wie wir sehen werden, hat man feinere Experimente erdacht, die ein merkbares Ergebnis haben müßten; der Ausgang war negativ.

Allerdings hat das keineswegs Verwunderung hervorgerufen; aber man muß sich von den Gründen Rechenschaft geben, die in der LORENTZschen Theorie zu einem so merkwürdigen Ergebnis führen. Man wird sogleich erkennen, daß die Erfolge der Theorie nicht, wie man annehmen könnte, a priori irgendeine Präsumtion zugunsten der durch das Experiment widerlegten Annahme einschließen.

LORENTZ hat seine Auffassung von den Elektronen durch eine geniale Zusammenfassung verschiedenartiger Tatsachen erhalten. Der Wert seiner Hypothesen beruht auf den vorhergehenden Beobachtungen, die in ihnen enthalten sind. Aber in der Beziehung der Bewegung der Elektronen auf einen ruhenden Äther, der von den Körpern unabhängig ist, ist der große Physiker einem willkürlichen Kriterium gefolgt, wenn es auch für die Zwecke der mathematischen Behandlung bequem sein mag. Nun ist es gerade diese willkürliche Annahme, diese Art von Absolutem, das der Theorie zugrunde gelegt wird, welche sich in den späteren Ableitungen wiederfindet. Diese erhalten daher keine größere Glaubwürdigkeit durch den Umstand, daß sie mit Hypothesen verknüpft sind, welche einen annehmbaren Ursprung haben.

Wir wollen aber die Folgerungen prüfen, zu denen die Entwickelung der Theorie geführt hat.

Ein materielles System $S$ bewege sich in bezug auf den Äther mit einer z. B. gleichförmigen Translation.

Zwei mit $S$ verbundene elektrisierte Punkte $A$ und $B$ üben aufeinander nicht mehr eine einfache elektrostatische Wirkung aus, sondern erzeugen zwei Ströme, deren AMPÈRESche Wirkung die erste vermindert; allerdings wäre diese Korrektion im positiven Sinne als nicht vorhanden zu betrachten, wenn sie nicht von der Stellung von $A$ und $B$ in bezug auf die Translationsrichtung



abhinge, da sie in diesem Falle von einem mit $S$ mitgeführten Beobachter nicht gemessen werden könnte, sondern nur von einem solchen, der Vergleiche anstellen könnte mit dem, was im unbeweglichen Äther stattfindet. Aber die erwähnte AMPÈRESche Wirkung hängt von der Richtung der Geraden $A\,B$ ab und wird deshalb durch Experimente innerhalb $S$ konstatierbar.

Ein von MICHELSON 1881 ausgeführtes und von demselben Experimentator zusammen mit MORLEY 1887 wiederholtes optisches Experiment entspricht dem durch die vorstehenden Betrachtungen gestellten Probleme.

Schematisch dargestellt handelt es sich um folgendes:

In $S$ sind drei Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben als Spitzen eines gleichschenkligen Dreiecks, das in $A$ einen rechten Winkel hat. $A\,B$ ist die Richtung der translatorischen Bewegung von $S$, $A\,C$ steht senkrecht darauf; dann muß die Lichtgeschwindigkeit von $A$ nach $B$ verschieden sein von der von $A$ nach $C$.

Das auf der Erde gemachte Experiment läßt keinen Unterschied erkennen. Nun zeigt die Berechnung dieses Unterschiedes, daß er von der Größenordnung des Quadrates der Aberration ist und deshalb feststellbar sein müßte!

Deshalb hat man aus dem MICHELSONschen Versuch eine Bestätigung des *Relativitätsprinzips* entnommen: ***mittels optisch-magnetischer Experimente innerhalb eines bewegten Systems kann man die translatorische Bewegung desselben in bezug auf den Äther nicht feststellen.***

Um dieses negative Ergebnis zu erklären, haben LORENTZ selbst und FITZ GERALD die Annahme gemacht, daß die sämtlichen Längen der bewegten Körper in der Richtung der Translation eine kleine Verkürzung erfahren. Demnach *erscheinen* die Entfernungen $A\,B$ und $A\,C$ im Experimente als gleich; in *Wirklichkeit* (d. h. in bezug auf den Äther) sind sie als verschieden zu betrachten.

Um diese Verkürzung (die auf der Erde von der Ordnung des Quadrates der Aberration ist), plausibel zu machen, und um eine vollständige Erklärung des Relativitätsprinzips (wenigstens für den Fall der gleichförmigen Translation) zu erhalten, hat man zu anderen Hypothesen seine Zuflucht genommen, nämlich zu der Annahme, daß die Molekularkräfte, von denen im Grunde die Dimensionen der Körper abhängen, elektromagnetischen Ursprungs seien, daß die Materie selbst eine Vereinigung von Elektronen sei (§ 31) und daß diese, anstatt eine unveränderliche Kugelgestalt (ABRAHAM) zu behalten, eine Kontraktion erfahren, als ob der Äther bei der Bewegung auf sie drückte und sie so in abgeplattete Ellipsoide verwandelt, sei es, indem sie dasselbe Volumen behalten (BUCHERER, LANGEVIN), sei es, indem sie zwei gleiche Achsen behalten (LORENTZ).[1])

Diese letztere Hypothese ist allerdings die einzige, die mit dem Vorangehenden kombiniert, das Relativitätsprinzip erklärt und die sich nach POINCARÉ[2]) durch die Annahme rechtfertigt, daß der Äther auf das deformierbare Elektron einen konstanten Druck ausübt, dessen Arbeit der Volumveränderung proportional ist.

Nun ziehen die oben erwähnten Hypothesen eine radikale Umformung der klassischen Dynamik nach sich, die durch eine *elektrische Dynamik* ersetzt wird, von der wir später reden werden. Hier wollen wir uns darauf beschränken, das Resultat zusammenzufassen, zu dem wir in der uns beschäftigenden Frage geführt worden sind.

Das Prinzip der Relativität für die elektromagnetischen Erscheinungen läßt sich in der LORENTZschen Theorie mit Hilfe der folgenden Hypothesen und Überlegungen erklären:

1) Vgl. die Verhandlungen der Amsterdamer Akademie, Mai 1904.
2) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, Juni 1905.



1. Die Körper bestehen aus *Elektronen*, die sich bei einer Translation *zusammenziehen* und in abgeplattete Ellipsoide verwandeln durch die Wirkung eines *Ätherdrucks*, dessen Arbeit der Volumveränderung des Elektrons proportional ist.
2. Alle *Kräfte* sind *elektromagnetischen Ursprungs*.
3. Die *Messungen*, die innerhalb eines bewegten Systems vorgenommen werden, *hängen ab* von den Dimensionen der Instrumente, von den Kräften, die als Vergleichsgrößen benutzt werden und von der *Ortszeit*.

Man denkt sich die *wahre Zeit t* definiert in bezug auf einen mit dem Äther verbundenen ruhenden Beobachter. Ein mit der Materie mitgeführter Beobachter, der mit dem ersten mittels optischer (oder elektrischer usw.) Signale verkehrt, hat ein Zeitmaß $\tau$, wo

$$\tau = at + b$$

(vgl. Kap. V § 8); $a$ und $b$ sind *Ortskonstanten*, von denen die erste von der (als gleichförmig vorausgesetzten) Translationsgeschwindigkeit, die zweite auch von der Entfernung zwischen dem bewegten und dem ruhenden Beobachter abhängt.

Die Theorie erfordert, daß $\tau$ den Angaben der Uhren in $S$ entsprechend angenommen wird, vorausgesetzt, daß die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Uhren in $S$ so hergestellt wird, als ob die Zeit, welche das Licht braucht, um von einem Punkte $A$ zu einem Punkte $B$ zu gelangen, von der Richtung der Strecke $A\,B$ unabhängig ist, was für die wahre Zeit nach der LORENTZschen Hypothese nicht mehr gilt.

## § 29. Äther und Materie.

Die Erklärung des Relativitätsprinzips für elektromagnetische Erscheinungen ist von POINCARÉ (a. a. O.)

auf eine plausible mathematische Form gebracht worden, die wir folgendermaßen wiedergeben können:

Der Geometrie und speziell der Definition der Kongruenz von Figuren liegt eine Gruppe von Transformationen *(geometrischen Bewegungen)* zugrunde, welche hypothetischen Bewegungen des starren Äthers entsprechen. Dann definieren die Bewegung starrer Körper innerhalb eines beweglichen materiellen Systems $S$, die Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes usw. gleichfalls innerhalb $S$ eine *scheinbare* Kongruenz der Figuren, die von der Bewegung von $S$ in bezug auf den Äther abhängt. Sie drückt eine invariante Beziehung aus nicht mehr in bezug auf die Gruppe der geometrischen Bewegungen, sondern in bezug auf eine *neue Gruppe von Transformationen* (die Gruppe der *scheinbaren* Bewegungen, die aus den *wirklichen* geometrischen Bewegungen durch eine LORENTZsche Transformation hervorgehen).

Hier wird ein transzendenter Begriff der Kongruenz dem experimentell definierten gegenübergestellt, und der erste wird als eine *metaphysische Wirklichkeit*, der zweite als *physikalischer Schein* betrachtet!

Eine ähnliche Folgerung ergibt sich aus der der Theorie zugrunde liegenden Vorstellung eines *von der Materie abhängigen Äthers.*

Aber die Kritik strebt nach einer Befreiung von dieser Art von Absolutem. Sie verweist die Hypothese des ruhenden Äthers unter diejenigen, die auch nicht einmal Gegenstand der indirekten Kontrolle durch mögliche Experimente werden können, und nimmt ihr deshalb jede Bedeutung. Sie sieht in ihr lediglich einen Kunstgriff.

Dieser Kunstgriff kann für die mathematische Behandlung bequem erscheinen; aber man kann nicht leugnen, daß er auch eine gefährliche Seite hat, indem



er einige Zeitlang Zweifel gerechtfertigt hat, die keinen plausiblen Grund hatten. Immerhin werden wir uns wegen dieser Zweifel nicht allzu große Sorgen machen, da sie, und zwar zuerst von dem Gründer der Theorie, offen anerkannt worden sind und zu einem Versuch einer Vereinheitlichung der Kräfte die Veranlassung gegeben haben, der sich als ein verführerisches Versprechen für die Zukunft darstellt.

Wir wollen nur den Weg zeigen, auf dem man nach unserer Ansicht a priori die fiktiven Fragen beseitigen müßte, die sich aus jenem Kunstgriff ergeben.

Es handelt sich um die Gewinnung einer befriedigenderen Vorstellung vom *Äther*, die *mit der Materie in Beziehung stehen* muß.

Man darf sich nicht darüber täuschen, daß der Äther nur ein Vermittler für die Beziehungen zwischen den materiellen Körpern ist. Daher sind diese Körper in Wirklichkeit das *Gegebene*, und man muß von ihnen ausgehen, um eine Vorstellung des Äthers zu *konstruieren*.

Nun werden aber die Beziehungen zwischen Äther und Materie bei dem Studium der mannigfachen mechanischen Modelle (§ 24) im allgemeinen vom entgegengesetzten Gesichtspunkt aus betrachtet. Man nimmt eine Flüssigkeit mit gewissen Eigenschaften als gegeben an, ein vereinfachtes Bild der wirklichen Flüssigkeiten (z. B. ein homogenes unendlich zusammendrückbares Fluidum oder analog einem festen beweglichen oder unbeweglichen Körper usw.), und man betrachtet die Materie als *singulären Punkt* in dieser Ätherflüssigkeit; sei es, daß die materiellen Punkte als Punkte der *Zerstörung* oder *Löcher* im Äther betrachtet werden oder daß man sie sich als *Wirbel* oder *Torsionspunkte* usw. denkt.

Derartige Spekulationen bedeuten den Versuch *durch Analogie* die erscheinungsmäßigen Beziehungen zu-

sammenzufassen, die man sich mit der *Gesamtheit* der Körper verknüpft denkt. Ihre Bedeutung besteht in der Ansicht von einem *universellen Zusammenhange* aller Gegenstände der Sinne, der der Anschauung der Materie selbst, d. h. der Unterscheidung zwischen *inneren* und *äußeren* Eigenschaften, die sich an sie knüpfen, gegenübersteht.

Aber um den Zusammenhang der Sinneswelt auszudrücken und die abstrakten Unterscheidungen in bezug auf denselben zu *korrigieren*, wird man schwerlich mit einem a priori konstruierten Modelle auskommen.

Man kann sich deshalb nicht wundern, wenn auch die von genialen Männern erdachten Modelle die Beziehungen, die man erklären will, schlecht wiedergeben, und wenn Theorien, die von jedem mechanischen Modell absehen, dieses Ziel der Erkenntnis in gleicher Weise erreichen.

Wir fragen nach einer *Definition des Äthers als eines Dinges, das an jedem Orte und in jedem Augenblick von der ganzen mehr oder weniger entfernten Materie abhängig ist*, z. B. eine Gesamtheit von Teilchen, die von den materiellen Körpern ausstrahlen oder sich in ihnen verdichten; Teilchen, deren Bewegungen mit den Erscheinungen der Materie verknüpft sind und durch die physikalischen Beziehungen zwischen den Körpern wenigstens nach ihrer mittleren Wirkung erkannt werden können. Wir glauben, daß eine derartige einheitliche Vorstellung im Gebiete der Physik der Strahlungserscheinungen bald auftreten wird, während man heute die Emissionsstrahlen (Ströme von Elektronen) und die schwingenden Strahlungen (die von der magnetischen Kraft nicht abgelenkt werden) als von Grund aus verschieden ansieht. Es wird dies gewissermaßen ein Wiederauftauchen der Emissionsoptik sein, die aber gründlich umgeformt ist.



Ohne uns bei den Schwierigkeiten eines solchen Programms aufzuhalten, wollen wir uns darauf beschränken hervorzuheben, daß die von uns geforderte Äthervorstellung a priori aus der Elektrodynamik der bewegten Körper die sinnlosen Fragen beseitigen würde, die sich aus der Annahme eines absoluten Bezugssystems ergeben. Es würde sich nur darum handeln, für jedes Medium und für jede Art von Erscheinungen, die dort auftreten, zu wissen, welcher Art die Ätherteilchen sind, denen die Erscheinungen zugeschrieben werden müssen. Und wenn bei den Erscheinungen, die innerhalb eines Mediums ihren Ursprung haben, nur die Körper in Betracht gezogen werden, die sich darin befinden, so bleibt das Relativitätsprinzip a priori gesichert.

## § 30. Die Dynamik des Elektrons: die Strahlungen.

Wir haben (§ 28) erwähnt, daß die Erklärung des Relativitätsprinzips für die elektromagnetischen Erscheinungen aus den neuesten Entwickelungen der Elektronentheorie, aus denen eine *elektrische Dynamik* entstanden ist, sich ergeben hat.

Der Ausgangspunkt der neuen Theorie ist das Studium der mannigfachen Strahlungen, die in einem Magnetfelde abgelenkt werden (Kathodenstrahlungen, Becquerel-Strahlen usw.), und die man zur Erklärung ihrer Eigenschaften als Ströme von Elektronen anzusehen gezwungen war.

Wenn man diese Hypothese (von Becquerel und von J. J. Thomson) annimmt, so hat man in diesen Strahlungen ein Beispiel von elektrisierten Körpern, die sich mit ungeheuren Geschwindigkeiten bewegen, welche wenig von der des Lichtes verschieden sind. Die Geschwindigkeiten, die in der gewöhnlichen Dynamik vorkommen, sind, damit verglichen, sehr klein.

Um die Bewegung der Elektronen in den Kathodenstrahlen usw. zu behandeln, muß man berücksichtigen, daß die Beschleunigung oder Verzögerung dieser Bewegung einen Strom hervorruft, der das elektromagnetische Feld verändert. Wenn man diese Veränderung in Rechnung zieht, so kann man eine *Dynamik des Elektrons* aufstellen, deren Prinzipien in der Untersuchung der erwähnten Strahlungen Anwendung und Bestätigung finden (ABRAHAM, SCHWARZSCHILD, KAUFMANN usw.).

Die Vektorgleichung der Bewegung eines Elektrons kann auf eine Form gebracht werden, die derjenigen der NEWTONschen Bewegungsgleichung eines Massenpunktes analog ist.

Wenn wir in der letzteren mit $m$ die Masse des Punktes, mit $a_g$ die Beschleunigung und mit $f_g$ die Kraft in der Richtung $g$ bezeichnen, so haben wir

$$m\, a_g = f_g$$

Nun muß man an Stelle von $m$ einen Ausdruck von der Form $m + m_g$ setzen und also schreiben

$$(m + m_g)\; a_g = f_g$$

Die Größe $m$, die zu der eigentlichen Masse $m$ des Elektrons hinzukommt, ist nicht mehr eine Konstante, sondern hängt ab von der geometrischen Form des Elektrons selbst, von seiner elektrischen Ladung und von der Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit in bezug auf $g$. Sie hat den Namen *elektromagnetische Masse* erhalten.

Wenden wir die vorstehende Gleichung auf den Fall der Strahlen an, die man als Ströme von negativen Elektronen betrachtet.

Eine elektrische oder magnetische Kraft lenkt diese Strahlen ab und aus der erhaltenen Ablenkung, aus der Berechnung der mitgeführten Ladung und der entwickelten Wärme kann man in verschiedener Weise ein Maß für die zusammengesetzte Masse $m + m_g$ ableiten.



Für die Strahlen, deren Geschwindigkeit nahe gleich einem Zehntel der Lichtgeschwindigkeit ist, findet man diese Masse ungefähr tausendmal kleiner als die des Wasserstoffatoms.

Aber für Kathodenstrahlen mit großen Potentialdifferenzen zwischen den Elektroden, die mit einer Geschwindigkeit begabt sind, welche bis zu $^9/_{10}$ von derjenigen des Lichtes steigt, hat KAUFMANN weit größere Massen gefunden.

Die verschiedenen Versuchsergebnisse lassen sich gut darstellen, wenn man voraussetzt, daß die elektromagnetische Masse $m_g$ $m$ weit übersteigt oder auch wenn man $m$ gleich Null setzt. Unter dieser Annahme ist die Masse eines Elektrons rein elektromagnetisch, d. h. die *Trägheitskräfte*, die nötig sind, um die Bewegung eines Elektrons zu beschleunigen, oder die aus seiner Verzögerung entstehen, *erklären sich als eine elektromagnetische Erscheinung.*

## § 31. Elektrische Dynamik.

Die Dynamik des Elektrons führt auf eine *Erklärung* der NEWTONschen Dynamik, die sich hier als eine angenäherte Theorie für Bewegungen mit kleinen Geschwindigkeiten darstellt (Wien 1901).

Nehmen wir zunächst an, daß ein materieller Punkt als ein Elektron betrachtet werden kann, und betrachten wir z. B. seine elektromagnetische Masse $m_1$ in der Richtung der Bewegung *(longitudinale Masse)*. Wenn wir mit $V$ die Lichtgeschwindigkeit, mit $v$ die Geschwindigkeit des Elektrons, mit $e$ seine Ladung und mit $r$ seinen Radius (das Elektron als kugelförmig betrachtet) bezeichnen, so ergibt sich:

$$m_1 = m_0 \left(1 + \frac{6}{5}\frac{v^2}{V^2} + \cdots\right),$$

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{V^2 r}$$

In ähnlicher Weise kann man die *transversale Masse* des Elektrons (die zu der auf der ersten senkrechten Richtung gehört) in eine Reihe nach geraden Potenzen von $\frac{v}{V}$ entwickeln, deren erstes Glied immer $m_0$ ist.

Daraus folgt, daß, *wenn v klein ist im Vergleich zu V, die elektromagnetische Masse des Elektrons sich merklich auf die Konstante $m_0$ reduziert.*

Das bedeutet, daß für kleine Geschwindigkeiten das Newtonsche Gesetz angenähert als Bewegungsgesetz des Elektrons gilt.

Nun geht man von der Dynamik des Elektrons zu einer neuen elektrischen Dynamik der Körper über mit Hilfe einiger Annahmen über die Konstitution der Materie und über die Kräfte. Man wird dadurch dazu geführt, die elektrische Erklärung des Newtonschen Bewegungsgesetzes auch auf den Fall eines Massenpunktes auszudehnen, der nicht mehr als ein einzelnes Elektron betrachtet werden kann, sondern sich vielmehr als ein Aggregat von Elektronen darstellt.

Eine *elektrische Theorie* der Materie ist von Lodge (1902) entwickelt worden. Sie besteht in der Annahme, daß das Atom aus einem System von positiven und negativen Elektronen besteht, wobei die letzteren sich wie Satelliten um die ersteren bewegen.

Eine solche Bestimmung dieses Modells ergibt sich aus der Vergleichung der verschiedenen Strahlungsarten, besonders aus dem Unterschied zwischen den aus negativen Elektronen bestehenden Strahlen und denen, die aus positiven Elektronen bestehen (Kanalstrahlen, $\alpha$-Strahlen des Radiums).

Die *elektrische Theorie* der Materie führt zu einer ebensolchen *der Kräfte.* Die inneren Kräfte der Materie (die elastischen, chemischen usw.) werden als Resultanten der Wirkungen dargestellt, die zwischen den



Elektronen stattfinden. Auch die Gravitation gestattet, wie wir später ausführen werden, eine elektrische Erklärung.

Daraus leitet man ab, daß die Bewegungsgesetze eines Körpers, der als Massenpunkt zu betrachten ist, dieselben sind, welche die Bewegung eines Elektrons beherrschen, d. h. die Bewegung wird dargestellt durch die Vektorgleichung

$$f_g = m_g a_g,$$

die *der Form nach* der Newtonschen Gleichung ähnlich ist, aber in der die *elektromagnetische Masse* $m_g$ nicht mehr eine Konstante ist, sondern von der Geschwindigkeit und von der Richtung der Bewegung in bezug auf die der Kraft $g$ abhängt.

Nun ist $m_g$ die Summe der Vektoren, welche den Elektronen entsprechen, die den Körper (Massenpunkt) zusammensetzen. Sie hängt deshalb ab:

1. von den *inneren* Bewegungen der Elektronen in den Atomen oder Molekülen.

Man kann nicht sagen, daß die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen gegen die des Lichtes vernachlässigt werden können; denn man muß manchmal die Annahme machen, daß sie wesentlich größer sind als die Geschwindigkeiten der gewohnten Bewegungen. Aber wenn die Dimensionen des Massenteilchens groß sind gegen die der Elektronen, so entspringt die gesamte elektromagnetische Masse als Mittel aus diesen inneren Bewegungen und kann deshalb als konstant betrachtet werden.

2. von der *äußeren* oder sichtbaren Bewegung des Massenteilchens.

Da es sich jedoch hier um Geschwindigkeiten handelt, die gegen die Lichtgeschwindigkeit klein sind, so beeinflußt diese äußere Bewegung die elektromagnetische Masse nicht merklich.

Im ganzen kann also $m_g$ als konstant betrachtet werden, d. h. *für verhältnismäßig kleine Geschwindigkeiten finden die Bewegungsgesetze der elektrischen Dynamik einen angenäherten Ausdruck in den Gesetzen der* Newtonschen *Dynamik.*

Dieses Ergebnis ist sehr interessant. Es stellt eine Umkehrung in dem klassischen Problem der mechanistischen Philosophie dar. *Anstatt die elektromagnetischen Erscheinungen durch ein mechanisches Modell zu erklären, gelingt es, ein elektrisches Modell der Mechanik selbst herzustellen, das außerdem eine Korrektion der letzteren einschließt.*

Dies ist das Ergebnis, zu dem der am weitesten fortgeführte Versuch der Vereinheitlichung der Kräfte im Sinne der Newtonschen Ideen geführt hat. Es geht aus ihm eine *nichtnewtonsche Dynamik* hervor, aus der sich die klassischen Gesetze als Grenzfall ergeben!

## § 32. Die elektrische Erklärung der Gravitation.

Wir werden später die Bedeutung dieser induktiven Entwickelung der Dynamik noch näher untersuchen. Zunächst wollen wir jedoch die positiven Folgerungen betrachten, die sich daraus für die Theorie der Gravitation in bezug auf die planetarische Astronomie ergeben.

Indem er einen Gedanken Mossottis wieder aufnahm, hat Lorentz (1900) die Hypothese aufgestellt, daß die Newtonsche Anziehung zwischen den Körpern sich erklären lasse als Resultante der Wirkungen zwischen den in ihnen enthaltenen Elektronen. Es genügt dazu, einen kleinen Unterschied anzunehmen zwischen der Anziehung und der Abstoßung, die eine elektrische Ladung auf zwei andere äquivalente, aber ungleichnamige ausübt. Die elektrische Theorie der Materie legt diese Annahme nahe.



Nun folgt aus ihr, daß die Gravitation sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes ausbreiten müßte; und dies scheint den Ergebnissen von Laplace und Lehmann-Filhes (vgl. Kap. V § 29) zu widersprechen.

Aber für diese Autoren war die Ausbreitungszeit der Gravitation die einzige einzuführende Korrektionshypothese.

Dagegen behauptet Poincaré[1]), indem er andere kleine Korrektionen berücksichtigt, die sich auf die Hypothesen der oben erwähnten elektrischen Dynamik beziehen, eine gewisse Kompensation gefunden zu haben, durch die die Abweichung von dem Newtonschen Gesetz anstatt (wie in den Rechnungen von Laplace) von der Ordnung der astronomischen Aberration zu sein, von der Ordnung ihres Quadrates wird.

Es erscheint demnach möglich, daß die Ausbreitung der Schwerkraft mit Lichtgeschwindigkeit mit den astronomischen Beobachtungen in Einklang zu bringen ist.

Weitere Untersuchungen müssen darüber Aufschluß geben.

Wenn daraus sich im besonderen eine Korrektion der kleinen Abweichungen von der Newtonschen Theorie (Kap. V § 29) ergibt, so würde dies eine weitere Bestätigung der Hypothesen der elektrischen Dynamik bedeuten.

## § 33. Ergebnisse: Die allgemeine *nichtnewtonsche* Dynamik.

Vergegenwärtigen wir uns die in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Entwickelungen und sehen wir zu, was sich daraus für eine genauere Verifikation der Mechanik oder für eine Korrektion derselben ergibt.

---

1) Comptes rendus a. a. O.

Der leitende Gedanke, das Studium der Physik als eine Ausdehnung der Dynamik zu betreiben, erweist sich bis zu einem gewissen Grade nachträglich als gerechtfertigt durch den Erfolg der deduktiv abgeleiteten Voraussagen auf der Grundlage von Beobachtungen und Versuchen, die in verschiedenen Gebieten die ergänzenden Hypothesen liefern.

Immerhin ist der Erfolg kein vollkommener, und alles in allem muß man folgendes feststellen:

1. Die verifizierten Ergebnisse haben oft eine größere Allgemeinheit als die Voraussetzungen, so daß sie nicht als ein Beweis für die Hypothesen der klassischen Mechanik dienen können, der genauer wäre als derjenige, den man den direkten Beobachtungen und Versuchen entnimmt (§ 16).
2. Die mechanische Erklärung einiger Erscheinungen erfordert die Hinzunahme von Mittel- und Grenzbetrachtungen (§ 15).
3. Andere Erscheinungen entziehen sich der Voraussage durch die mechanische Theorie und können mit ihr nicht in Einklang gebracht werden; es sei denn, daß man etwas künstliche und unbestimmte Hypothesen annimmt, so z. B. die Erscheinungen der Hysteresis (§ 12).
4. Endlich scheinen einige optische oder elektromagnetische Erscheinungen den Prinzipien der klassischen Mechanik und besonders dem Newtonschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung direkt zu widersprechen (§ 27).

Daraus ergibt sich folgender Schluß: *Anstatt eine genauere Verifikation der klassischen Mechanik zu liefern, führt die Physik vielmehr zu einer Korrektion der a priori als streng gültig betrachteten Prinzipien dieser Wissenschaft.*

Es ergibt sich auch, daß die durch die elektromagnetische Optik herbeigeführte Korrektion das *verallgemeinerte Trägheitsgesetz* trifft, vermöge dessen das Newtonsche Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung aus einer statischen Symmetrie abgeleitet werden kann (vgl. Kap. V § 22).



Es handelt sich nun darum, zu erkennen, welche Art von Hypothesen man in einer allgemeinen *nichtnewtonschen Dynamik* an die Stelle dieses Prinzips zu setzen hat, wenn man die Postulate festhält, die implizite in den Grundbegriffen enthalten sind, und die Gesetze des Gleichgewichts und der beginnenden Bewegung (vgl. Kap. V § 23). Es handelt sich also darum, die Korrektionen, die sich vordem als nötig erwiesen haben, in diesen Rahmen einzuspannen und besonders zu zeigen, daß die elektrische Dynamik sich als eine besondere Bestimmung der nichtnewtonschen Hypothese erweist.

Versuchen wir, uns von der Veränderung Rechenschaft zu geben, die die klassischen Ansichten erfahren, wenn man das verallgemeinerte Trägheitsgesetz fallen läßt. Wir wollen uns zu diesem Zweck auf einen einfachen schematischen Fall beziehen.

Mehrere Körper $A$, $B$, $C$ ..., die in bezug auf die Richtungen der Sterne unbeweglich sind, definieren in einem gewissen Gebiete $S$ des Raumes ein Kraftfeld.

Das bedeutet, daß, wenn man einen materiellen Punkt $P$ an irgendeine Stelle von $S$ bringt, man auf ihn eine bekannte Kraft ausüben muß, um ihn festzuhalten, eine Kraft, von der wir allgemein annehmen können, daß sie von der Masse $m$ von $P$ abhängt.

Denken wir uns auf $P$ einen Impuls ausgeübt. Die Bewegung von $P$ setzt sich fort unter der Wirkung des anfänglichen Impulses und der Kraft, die wie oben für jede Lage in bezug auf $S$ definiert ist. Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz erlaubt diese beiden bestimmenden Umstände einfach zu *summieren* oder diejenigen zu summieren, die für jeden Augenblick sich er-

geben: die Geschwindigkeit von $P$ in diesem Augenblick und die Kraft, die auf $P$ infolge seiner *augenblicklichen* Lage ausgeübt wird.

Die Voraussage der künftigen Bewegung von $P$ wird also letzten Endes abgeleitet aus der Superposition dieser bekannten bestimmenden Umstände, nämlich:

1. der *inneren* Eigenschaften von $P$, d. h. seiner Masse,
2. der *äußeren* Umstände, d. h. des durch $A$, $B$, $C$ ... definierten Kraftfeldes,
3. einer einfachen *Beziehung* zwischen $P$ und $A$, $B$, $C$..., d. h. der *Geschwindigkeit* von $P$ in bezug auf diese Körper in dem gegebenen Augenblick.

Diese Umstände definieren den *augenblicklichen Zustand* der *Bewegung eines isolierten Punktes* und *der zukünftige Zustand hängt von dem gegenwärtigen und nicht von den früheren ab* (vgl. § 12).

Diese Hypothese der *Nichterblichkeit* entspricht dem verallgemeinerten Trägheitsgesetz. Sie schließt im besonderen in sich, daß *das Feld S durch die Bewegung von P nicht verändert wird*, wenigstens in dem folgenden Sinne: Die Gegenwart von $P$ in $S$ verändert das durch die Körper $A$, $B$, $C$ ... definierte Kraftfeld, d. h. verändert das Ergebnis von Versuchen an anderen in $S$ festgehaltenen Punkten. Aber, *da diese Veränderung als eine augenblickliche betrachtet wird*, so braucht man sie bei der Untersuchung der Bewegung von $P$ selbst nicht zu berücksichtigen, d. h. *die Gegenwart von P in dem Felde zu einer früheren Zeit beeinflußt nicht die Kraft, die auf P in seiner gegenwärtigen Lage wirkt.*

Lassen wir nun das verallgemeinerte Trägheitsgesetz fallen und suchen wir (unter Beibehaltung der anderen Begriffe und Prinzipien der Mechanik) die allgemeine Form einer *nichtnewtonschen Hypothese* festzustellen, die man zur Bestimmung der Bewegung an Stelle des aufgegebenen Prinzips annehmen muß.



Diese Hypothese kann eine Abhängigkeit herstellen zwischen der zukünftigen Bewegung von $P$ und allen seinen vorhergehenden Zuständen, d. h. sie kann die Form einer *Erblichkeitshypothese* annehmen. Wenn man jedoch eine Darstellung der Tatsachen durch elementare Ursachen (Kap. III § 33) fordert, so muß man annehmen, daß diese Zustände durch Berührung Veränderungen hervorgerufen haben, die wir augenblicklich in dem Felde erkennen können.

In dieser Weise tritt an Stelle der *Erblichkeitshypothese* die *Hypothese des Zusammenhangs* des Feldes:

*Wenn ein isolierter Punkt P sich in einem Felde S in bezug auf die unbeweglichen Körper A, B, C ... bewegt, welche als bestimmende Umstände der Bewegung gelten, so hängt seine zukünftige Bewegung ab von seiner Masse, seiner Lage, seiner gegenwärtigen Geschwindigkeit und den Kräften, welche im gegenwärtigen Augenblick durch Erforschung des Feldes bestimmt werden könnten. Diese Kräfte ihrerseits hängen jedoch nicht nur von A, B, C ... ab, sondern auch von der früheren Bewegung von P, gleich als ob P nicht isoliert wäre, sondern in einem Medium enthalten, das sich mit ihm bewegt.*

Die Vorstellung dieses fiktiven Mediums, die den experimentellen Umständen widerspricht, welche in der Hypothese der *Isolierung* (der leeren Umgebung) angenommen sind, bedeutet, daß man nicht durch Abstraktion die *inneren* und *äußeren* die Bewegungserscheinung bestimmenden Umstände unterscheiden kann und drückt im Grunde die Annahme eines Zusammenhanges zwischen sämtlichen Gegenständen der Sinne aus.

Die Entwickelungen der energetischen Mechanik und diejenigen der elektromagnetischen Optik beruhen in verschiedener Weise auf einem ähnlichen Gesichtspunkt. Aber unserer Ansicht nach wird das zulässige Maß über-

schritten, wenn man die Unterscheidungen beseitigen will, die mit dem ursprünglich gegebenen Begriff der Materie (vgl. §§ 17, 19) zusammenhängen, anstatt sie als eine erste Annäherung zu betrachten, die für die Entwickelung der Erkenntnis notwendig ist und die durch fortgesetzte Ergänzungen immer weiter korrigiert werden muß.

Es ergibt sich aus der vorstehenden Kritik, daß, wenn man das verallgemeinerte Trägheitsgesetz fallen läßt, man eine nichtnewtonsche allgemeine Mechanik aufstellen kann, in der die Beobachtung der die Bewegung bestimmenden Umstände sich entweder

1. in der Zeit durch eine *Erblichkeitshypothese* oder
2. im Raume durch eine *Hypothese des Zusammenhanges* erweitert, die an Stelle der ersten gesetzt werden kann.

Die dauernden Veränderungen der elastischen Körper (die Erscheinungen der elastischen Hysteresis) haben uns die erste Hypothese nahegelegt. Die optisch-elektromagnetischen Erscheinungen haben uns den zweiten Gesichtspunkt gebracht, der geeignet ist, von der *scheinbaren Erblichkeit* Rechenschaft zu geben, die man z. B. in der magnetischen Hysteresis antrifft, da es genügt, eine Modifikation des umgebenden Äthers zu postulieren.

Es kommt nun darauf an, folgendes ausdrücklicher hervorzuheben.

*Die elektrische Dynamik ist eine besondere Bestimmung der nichtnewtonschen Dynamik*, die aus der Ersetzung des verallgemeinerten Trägheitsgesetzes durch die Hypothese eines Zusammenhanges des Bewegungsfeldes entsteht, wenn man dabei die *Prinzipien des Gleichgewichtes und der beginnenden Bewegung festhält.*

Wir haben nämlich (mit WIEN) darauf aufmerksam gemacht, daß die Gesetze der elektrischen Dynamik diejenigen der NEWTONschen angenähert wiedergeben,



und daß die Annäherung um so größer ist, je kleiner die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist, so daß die Gesetze des Gleichgewichts und der beginnenden Bewegung genau herauskommen.

Der Umstand, daß die Hypothesen der elektrischen Dynamik zu einer angenäherten Gültigkeit der NEWTONschen führen, hängt im übrigen nicht von der besonderen Bestimmung dieser Hypothesen ab.

Wenn wir nämlich die allgemeine Hypothese des Zusammenhanges des Feldes der Bewegung eines Punktes $P$ wieder aufnehmen, so sehen wir, daß diese zur Annahme einer fortschreitenden *lokalen Veränderung des Feldes* (die von der Bewegung von $P$ usw. abhängt) führt, welche *sich mit einer gewissen Geschwindigkeit $v$ ausbreitet.*

Das verallgemeinerte Trägheitsgesetz entspricht der Annahme $v = \infty$, und diese Annahme kann immer dann ohne merklichen Fehler gemacht werden, wenn die Geschwindigkeit von $P$ *gegen $v$ hinreichend klein* ist.

Der Grad der Kleinheit kann nicht a priori festgestellt werden, da er unter anderem von dem *Bezugssystem* der Bewegung abhängt.

Das Trägheitsgesetz gilt schon mit guter Annäherung für ziemlich kleine Geschwindigkeiten in der irdischen Dynamik. Aber die Annäherung ist besser und findet auch für größere Geschwindigkeiten statt, wenn man die Bewegung auf ein System astronomisch fester Richtungen bezieht. Dies schließt in gewisser Weise den universellen Zusammenhang ein, den die NEWTONsche Dynamik schon zu berücksichtigen gezwungen war.

Aus dem Vorstehenden ziehen wir die folgenden Schlüsse: Die Entwickelungen der mechanischen Philosophie stellen den Versuch einer *Erklärung* der Physik dar, indem darin eine Verifikation der fundamentalen *Hypothesen* einer *Mechanik*, die als *allgemein und streng* betrachtet wird, erblickt wird.

Dagegen scheinen die Deduktionen und Experimente, die während zweier Jahrhunderte angestellt worden sind, eine dieser Hypothesen als ungültig zu erweisen und lassen den Gedanken aufkommen, daß die Newtonsche Mechanik durch eine nichtnewtonsche ersetzt werden müßte, in der die Gesetze des Gleichgewichts und der beginnenden Bewegung beizubehalten wären. Die neueren elektromagnetischen Theorien dürften auch die ergänzende Hypothese der neuen Dynamik bestimmen. Aber abgesehen von dieser Bestimmung *muß man festhalten, daß das verallgemeinerte Trägheitsgesetz mit um so größerer Annäherung gilt, je kleiner die Geschwindigkeit der Bewegung gegen die Lichtgeschwindigkeit ist.*

Es ist unseres Erachtens interessant zu erkennen, daß derjenige Teil der Mechanik der dauerhafteste ist, der „allen Mechaniken gemeinsam ist, die sich auf beliebige Bezugssysteme beziehen".

## § 34. Die physikalische Erklärung: der Wert der mechanischen Modelle und der Gleichungen.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen haben wir schon eine erste Art von Schlüssen gezogen, die sich auf die Verifikation der Dynamik bezogen. Wir wollen nunmehr noch andere ableiten über den *Wert der mechanischen Modelle* und den Sinn der *Erklärungen* in der Physik.

Wir müssen dazu wieder anknüpfen an das, was zu Anfang dieses Kapitels gesagt wurde.

Die Hypothese eines unsichtbaren mechanischen Substrats der physikalischen Erscheinungen kann positiv gedeutet werden als ein *Assoziations- und Abstraktionsprozeß*, der auf eine Darstellung der erscheinungsmäßigen Beziehung mit Hilfe *quantitativer Verhältnisse* zwischen gewissen Daten, d. h. mit Hilfe von *Gleichungen*, welche die Erscheinungen bestimmen, hinausläuft.



Wir haben im übrigen zwei Methoden der Erklärung unterschieden, je nachdem, ob als elementare Daten der dynamischen Erscheinung die „Verbindungen" oder die „Kräfte" betrachtet werden, wobei die einen auf die anderen zurückgeführt werden sollen. Diese beiden Methoden, die sich an die Namen von Descartes und Newton anschließen, greifen übereinander und wechseln sich im Fortschritt der Wissenschaft ab, wie wir dies darzustellen versucht haben. Sie vereinigen sich schließlich zu einer innigeren Verbindung der Sinnesdaten und zu einer Annäherung der Bilder, indem einerseits der Begriff der Verbindung erweitert wird und anderseits die Kräfte auf einen einzigen Typus, z. B. den elastischen oder den elektrischen, zurückgeführt werden.

Aber in dem Gegensatz zwischen der Cartesischen und der Newtonschen Tendenz läßt sich nicht nur ein Kriterium für die Wahl der ursprünglichen Bilder der optischen oder der Tastmuskelbilder erkennen, sondern auch die Neigung, den *genetisch-assoziativen* Bestandteil der Darstellung mittels Größenbeziehungen anders zu bewerten als den *aktuell-abstrakten*.

Unter diesem Gesichtspunkt erscheinen die beiden Tendenzen heute weiter als je voneinander entfernt, indem die radikalsten Behauptungen gleichermaßen aufgestellt werden, sei es, daß man behaupte, „die physikalische *Erklärung* bestehe in dem *mechanischen Modell*", sei es im Gegenteil, „sie bestehe in den die Erscheinung bestimmenden *Gleichungen, unabhängig von jedem Modell*".

Dieser Unterschied in der Auffassung der „physikalischen Erklärung" wird gewöhnlich in Verbindung gebracht mit dem Unterschied zwischen *anschaulicher* und *logischer* Veranlagung. Aber es steckt außerdem darin noch ein Unterschied in der Rolle der beiden Erklärungstypen im Hinblick auf die beiden Momente

des wissenschaftlichen Fortschritts, nämlich den eigentlich erfindenden Fortschritt, der hauptsächlich den anschaulichen Geistern zu verdanken ist und der Systematisierung der Wissenschaft, mit der sich logisch veranlagte Geister beschäftigen.

Das Wort „erklären", d. h. „begreifen", bedeutet sowohl für die einen als für die anderen, zu *gewissen Voraussagen* imstande zu sein. Aber diese bewegen sich nicht auf demselben Gebiete.

Es ist nun klar, daß die *synthetische Erklärung*, die dem höchsten Begreifen entspricht, aus einer kritischen Vereinigung der beiden Erklärungstypen hervorgehen muß, die nicht nur die Summe der verschiedenen erforderlichen Voraussagen liefert, sondern auch eine adäquate Erkenntnis der Beziehungen zwischen den verschiedenen Gebieten.

Wir wollen diese Auffassung erläutern, indem wir die beiden Ansichten über den heuristischen und den Erkenntniswert der Gleichungen und Modelle in Form von Thesis und Antithesis entwickeln.

*Thesis:* Die Möglichkeit für eine Gruppe von Erscheinungen *A* ein mechanisches Modell herzustellen, zieht die Möglichkeit nach sich, die meßbaren Daten dieser Erscheinung in jedem Augenblick zu bestimmen, sobald die willkürlichen Parameter festgelegt sind.

Der *Erkenntniswert* des Modells besteht also *in den Gleichungen*, welche diese Bestimmung erlauben; und diese Gleichungen ergeben sich als *gemeinsamer Teil* aus den *mannigfachen möglichen Modellen.*

Hier muß man auf einen wesentlichen Unterschied zwischen zwei Fällen achten:

1. Die Gleichungen können sich wirklich als unabhängig von jedem Modell ergeben, insofern sie die Daten selbst verknüpfen, nach deren Veränderung gefragt ist. In diesem Falle hat das Modell nur als Mittel



gedient, um *zwischen den Erscheinungen Verbindungen* herzustellen, die den *positiven Gehalt* der Theorie ausmachen. Beispiel: Die elektromagnetische Theorie von Hertz (§ 23).

2. Anderseits können die in den Gleichungen verknüpften Größen sich nicht unmittelbar auf die Daten der Erscheinung beziehen, sondern auf die Bilder. In diesem Falle drücken die Gleichungen nicht mehr den positiven Gehalt der Theorie aus und bilden auch nicht mehr den gemeinsamen Bestandteil *aller* möglichen Modelle, sondern nur die *gemeinsamen Bedingungen einer gewissen Reihe von Modellen.* Wir haben diesen Fall in der undulatorischen Optik Fresnels. Die Grundgleichungen ergeben sich hier mittels weniger allgemeiner Hypothesen und ohne eine besondere Bestimmung des schwingenden elastischen Mediums.[1]) Aber es bleibt immer bestehen, daß sie nicht direkt positive Beziehungen ausdrücken, da ihre Deutung an das Modell gebunden ist.

*Antithesis:* Ein mechanisches Modell, das sich auf eine Gruppe *A* von Erscheinungen bezieht, setzt die Empfindungen in der Phantasie fort und führt deshalb zu Entdeckung neuer Beziehungen:

1. zwischen den Daten von *A* selbst,
2. zwischen diesen und anderen Erscheinungsdaten einer weiteren Gruppe.

Daher beruht der *heuristische Wert* der zu *A* adäquaten mechanischen Modelle eigentlich in gewissen suggestiven Eigenschaften dieser Bilder; in der verschiedenen Extensionsmöglichkeit und allgemein in den *Unterschieden zwischen den erwähnten Modellen.*

Man vergleiche z. B. die Undulationsoptik und die elektromagnetische Optik. Das elastische Modell führt

1) Vgl. z. B. Voigt „Compendium der theoretischen Physik", Bd. II, S. 554 ff.

durch Analogie mit dem Schall unmittelbarer auf die Entdeckung des Dopplerschen Prinzips. Das elektromagnetische Modell, das für Medien, die nicht elektrisch leiten und magnetisch nicht permeabel sind, dem vorhergehenden äquivalent ist, läßt dafür neue Beziehungen zwischen leitenden und undurchsichtigen Körpern (Maxwell) oder zwischen den Lichterscheinungen und dem Magnetfelde (Lorentz, Zeemann) voraussehen.

Als Ergebnis wollen wir festhalten, daß die beiden Arten der *Erklärung* physikalischer Erscheinungen durch Gleichungen oder durch Modelle zwei verschiedenen Formen der Erkenntnis entsprechen, die einander zu ergänzen haben. Die erste enthält (wenigstens in dem typischen Fall, wo die Gleichungen einen positiven Sinn haben) sozusagen eine *abgeschlossene Gruppe von genauen Voraussagen;* die andere eine *Gruppe von* Voraussagen, die nicht mehr a pirori bestimmt, aber *der Erweiterung fähig* sind.

Wer demnach eine *physikalische Theorie* wirklich *verstehen* will, im höchsten Sinne des Wortes, muß den Prozeß in beiden Richtungen durchlaufen, d. h. er muß

1. die Assoziationen und Abstraktionen, die die Begriffe erzeugen, induktiv rekonstruieren, die Hypothesen scheiden, die in ihnen enthalten sind, und die teilweise die Zuordnung zwischen gewissen qualitativen Unterschieden und gewissen quantitativen Verhältnissen ausdrücken und teilweise diese letzteren Verhältnisse mittels der Grundgleichungen der Theorie bestimmen;
2. muß er deduktiv diese Gleichungen *deuten*, d. h. erkennen, wie sie die verschiedenen Erscheinungsdaten liefern als Funktionen einiger bestimmender Umstände, was vor allen Dingen die *Ergänzung* der quantitativen Verhältnisse durch die qualitativen *mittels Hilfshypothesen* erfordert. (Ein



einfaches Beispiel dieser Ergänzung liegt in der Grundhypothese der elektromagnetischen Optik vor. Dieselben Gleichungen werden einerseits gedeutet als elektromagnetische Schwingungen, die mit einem Hertzschen Resonator oder einem Kohärer konstatiert werden können, anderseits als Licht oder Wärmestrahlen usw., je nach der Größe jenes Elementes, das wir als eine „Wellenlänge" darstellen.)

Wer nun in den Geist eines solchen Verständnisses eingedrungen ist, für den ist es klar, daß es hauptsächlich auf eine *synthetische Betrachtung der allgemeinen Beziehungen mit Hilfe eines vereinfachten Schemas* ankommt, *wobei man von den technischen Einzelheiten der Experimente und von den Reihenentwickelungen absieht.*

Es wäre außerordentlich zu wünschen, daß diejenigen, welche Probleme der theoretischen Physik behandeln, immer bemüht wären, diese synthetische Seite der Erklärungen hervorzuheben vor und außer den Einzelheiten der Experimente und Rechnungen. Für einige hochbegabte Geister werden die allzu analytischen Abhandlungen kein Hindernis bilden, und sie werden auf jede Weise imstande sein, die Synthese daraus zu bilden. Aber vielleicht findet der Wunsch, den uns unsere Ohnmacht eingibt, bei der großen Zahl Anklang.

## B. Die mechanistische Hypothese und die Lebenserscheinungen.

### § 35. Einleitung.

Die Auffassung der „mechanischen Erklärung" als „Modell" entwertet nicht die vereinheitlichende Tendenz der partiellen Darstellungen der Erscheinungen, die auf einen extensiven Fortschritt der Wissenschaft gerichtet ist.

Alle wirklichen Probleme, welche die mechanistische Philosophie aufwirft, können deshalb von neuem in ihrer neuen wissenschaftlichen Stellung geprüft werden. Und selbst wenn man den transzendenten Begriff der Allgemeinheit des Mechanismus beiseite läßt, so bleibt noch die Frage offen nach den Grenzen, die er finden *könnte*.

Nun handelt es sich, soweit die mechanische Erklärung in der Physik in Frage steht, nur darum, zu wissen, wie weit die klassischen Prinzipien der Newtonschen Mechanik aufrechterhalten werden können; aber in einem allgemeinen Sinne muß angenommen werden, daß eine solche Erklärung möglich ist, und daß wenigstens der Geist des mechanischen Determinismus aufrechterhalten werden kann, d. h. daß man die Daten der physikalischen Wirklichkeit in der Zukunft als Gegenstände möglicher Voraussagen betrachtet, die auf quantitativen Beziehungen beruhen, welche durch einige charakteristische Umstände der Gegenwart oder Vergangenheit bestimmt sind.

Wenn man jedoch versucht, diese Betrachtungen fortzusetzen und die mechanische Erklärung auf die Lebenserscheinungen auszudehnen, so muß man vorher einige Probleme diskutieren, die wir kurz streifen wollen.

Wir wollen zuerst von der *Möglichkeit* einer solchen Erklärung handeln und dann von ihrem *Wert* oder von der wissenschaftlichen *Nützlichkeit*, die sich daraus ergeben kann.

Die Frage nach der Möglichkeit, für die Lebenserscheinungen ein mechanisches Modell (im weitesten Sinne) zu liefern, führt uns zu Folgendem:

1. das Feld zu reinigen von einigen leeren *Einwänden, die im voraus gemacht werden;*
2. zu einer Prüfung der mit dem *biologischen Determinismus* verknüpften Fragen und besonders des Gegensatzes zwischen



   a) dem *psychologischen Determinismus* und *dem freien Willen,*
   b) der *physikalischen* und der *teleologischen Erklärung;*
3. zu untersuchen, ob in den Lebenserscheinungen die *allgemeinen Prinzipien der Physik verifiziert* sind, die aus der Annahme eines Mechanismus folgen.

Gegen die Annahme eines Mechanismus in der Biologie werden als Gründe vor allem einige Phrasen ins Feld geführt, deren Leerheit gezeigt werden muß.

Man stellt z. B. die *Selbsttätigkeit*, die *Veränderlichkeit* alles Lebendigen der *Trägheit* und *Unveränderlichkeit* der *Materie* gegenüber; und aus dem Gegensatz der so hervorgerufenen Vorstellungsbilder glaubt man einen unlösbaren Widerspruch ziehen zu können.

## § 36. Im voraus zu machende Einwände.

Wenn nun die „Selbsttätigkeit" hier als „Aktivität" oder „Möglichkeit einer Veränderung durch innere Ursachen" aufgefaßt wird, so muß man sagen, daß die Vorstellung einer gänzlich passiven Materie durchaus nicht dem Begriffe entspricht, auf den die verschiedenen physikalischen Beziehungen führen, in denen sich die Materie immer als ein Komplex von Energien erweist. In diesem Sinne erscheint die Ansicht angemessener, daß alles um uns herum lebt und tätig ist, und daß nur ein Unterschied im Grade, d. h. in der Intensität oder der Geschwindigkeit der Veränderung und in der relativen Bedeutung der *inneren und äußeren Faktoren* für den Ablauf der Erscheinungen stattfindet.

Aber die oben erwähnten Einwände und andere ähnliche beruhen offenbar auf Gründen des *Gefühls*.

Das Leben ist uns nicht nur als Gegenstand der Vorstellung gegeben, die Voraussagen, die sich daran

knüpfen, erregen in unserem Geiste Furcht und Hoffnung und entsprechen gewollten oder nicht gewollten Zielen.

Nun ist die mechanistische Hypothese außerstande, die Gefühle zu *erklären*, die sich an die Vorstellung des Lebendigen knüpfen, oder dem Willen eine Norm vorzuschreiben. Schlimmer noch, diese Hypothese scheint den erwähnten Gefühlen durch eine deterministische Betrachtung der psychologischen Tatsachen, die wir weiterhin prüfen werden, zu widersprechen.

Welche Bedeutung haben diese Gefühlsgründe?

Wir antworten ohne Erregung: gar keine. Aber wir halten es für nützlich, diese Antwort zu rechtfertigen.

Zwischen dem Wissen einerseits, dem Fühlen und Wollen anderseits besteht folgende Beziehung: Das Wissen ist unabhängig vom Gefühl und Willen, da es eine hypothetische Beziehung zwischen dem Willen und der darauf folgenden Wahrnehmung einschließt (Kap. II). Das Gefühl und der Wille sind ihrerseits vom Wissen unabhängig; die Wissenschaft hat keinen Einfluß auf die Gemütsbewegungen, welche die erkannten Gegenstände begleiten. Sie kann dem Willen keine Regeln vorschreiben, es sei denn in hypothetischer Weise, d. h. wenn es sich um Mittel handelt oder um Ziele, deren Grundsatz zu anderen höheren und stärker gewollten Zielen erkannt wird.

Wer nun diese Beziehung klar erkannt hat, für den ist es sinnlos, von einer wissenschaftlichen Theorie eine Erklärung der Gefühle zu verlangen oder zu behaupten, daß die Bilder, die als Mittel dieser Voraussage benutzt werden, jene selben Gefühle erwecken sollen, welche die vorgestellten Tatsachen begleiten.

Demnach fällt jener auf einem Vorurteil beruhende Einwand gegen die Möglichkeit einer mechanistischen



Erklärung der Lebenserscheinung. Diese Hypothese entspricht einem *kontemplativen* Geisteszustande, in dem es auf Voraussagen ankommt, und in dem man von Gefühlen abstrahiert, durch welche die geforderten Voraussagen einen *Wert* erhalten würden für einen anderen *(tätigen)* Geisteszustand.

## § 37. Der biologische Determinismus.

Ist aber die Voraussage möglich? oder steht ihr die „Selbsttätigkeit" des Lebendigen entgegen?

Dies ist ein positives Problem, das aus den oben dargestellten Unterschieden sich ergibt. Es ist das Problem des *biologischen Determinismus.*

Der Sinn dieses Determinismus besteht in der Annahme, daß die Tatsachen des Lebens *bestimmten Voraussagen* unterworfen werden können, nach der Ordnung der Koexistenz und der kausalen Abfolge, und daß sie deshalb Gegenstand einer wissenschaftlichen unbegrenzt fortschreitenden Erkenntnis sein können.

Nun kann das deterministische Prinzip nicht a priori bewiesen werden. Es drückt eine allgemeine Voraussetzung aus, die sich in den verschiedenen Gebieten des Wissens in gleicher Weise durch den Erfolg der aufgestellten Voraussagen, d. h. durch den Fortschritt der Wissenschaft rechtfertigt.

Aber zwischen den Lebenserscheinungen und den physikalischen besteht in dieser Beziehung kein Unterschied, der sich nicht erklären ließe durch die komplizierten Bedingungen der physiologischen Tatsachen, sei es, daß es sich um lebende Wesen oder auch einfach um ihre Organe oder Gewebe handelt.

Der scheinbare Widerspruch verschiedener Erscheinungen, die unter merklich *gleichen* Umständen eintreten, löst sich auf bei einer genaueren Unterscheidung derselben.

Hierfür finden sich schöne Beispiele, geprüft und diskutiert bei CLAUDE BERNARD in seiner „Introduction à la médecine expérimentale", denen man heute viele andere hinzufügen könnte, die die neuesten Fortschritte der biologischen Wissenschaften geliefert haben.

Wir wollen nur ein höchst lehrreiches anführen, indem wir uns auf das Ergebnis der *Malaria*-Forschungen beziehen (LAVERAN, MARCHIAFAVA, GOLGI, ROSS, GRASSI, DIONISI, BIGNAMI E BASTIANELLI). Dieses verspricht viel für die zukünftigen Erfolge der Ätiologie der Krankheiten, die jene unbestimmte Dunkelheit der Erklärungen verlassen wird, durch die sich MOLIÈRES Arzt berühmt gemacht hat.

## § 38. Der psychologische Determinismus und die Willensfreiheit.

In Wahrheit wäre aber der biologische Determinismus von niemandem ernstlich bestritten, wenn nicht aus seiner Annahme im weitesten Sinne als allgemeine Voraussetzung folgte, daß auch die psychologischen Erscheinungen und im besonderen unser Denken und Wollen gleichfalls einer kausalen Bestimmtheit unterworfen sind.

Ein Gefühl des Widerstrebens verbindet sich mit dieser Ansicht; ein Gefühl, das allerdings nachlassen würde, wenn wir unsere eigene Person in der erkannten Welt isolieren könnten, und das vollkommen verschwinden würde, wenn es möglich wäre, den Menschen und die höheren Tiere von der Folgerung auszuschließen und sie nur auf die niederen Lebewesen der zoologischen Stufenleiter zu beschränken, die so weit von uns entfernt sind.

Dagegen verbietet uns eine reifere wissenschaftliche Überlegung so willkürlich das zu trennen, was durch eine zusammenhängende Reihe verbunden erscheint. So



bleibt unser Schicksal geknüpft an das der Infusorien und Amöben. Weil man stufenweise von den tiefsten Lebensformen zu den höheren aufsteigen kann, weil auch die Erscheinungen der Intelligenz von den Tieren zum Menschen sich in unmerklichem Übergange entwickeln, und weil sie sowohl als Ursache wie als Wirkung einen Teil des Lebens ausmachen, so muß man sich zu einer endgültigen Wahl entschließen. Entweder muß man den biologischen und psychologischen Determinismus in voller Allgemeinheit zugeben, oder man muß ihn leugnen und den Gedanken der *Selbsttätigkeit* annehmen in einem Sinne, der in diesem Gebiete die *Möglichkeit der Voraussage* ausschließt oder a priori einschränkt.

Um die Schwierigkeit zu beseitigen, muß man vor allem das sogenannte *Problem der Willensfreiheit* untersuchen, indem man in ihm die *wissenschaftliche* Frage, welche den psychologischen Determinismus der menschlichen Handlungen betrifft, von der *moralischen* Frage trennt, die sich auf das Werturteil darüber bezieht.[1]) Die Übertragung dieser letzten Art von Gründen auf das wissenschaftliche Gebiet ist ein unerlaubter Übergriff, von dem man sich befreien muß, wenn man eine reine wissenschaftliche Ansicht gewinnen will.

Aber wenn dies zugegeben ist und man nur die Tatsache des fremden Willens betrachtet, so verschwindet alle Dunkelheit.

Die Frage, „ob der Wille durch das, was ihm vorausgeht, *bestimmt* wird", bedeutet, positiv verstanden, nur das, „ob man die Entschließungen anderer *voraussehen* kann, wenn man genau weiß, was vorher in dem Entschließenden vorgeht". Sofern man nun unter diese

1) Über die Beziehungen dieser Frage zu den neueren *Strafrechtstheorien* s. MARIO CALDERONI „I postulati della scienza positiva e il diritto penale". Florenz, RAMELLA 1901.

vorausgehenden Tatsachen auch die Gefühle und den Willen der Person rechnet, von der die Rede ist, so ist die bejahende Antwort nicht zweifelhaft.

Direkte Beobachtungen stützen die deterministische Behauptung, abgesehen von den allgemeinen Gründen, welche den physiologischen Determinismus bestätigen. Und dies geschieht mit um so größerer Sicherheit, je mehr die Fehlerquellen ausgeschaltet werden, die von der unvollkommenen Kenntnis der Motive herrühren, welche in dem Geiste anderer wirken und von der Kompliziertheit der Tatsachen, die durch sehr kleine Veränderungen dieser Motive verändert werden.

Zu der Anschauung von der *Vernünftigkeit* der menschlichen Handlungen (d. h. von ihrer Abhängigkeit von Motiven), die aus den vorstehenden Beobachtungen folgt, kommen andere objektive Daten, z. B. die *statistische Regelmäßigkeit* des sozialen Geschehens, die so schön von QUETELET beleuchtet worden ist, usw.

Aber man braucht sich bei diesen Gründen nicht aufzuhalten; sie genügen jedenfalls für denjenigen, der aus seinem Geiste jedes Vorurteil moralischer Art verbannt hat, um in ihrer Gesamtheit einen *induktiven Beweis* des psychologischen Determinismus abzugeben oder, wenn man lieber will, auch in diesem Gebiete das Vertrauen in die Möglichkeit einer Wissenschaft zu rechtfertigen, die sich nicht unterscheidet von derjenigen, welche sich auf alle die andersartigen Erscheinungen bezieht, die wir als unveränderliche Beziehungen der Koexistenz und der Aufeinanderfolge begreifen.

Wenn der psychologische Determinismus Schwierigkeiten bereitet, so beruhen diese nicht auf Gründen wissenschaftlicher Art.

Woher also das Widerstreben, ihn anzunehmen?

Die Antwort ist klar: weil die deterministische Behauptung der unmittelbaren Gewißheit zu widersprechen scheint, die jedermann von der *Freiheit seines eigenen Willens* hat, und weil auf diesem Begriff der „Freiheit" die leitenden Gedanken beruhen, die unseren moralischen Werturteilen zugrunde liegen.



Man muß deshalb zeigen, daß, wenn die erwähnte Anschauung der Willenstatsachen richtig gedeutet wird, *Freiheit und Determinismus einander nicht widersprechen.*

Die Behauptung der Willensfreiheit besagt nach dem Zeugnis unseres Bewußtseins folgendes:

1. daß jedermann innerhalb gewisser Grenzen die Möglichkeit hat, das zu *tun*, wozu er sich entschlossen hat *(physikalische* oder *äußere Freiheit)*,
2. daß jeder die Möglichkeit hat, bis zu einem gewissen Grade den Ablauf seiner Gedanken und Gefühle zu beeinflussen und demnach seine künftigen Entschließungen zu bestimmen oder zu modifizieren, indem er die Wirkung der Motive verhindert oder verstärkt. Diese „Freiheit zu *wollen*", die der Freiheit zu tun, entgegengesetzt ist, bildet die sog. *moralische* oder *innere Freiheit.*

Sie hat, wie die erste, reale Existenz. Aus ihr entnehmen wir unser Selbstvertrauen. Sie bildet die wahre Grundlage unserer *Verantwortlichkeit*, weshalb wir den höchsten Grad von Verantwortlichkeit für diejenigen Handlungen in Anspruch nehmen, die mit Vorbedacht gewollt waren als Folgen einer reiflichen Überlegung, der wir eine Reihe von Handlungen unterworfen hatten, und die deshalb mit den *dauernden Eigenschaften* unserer *Persönlichkeit* zusammenhängt. Wir glauben dagegen weniger verantwortlich zu sein für die Handlungen, die unvorhergesehen waren, wobei wir uns immerhin dafür verantwortlich machen, uns nicht gegen das Motiv, das über uns kam *(Versuchung)*, gewappnet zu haben, indem wir es verhinderten, auf unseren Willen Einfluß zu gewinnen, so daß diese Verantwortlichkeit in unseren

Augen fast verschwindet, wenn die Handlung durch ein starkes und unerwartetes Motiv veranlaßt war.

Dies alles stimmt vollkommen überein mit dem gesunden Menschenverstande und ist, wie gesagt, notwendig für das praktische Leben, das das Vertrauen in unserem eigenen Willen erfordert.

Aber in alledem liegt nichts, was der deterministischen Behauptung von der Möglichkeit die Willenstatsachen vorauszusehen widerspräche. Scheinbare Widersprüche entstehen nur aus einem fehlerhaften Schluß, der mit Transzendentalismus behaftet ist.

In zweierlei Weise kommt hier etwas Transzendentes herein.

In erster Reihe durch Anwendung eines alten Arguments von LOCKE und LEIBNIZ auf die Willensfreiheit, das ursprünglich eine andere Bedeutung hatte.

Wenn man das Vorhandensein einer zweiten Willensstufe, die in dem „Willen zu wollen" besteht, zugibt, so muß man auch eine dritte, eine vierte usw. bis ins Unendliche zugeben.

Aus dieser Unendlichkeit ergibt sich für einige ein transzendenter Begriff des Willens, der *sich selbst bestimmt*, daher das *arbitrium indifferentiae*, auf Grund dessen die Voraussage unmöglich wird. Aber das Argument beruht auf einem Mißverständnis.

Wenn man sagt, daß wir einen „Willen zu wollen" haben, so ist der Wille, als Subjekt genommen, nicht derselbe, der das Objekt der Willensregung bildet. Die Willensstufe zweiter Ordnung schließt demnach nicht das Nonsens eines *sich selbst* bestimmenden Willens ein, sondern die psychologische Tatsache, daß ein Willensakt von einem anderen, ihm voraufgehenden, veranlaßt sein kann. Nun kann offenbar diese Abhängigkeit (die übrigens teilweise äußeren Bedingungen unterworfen ist) nicht über eine endliche Anzahl von Stufen hinausgehen,



da die Zeit, die der Willensakt erfordert, eine endliche ist. Wir brauchen uns deshalb nicht auf eine Diskussion jenes dialektischen Hilfsmittels einzulassen (das der natürlichen Teleologie entliehen ist) und hervorzuheben, daß man nicht ohne Widerspruch aus einer *unendlichen* Reihe von Ursachen auf eine *erste* Ursache schließen kann, die eine *Ursache ihrer selbst* ist.

Eine andere Art zu argumentieren, die anscheinend tiefer geht, führt einen fehlerhaften Begriff der menschlichen *Persönlichkeit* ein. Der Satz „Ich kann tun und wollen, was mir beliebt, auch im Gegensatz zu den Motiven, welche auf meine Entschließungen wirken"[1]) drückt eine Vorstellung der Person aus, die außerhalb der Reihe ihrer Willensregungen wirkt.

Wenn man nun einem solchen Satze einen verständlichen Sinn beilegen will, so kann man ihn nur in einer Weise auslegen. Das Ich, dem zu handeln und zu wollen beliebt, ist nichts anderes als der kontinuierliche Ausdruck des Willens selbst, der den im voraus als beständig erwiesenen Motiven die vorübergehenden und zufälligen unterordnet.

Die *moralische Persönlichkeit* eines Menschen ist geradezu identisch mit diesem kontinuierlichen Willen, der das Ergebnis organischer Faktoren und von der äußeren Umgebung aufgenommener Bestandteile ist. An dieser Behauptung entsteht kein Zweifel, wenn wir fremde Personen betrachten. Wenn wir uns dagegen auf uns selbst beziehen, so täuscht uns leicht die Verdoppelung, die wir an dem Ich vornehmen, indem wir es einmal als Subjekt und einmal als Objekt betrachten, d. h. indem wir uns als Subjekt der Handlungen verwechseln mit der Vorstellung, die wir von uns selbst haben.

---

1) Vgl. den lebhaften Streit, den A. HERZEN beschreibt in „Le cerveau et l'activité cérébrale". Paris, F. B. Baillière, 1887.

Betrachtet man einmal unser Ich als Objekt einer Vorstellung, so überzeugt man sich leicht, daß man ihm keinen anderen Inhalt beilegen kann als die kollektive Idee von dem, was in unseren Willensregungen verhältnismäßig beständig ist.

Wenn man daher dieser als *scheinbar* und *relativ* angesehenen Wirklichkeit eine *absolute Substanz* oder *Seele* entgegensetzt, die man zum Träger der *ethischen Persönlichkeit* macht, so verfällt man in einen jener unendlichen Definitionsprozesse, deren Leerheit bereits bewiesen wurde.

Unglücklicherweise beherrscht diese transzendentale Ansicht von der Seele bis auf unsere Tage den Streit um die Willensfreiheit, dessen Geschichte anknüpft an die des religiösen Problems der Prädestination und der Gnade.

Diese Ansicht der Frage beherrscht noch das Denken Leibnizens in der „Theodicee".

Daher mußte der Philosoph, obgleich er dem spinozistischen äußeren Fatalismus eine klare Ansicht des inneren psychologischen Determinismus entgegensetzte, dem Begriff der *Freiheit*, die er als *Selbsttätigkeit des vernünftigen Wesens* betrachtete, einen transzendentalen metaphysischen Sinn beilegen.

Dieser Sinn tritt mit großer Klarheit in der weiteren Entwickelung auf, die der Determinismus in der Kantischen Philosophie erhalten hat. Determinismus in der Erscheinungswelt entgegengesetzt der Autonomie des Noumenon, d. h. Freiheit des Willens an sich, sofern man die intelligible Ursache des Wollens (?!) betrachtet; aber Bestimmtheit nach unveränderten Gesetzen in seinen Manifestationen. Die natürliche Weiterentwickelung dieser Unterscheidung führt schließlich zur Lehre Schopenhauers: der Wille, transzendental verstanden, als außerhalb seiner Akte, außerhalb von Raum und Zeit,



nimmt die Stelle der *Substanz* oder *des Dinges an sich* ein, eine Idee, deren anthropomorphe Grundlage wir bereits aufgewiesen haben.

Diese Endergebnisse der klassischen Philosophie sind unseres Erachtens sehr lehrreich; denn einerseits ergibt sich daraus die Erkenntnis des psychologischen Determinismus in seinem menschlichen und positiven Sinne, anderseits der Beweis, daß das Problem der Willensfreiheit die praktische Vernunft nur insofern interessiert, als sie als notwendige transzendente Grundlage der Moral betrachtet wird.

Aber wenn man die transzendentale Vorstellung eines Willens und einer ethischen Persönlichkeit jenseits ihrer Manifestationen als sinnlos verwirft, so ergibt sich klar, daß die Behauptung des freien Willens dem Determinismus nicht widerspricht.

Beide behalten auf ihrem Gebiete ihre volle Bedeutung. Die Möglichkeit einer unbegrenzten Ausdehnung der psychologischen Wissenschaft beseitigt nicht die *Bewertung* der menschlichen Handlungen, sofern sie *gewollt* oder *nicht gewollt* sind im Hinblick auf gegebene *Zwecke*.

Allerdings konnte die deterministische Behauptung infolge einer irrtümlichen Deutung auf einige schwache Willenskräfte einen entmutigenden Einfluß ausüben. Stuart Mill hat selbst diese Wirkung erfahren und bezeugt an einer bedeutsamen Stelle seiner Autobiographie, daß er sich davon befreit hat: „Als ich die Theorie zum erstenmal in ihrem wahren Sinne begriff, erschien sie mir nicht mehr entmutigend und abgesehen von der Erhebung, die mein Geist dadurch erfuhr, hörte ich auf, unter der so schweren Last zu seufzen, die derjenige zu tragen hat, der in der Absicht, die Meinungen anderer zu reformieren, erkennt, daß die eine Lehre wahr und die entgegengesetzte moralisch wohltätig ist."

Aber derartigen Wirkungen einer irrtümlichen Deutung kann man die Vorteile entgegensetzen, die ein starker Wille aus der wohlverstandenen deterministischen Lehre ziehen kann. Denn die genaue Kenntnis des relativen Gewichtes der Motive, die uns zu unseren Entschlüssen treiben, die angemessene Bewertung der Art, in der wir imstande sind, auf die Reize zu reagieren oder ihre Wirkungen zu verhindern, lehren uns, unseren Willen zu stärken und den Triumph unserer beständigen Persönlichkeit über die wandelbaren äußeren Reize herbeizuführen.

## § 39. Der Physizismus.

Nachdem wir das Feld von den psychologisch-moralischen Schwierigkeiten gereinigt haben, wollen wir zu der wissenschaftlichen Betrachtung der Lebenserscheinungen zurückkehren.

Der Determinismus im allgemeinen schließt die weiteste Möglichkeit ein, aus der Reihe dieser Erscheinungen unveränderliche Beziehungen der Koexistenz und der Aufeinanderfolge herauszuheben. Die mechanistische Hypothese schränkt diesen Gedanken ein, indem sie vorschreibt, als bestimmende Umstände diejenigen auszuwählen, welche unabhängig vom Leben eine *physikalische* Bedeutung haben.

Diese besondere Art von biologischem Determinismus erhält den Namen *Physizismus*. Sie kann genauer durch die folgenden Forderungen ausgedrückt werden:

1. Die *biologische Erklärung* soll die vorgelegte Erscheinung darstellen als Folge oder als unveränderlich verknüpft mit physikalisch-chemischen Daten (Wärme, Elektrizität, Bewegung usw.), die nach gewissen quantitativen Verhältnissen zusammenwirken.
2. Das Zusammenwirken dieser physikalisch-chemischen Erscheinungen muß zu einem Zustande führen, in dem ein analoges Phänomen auch *außerhalb des Lebens* bestimmt wird.



Und wenn der *Physizismus* nicht sowohl als ein weit entferntes Ziel betrachtet wird, als vielmehr in seiner praktischen Wirkung auf den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft, so kommen noch folgende stillschweigend gemachte Hypothesen hinzu:

3. Durch die Analyse der physikalischen Ursachen der Lebenserscheinungen können diese auf eine nicht zu große Zahl von Bestandteilen zurückgeführt werden.
4. Die wesentlichen Bedingungen, die bei der physikalischen Kausalität zu berücksichtigen sind, werden nicht verändert, wenn man dieselben Erscheinungen im Zusammenhange des Lebens betrachtet.

Dieser letzten Ansicht nun widersprechen die Ergebnisse einer fünfzigjährigen Forschung. Sie erschüttern daher den Physizismus in dem praktischen Sinn, wie er durch die vorstehenden Forderungen definiert wird, unabhängig von dem Glauben an einen weit entfernten Fortschritt.

Es ergibt sich nämlich, daß *man die biologische Physik nicht behandeln kann, indem man von der wesentlichen Bedingung des Lebens abstrahiert.*

Nur wenige allgemeine physikalische Beziehungen, die die Mannigfaltigkeit der Bedingungen beherrschen, finden sich ohne Änderung in dem biologischen Gebiete verifiziert, so z. B. die Erhaltung der Materie oder der Energie. Aber bei den weniger allgemeinen Gesetzen, die sich auf die Diffusion oder die Osmose oder die elektrische Leitfähigkeit usw. beziehen, begegnet man auf Schritt und Tritt Ausnahmen und scheinbaren Widersprüchen.

Da ist z. B. eine *Zitterroche*, eine lebende Leidener Flasche, deren elektrische Ladung sich unter para-

doxen Umständen erhält. Während das Funktionieren der elektrischen Maschinen so leicht durch die Feuchtigkeit des Isolators verhindert wird, sehen wir hier eine Ladung, die sich in dem umgebenden Wasser, von dem doch die Gewebe des Tieres durchtränkt sind, nicht verliert!

Man könnte die Bedeutung dieser gesicherten Tatsachen nicht leugnen oder vermindern, selbst wenn es sich um seltene Ausnahmen handelte; aber wir müssen sie um so mehr berücksichtigen bei ihrer großen Zahl und ihrem häufigen Vorkommen, und angesichts des Umstandes, daß es sich um Abweichungen handelt, die schon auf den untersten Stufen des Lebens auftreten. Die allgemeine Physiologie der Zelle, wie sie uns Max Verworn in seinem vorzüglichen Lehrbuche darstellt, und die Physik der Gewebe bieten dafür vielfältige und charakteristische Beispiele.

Wir erwähnen nur ein einziges. Die lebenden Zellen der Blase verhindern die Diffusion des Wassers und dennoch findet sich keine undurchlässige Membran, die das Hindernis erklärte. Man muß sagen, daß ein feuchtes Gewebe sich dem Durchgang des Wassers *kraft seines Lebens* entgegenstellt, da es diese Eigenschaft in dem Augenblick verliert, in welchem der Tod eintritt.

Derartige Erscheinungen können immer mit einem theoretischen Physizismus in Einklang gebracht werden, wenn man eine Superposition von Beziehungen annimmt, die zu kompliziert sind, um in ihre hypothetischen, physikalischen Bestandteile zerlegt zu werden. Aber sie legen eine positive Gedankenrichtung nahe, die wenigstens vorläufig auf eine *analytische Erklärung* verzichtet und eine *synthetische* versucht, in der die *Tatsache des Lebens* als Grundbedingung angenommen wird, um dadurch das mittlere Resultat der superponierten elementaren Umstände auszudrücken.



Anstatt also ausschließlich physikalische Daten auszuwählen, wird man alle bekannten Umstände in Betracht ziehen, die sich als mit dem Leben verknüpft erweisen, ohne nach ihrer weiteren Reduktion zu fragen und, anstatt den physikalischen Determinismus in den lebenden Medien a priori willkürlich zu vereinfachen, wird man versuchen, die charakteristischen Unterschiede zu erkennen, die in ihrer Gesamtheit eine *positive Definition des Lebens* zu liefern geeignet sind.

Diesem Zwecke dienen unter anderem einige schöne Untersuchungen unseres Landsmannes G. Galeotti, aus denen hervorgeht, daß das lebende Plasma die Diffusionen gewisser Stoffe verhindert, daß es im allgemeinen die Herstellung des osmotischen Gleichgewichtes verbietet und in einigen Fällen den durch elektromotorische Kräfte bewegten Ionen einen besonderen Widerstand entgegensetzt.

## § 40. Die teleologische Erklärung.

Im vorstehenden haben wir vor allem die physikalischen Erscheinungen betrachtet, die sich in einem lebenden Medium vollziehen. Die Notwendigkeit einer synthetischen Erklärung geht noch deutlicher hervor aus den eigentlich physiologischen Erscheinungen. Unsere Kritik zeigt, daß eine solche Erklärungsart der mechanistischen Hypothese und dem theoretischen Physizismus, der aus ihr folgt, nicht widerspricht, wenn sie auch dem letzteren als Gesichtspunkt für die gegenwärtige Forschung jede praktische Bedeutung nimmt.

Aber es handelt sich jetzt darum, zu erkennen, ob der theoretische Physizismus nicht wenigstens der in der Physiologie üblichen Erklärungsart eine Schranke auferlegt, und ob er nicht im besonderen jede *teleologische Erklärung* als sinnlos erscheinen läßt.

Stellen wir vor allem die Tatsache fest, aus der sich das Problem ergibt.

Der größte Teil der physiologischen Erkenntnisse hat eine Form, die die Umkehrung von derjenigen ist, in der wir uns den Zusammenhang von Ursache und Wirkung vorstellen. Diesem Umstande begegnet man so ziemlich bei jeder Art von Lebenserscheinungen, und zwar nicht nur bei dem synthetischen Studium des Lebewesens, sondern auch in der Physiologie der Gewebe.

Wenn man z. B. verstehen will, welche Substanzen es sind, deren Diffusion durch ein Gewebe verhindert wird, so greift man zu dem Gedanken eines *Nutzens* oder eines *Bedürfnisses* für das Plasma, eher in dem einen als in dem anderen Sinne zu reagieren, als ob die frühere Erscheinung durch spätere bestimmt sein könnte, anstatt umgekehrt. Dieser selbe Gedanke liegt auch schon in dem sog. *Gesetz der Zellreaktion*, welches den *Zweckbegriff* einer jeden *Erklärung* in der Wissenschaft vom Leben zugrunde zu legen scheint.

Aber eine derartige Erklärungsart erregt heftiges Widerstreben bei denjenigen, welche sich die physikalischen Wissenschaften zum Vorbilde nehmen. Es scheint auf den ersten Blick, als ob zwischen dem teleologischen Gesichtspunkt und dem auch nur theoretisch verstandenen Physizismus ein unlösbarer Widerspruch bestände, und die Physizisten folgern daraus, daß jede teleologische Erklärung als sinnlos zu beseitigen sei.

Wir werden bald untersuchen, ob der erwähnte Widerspruch beseitigt werden kann. Zunächst wollen wir jedoch bemerken, daß man sich in der Praxis gar nicht an eine so einfache Regel halten könnte.

Diejenigen nämlich, die sie befolgen, sind nicht imstande, die zahlreichen Unterscheidungen von Fällen ohne anscheinende Verbindung, zu denen der Physiologe gelangt, indem er gewisse Unterschiede *in bezug auf die*



*Zwecke des Lebens* betrachtet, durch etwas anderes zu ersetzen.

Die Physizisten werden erwidern, daß es sich hier um *Worterklärungen ohne Sinn* und *ohne Wert* handelt, ein Schleier, der über unsere Unkenntnis geworfen wird, und den man ohne Bedauern fortnehmen kann, auch wenn man nichts anderes an seine Stelle setzt.

Dies wäre allerdings der Fall, wenn die teleologische Ausdrucksweise im Sinne eines mystischen Vitalismus zu verstehen wäre, in dem der vorstellende Gesichtspunkt der Erkenntnis mit dem aktiven des Willens verwechselt wird.

Aber man kann in ihnen eine positive Bedeutung finden, und deshalb müssen wir unter diesem Gesichtspunkt der Kritik der Physizisten widersprechen.

Es ist nicht wahr, daß der Nutzen oder Schaden eines Lebewesens sinnlose Ausdrücke sind: denn sie schließen eine Tatsache ein, die experimentell erkannt werden kann.

Es ist nicht wahr, daß die Erklärungen, in denen von dem Gedanken Gebrauch gemacht wird, daß etwas einem Zwecke des Lebens entspricht, wertlos sind; denn durch Vergleichung ähnlicher bestimmender Umstände erhält man in den verschiedenen Erscheinungsgruppen *bedeutsame Voraussagen*.

Auf Grund dieser Tatsachen erhält sich diese teleologische Erklärung in den Wissenschaften vom Leben trotz alles Widerstrebens.

Es bleibt nur übrig, sie angemessen zu deuten und zu zeigen, daß sie nicht mehr in einem unauflösbaren Widerspruch mit dem Geiste des mechanischen Determinismus stehen.

Wir wollen zwei Erklärungstypen unterscheiden, in denen der Zweckgedanke in verschiedener Weise auftritt:

1. Die psychologische Erklärung, in der ein gewisser Zweck als Bestimmungsgrund für die willkürliche Handlung eines Lebewesens betrachtet wird.
2. Die eigentlich biologische Erklärung, bei der der Bau eines Organs in bezug auf die Funktionen, die es ausüben soll, betrachtet wird oder im allgemeinen, wo man gewisse biologische Eigenschaften oder gewisse Reaktionen des Plasmas usw., als gewissen Nützlichkeiten entsprechend, darzustellen sucht.

Der erste Fall läßt sich sofort mit dem üblichen Determinismus in Einklang bringen, da wir als Ursache der Handlung nicht eigentlich den vorgesetzten Zweck betrachten, sondern vielmehr seine Vorstellung, die aus der Erinnerung und aus der Assoziation früherer Wahrnehmungen entsteht.

Der zweite Fall läßt sich schwer auf den ersten zurückführen, es sei denn, daß man seine Zuflucht zu der Hypothese einer Vorsehung nimmt, welche die gegenwärtige Wirklichkeit nach zukünftigen Zwecken bestimmt, so wie wir selbst eine Maschine bauen, die imstande ist, gewisse Arbeiten zu verrichten.

Wenn man nun von dem moralischen oder religiösen Werte einer derartigen Hypothese absieht und sie nur vom Standpunkt der Erkenntnis beurteilt, so muß man zugeben, daß sie keinerlei wissenschaftlichen Wert hat, da sie uns nicht zu Voraussagen verhilft oder Voraussagen liefert, die sich sowohl als wahr wie als falsch erweisen, ohne uns ein Kriterium für eine mögliche Auswahl zu liefern.

Es bleibt zu untersuchen, ob die biologischen Erklärungen der zweiten Art mit dem Determinismus in Einklang gebracht werden können, unabhängig von der Annahme des Dazwischentretens einer Vorsehung.

Die Übereinstimmung ist wirklich möglich, wenn man die teleologische Erklärung in einem positiven



Sinne deutet, als Ausdruck einer *ersten Stufe der Erkenntnis.*

Anstatt diese Erklärung mit derjenigen zu vergleichen, die man auf der höchsten Entwickelungsstufe der Physik anstrebt, wo man von bekannten Ursachen zu unbekannten Wirkungen fortschreitet, wollen wir sie derjenigen Erklärung vergleichen, die in der Physik selbst ihre Stelle findet als erste Stufe der induktiven Untersuchung, wenn es sich darum handelt, aus den vorläufigen Beobachtungen Hypothesen zu bilden, d. h. wenn man von der bekannten Wirkung zu den Ursachen aufsteigen will.

Auch die physikalischen Probleme können in diesem Sinne teleologisch betrachtet werden. Es genügt, einige Beispiele aus der Mechanik und der Astronomie heranzuziehen.

Man kann in mannigfacher Weise mechanische Systeme ausdenken, die sich in einem gewissen Zustand des stabilen Gleichgewichts befinden; jede kleine Bewegung, die durch irgendeine Störung hervorgerufen wird, erzeugt Kräfte, welche das System in seine Anfangslage zurückführen. Wenn in derartigen Fällen die Stabilität als eine zu erfüllende Bedingung gegeben ist, so besteht das Problem, die Kräfte zu suchen, welche ihr Stattfinden erklären.

In einem allgemeineren Sinne besitzt auch das Planetensystem eine Stabilität, die innerhalb der Grenzen der Beobachtung praktisch verifiziert ist, und die sich den Astronomen als ein zu lösendes Problem darbot.

Und das Problem wurde gelöst, nicht von Newton, nach dessen Meinung die gegenseitigen Anziehungen der Planeten den stationären Zustand des Systems stören müßten, sondern von Laplace, der erkannte, daß die Wirkung der Störungen auf die Bahnelemente sich periodisch kompensiert, abgesehen von einer kleinen

säkularen Veränderung. Dadurch wurde die erhabene Harmonie des Gesetzes wiederhergestellt, welche sein Entdecker durch die Hypothese einer dazwischentretenden Vorsehung gestört hatte.

Eine andere ähnliche Frage ist die Stabilität des Saturnringes. Sie bildet eine Tatsache, welche wir uns als Ergebnis unbekannter Ursachen vorstellen können, um deren Auffindung es sich handelt. Wenn man nun die einfachste Hypothese macht, daß der Ring aus einer kompakten Materie besteht, und wenn man dann die Anziehungskräfte berechnet, welche zwischen den verschiedenen Teilen des Körpers wirken, und die Wirkung der Saturnmasse auf ihn, so ergibt sich daraus kein stabiles Gleichgewicht. Dadurch ist man zur Diskussion verschiedener Hypothesen geführt worden, indem man nach einer Verteilung der Materie suchte, die den gestellten Bedingungen genügt.

Diese Bedingungen also, die als ein zu erreichendes Ziel zu betrachten sind, bestehen vor der unbekannten Verteilung der Ringmasse nur in der Anordnung unserer Erkenntnisse, die sich als Umkehrung derjenigen darstellt, welche wir uns als reale Ordnung vorstellen.

Nach diesen Beispielen wird man das Erklärungsverfahren der Biologie, bei dem von dem Zusammenhang eines Organs mit einer Funktion oder von der Art zu reagieren im Verhältnis zu einem nützlichen Zweck die Rede ist, leichter verstehen. Diese Ausdrucksweisen können so umgeformt werden, daß jeder scheinbare Widerspruch mit dem physikalischen Determinismus verschwindet. Man muß nämlich festhalten, daß unter den mannigfachen Bestandteilen der Erscheinung das *Leben* uns synthetisch *früher* gegeben erscheint als seine angenommenen Faktoren: aber nicht in der Wirklichkeit, sondern nur in der Ordnung unserer Erkenntnisse. Demnach steigen wir von der bekannten Funktion zu



den Eigenschaften des Organes auf, die zu ihrer Erklärung geeignet sind. Aus dem Umstand, daß das Plasma lebt, schließen wir auf das wahrscheinliche Vorhandensein einer gewissen Fähigkeit, in nützlicher Weise zu reagieren, wenigstens solange es sich um Reize handelt, welche nicht den Tod herbeiführen, usw.

Ein derartiges Erklärungsverfahren wäre vollkommen und würde sich in einer Erklärung nach dem physikalischen Typus verwandeln, wenn beim Aufsteigen von der gegebenen Wirkung zu den Ursachen man die ganze Gruppe der in Betracht kommenden Ursachen bestimmen könnte, durch deren Zusammenwirken die Erscheinung experimentell reproduzierbar wäre. Dies ist bisher bei den eigentlich physiologischen Erklärungen noch nicht gelungen. Aber dennoch repräsentieren sie einen gewissen Grad von positiver Erkenntnis, der durch die vorangehenden Bemerkungen ins Licht gesetzt wurde.

Es gelingt uns in der Tat, von den Wirkungen, die wir uns im Leben als „Ziele" vorstellen, zu einigen der nächstliegenden Ursachen aufzusteigen, die zu ihrer Entstehung zusammenwirken, und von diesen nach und nach zu den verborgensten Bedingungen und zu den entferntesten Ursachen.

Nur ist hier die Kette komplizierter und länger, und wir sind nicht imstande, die Reihe umzukehren, so wie der Chemiker nicht imstande ist, durch die Analyse der Farben ein RAPHAELsches Bild zu erklären!

## § 41. Das Leben und die thermodynamischen Hauptsätze.

Bisher haben wir keinen unauflöslichen Widerspruch zwischen der mechanistischen Hypothese und den Wissenschaften vom Leben gefunden.

Um unsere Untersuchung fortzusetzen, müssen wir diejenigen Prinzipien der Physik einer Verifikation

unterwerfen, die aus den allgemeineren mechanischen Hypothesen entspringen. Wir übergehen die *Erhaltung der Materie*, die auch für das Gebiet des Lebens gilt und wollen von den energetischen Prinzipien sprechen und besonders von denen der Thermodynamik.

Vor allem *ist das Prinzip der Erhaltung der Energie auch im Gebiete der Lebenserscheinungen verifiziert.*

Darüber hinaus weiß man nichts Positives.

Es wäre sehr interessant, genauere Untersuchungen in bezug auf den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik anzustellen.

Nach der mechanischen Hypothese erscheint derselbe als mittlere Wirkung in einem *ungeordneten* System. Nun erheben sich in unserem Falle gegen die Anwendung des Postulats der Mittelwirkung schwere Zweifel.

Was drückt im Grunde dieses Postulat aus? Es stellt einen mathematischen Ausdruck dar für die Annahme einer gewissen *statistischen Regelmäßigkeit* in einer großen Anzahl von Erscheinungen, deren Unterschiede nicht auf *systematisch* wirkende Ursachen zurückgeführt werden können. Die statistische Regelmäßigkeit täuscht nun den Zustand einer *scheinbaren Homogeneität* vor; aber der eigentliche Charakter der lebenden Materie ist im Gegenteil eine innere *Heterogeneität;* der Gedanke, daß aus dieser sich eine *Ordnung der Bewegung* ergibt, bietet sich sehr natürlich dar.

Aber anderseits macht es Schwierigkeiten, eine solche Annahme in Einklang zu bringen mit der Beständigkeit des Lebens. Neben einem geordneten kinetischen System erscheinen unendlich viele ungeordnete möglich, so daß der Übergang von dem einen zum anderen unendlich kleinen Änderungen entspricht. Demnach wäre das Bestehen eines geordneten Zustandes nicht zu erklären.

Wie man sieht, reicht die mechanische Hypothese für sich vielleicht nicht aus, die Gültigkeit des Clausius-



schen Satzes für das Gebiet des Lebens abzuleiten, aber sie läßt sie wahrscheinlich erscheinen.

Wie man nun auch die theoretischen Gründe bewerten mag, die Antwort kann nur von der Erfahrung gegeben werden. Die thermodynamische Erforschung der physiologischen Vorgänge muß das Problem lösen, *ob das* Clausiussche *Postulat auch für die Lebenserscheinungen gilt.*

Es scheint, daß die Frage von der Seite der Pflanzen her leichter zu lösen ist, und einige Ergebnisse über die Mitwirkung des Lichtes bei den chemischen Transformationen, die die dort auftretenden Prozesse begleiten, lassen eine bejahende Antwort erwarten.

## § 42. Die mechanistische Hypothese und die Probleme der Entwickelung.

Aus der vorstehenden Untersuchung ergibt sich, daß wenigstens nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft *die Biologie keinen Widerspruch gegen die mechanistische Hypothese enthält.*

Aber dieses Ergebnis ist rein negativ, und es handelt sich jetzt darum, die *positive Bedeutung* der Hypothese zu erkennen.

Unsere Behauptung ist, daß *die mechanistische Hypothese für den Fortschritt der Biologie als indifferent betrachtet werden kann.*

Vor allem hat die Diskussion in § 39 gezeigt, daß ein theoretischer Physizismus, der durch das mechanische Modell nahegelegt wird, nicht als praktischer Gesichtspunkt für die Untersuchung in Betracht kommen kann. Die entfernte Möglichkeit des genannten Modells bleibt in dieser Hinsicht ohne Einfluß auf die Art der Erklärung der Lebenserscheinungen.

An zweiter Stelle ist leicht festzustellen, daß die mechanistische Hypothese in ihrer unbestimmten All-

gemeinheit außerstande ist, die allgemeinen Probleme der Biologie in einem Sinne eher als in einem anderen zu lösen, z. B. die *epigenetische* oder die *präformistische* Tendenz, welche bei der Erklärung der *organischen Entwickelung* eine Rolle spielen, zu unterstützen.

Man kann verschiedene mechanische Modelle konstruieren, die innerhalb gewisser Grenzen einen stationären Zustand aufweisen, so daß die folgenden Fälle auftreten:

1. Jeder Mechanismus durchläuft periodisch dieselben Phasen, abgesehen von einer zufälligen Veränderung, die sich für die verschiedenen Mechanismen statistisch kompensiert. Aber äußere Kräfte erzeugen in jedem Mechanismus eine Veränderung in einem bestimmten Sinne, indem sie so eine Entwickelung des mittleren Typus der Reihe hervorrufen.
2. Die statistische Periodizität der Mechanismen der Reihe bleibt bestehen: aber die äußeren Kräfte erzeugen eine bestimmte Entwickelung des mittleren Typus nicht dadurch, daß sie imstande sind, die Entwickelung des einzelnen Mechanismus in erheblichem Maße zu beeinflussen, sondern dadurch, daß sie eine Auswahl vollziehen, durch Zerstörung des stationären Gleichgewichts derjenigen Mechanismen, deren Veränderung sich in einem gewissen Sinne vollzieht.
3. Die Mechanismen der Reihe zeigen eine angenäherte Periodizität; der mittlere Typus wiederholt sich fast periodisch, aber über die starke periodische Veränderung überlagert sich eine langsame Veränderung in einem bestimmten Sinne.

Sieht man nun von der Schwierigkeit ab, diesen Modellen eine genauere Gestalt zu verleihen, so erkennt man leicht, daß sie die Möglichkeit beweisen, die drei



Fundamentalhypothesen mit dem Mechanismus in Einklang zu bringen, die zur Erklärung der Entwickelung der Lebewesen herangezogen werden, und in denen den *inneren* und *äußeren* (Umgebung) Ursachen der Veränderung eine verschiedene Bedeutung beigelegt wird.[1]) Dies sind die folgenden Hypothesen:

1. Die erblichen individuellen Variationen vollziehen sich in indifferenter Weise, so daß aus den inneren Faktoren sich eine strenge statistische Periodizität der Eigenschaften ergibt, d. h. die Erhaltung der Art; aber *die Umgebung verändert das Lebewesen*, und die durch Anpassung erworbenen Eigenschaften werden durch Vererbung auf die neuen Generationen übertragen (Lamarcksche Hypothese).
2. Die individuellen inneren Variationen würden wieder als Ergebnis eine statistische Ausgleichung, d. h. die Beständigkeit des mittleren Typus ergeben, aber mittels des Kampfes ums Dasein *vollzieht die Umgebung eine Auswahl der nützlichen Variationen*, die sich wieder durch Vererbung übertragen, so daß die Entwickelung der Art eine bestimmte Richtung erhält (Darwinsche Hypothese).

---

1) Es ist kaum nötig, hervorzuheben, daß, abgesehen von der Bewertung ihrer Faktoren, die *Entwickelungshypothese* allgemein aus folgenden Gründen angenommen wird:

1. die direkten Beweise, welche die Paläontologie bietet;
2. die indirekten Beweise, die man aus der botanischen und zoologischen Geographie entnimmt;
3. erklärt die Entwickelungshypothese eine Reihe von anatomischen und zoologischen Tatsachen, z. B. die rudimentären Organe usw.;
4. liefert die Evolutionshypothese ein leitendes synthetisches Kriterium für die wissenschaftliche Untersuchung und hat dadurch für den heutigen Fortschritt der Naturwissenschaft eine große Bedeutung.

3. Die inneren erblichen Variationen kompensieren sich nicht genau im Mittel, sondern schreiten in einem bestimmten Sinne fort (EIMERS *Orthogenese*), d. h. die Entwickelung der Art vollzieht sich genau analog zu der ontogenetischen Entwickelung (die Kontinuität des Keimplasmas bei WEISMANN führt zu der Ansicht, daß sich die Art wie ein Individuum von großer Lebensdauer verhält). In dieser Hypothese spielt die Umgebung eine nebensächliche und mehr negative Rolle. Die natürliche Zuchtwahl wirkt im allgemeinen auf die *Erhaltung* der Art (PFEFFER), deren Wirksamkeit indirekt durch gewisse Rückbildungen wie die der blinden Maulwürfe *(Panmixia)* bewiesen wird.

## § 43. Die Unerheblichkeit der mechanischen Erklärung in der Biologie.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen erkennen, daß die mechanische Hypothese in ihrer unbestimmten Allgemeinheit genommen, für den Fortschritt der Wissenschaften vom Leben gleichgültig ist.

Aber mehr noch: abgesehen von der Schwierigkeit, für jede gegebene Art von Lebenserscheinungen den hypothetischen Mechanismus aufzufinden, muß man sich fragen, welche Bedeutung in bezug auf die uns interessierenden Fragen die spezielle Beschreibung desselben und die Kenntnis der verknüpfenden quantitativen Verhältnisse haben könnte.

Wir haben schon hervorgehoben, welches die eigentliche Bedeutung der mechanischen Erklärung für die physikalischen Erscheinungen ist. Die Schwierigkeiten einer Gesamterklärung zerfallen in zwei Teile:

1. in dem einen handelt es sich darum, mittels einer fundamentalen mechanischen Hypothese die Beziehungen zwischen gewissen abstrakterweise als *Größen* betrachteten Daten aufzustellen;
2. in dem anderen um die *Deutung* dieser Verhältnisse mit Hilfe der *ergänzenden Hypothesen*, indem zu den direkt quantitativen die *qualitativen Voraussagen* hinzutreten.



Der Mechanismus erschöpft die Kenntnis der Erscheinungen nicht einmal in den Fällen, in denen er genauer beschrieben werden kann. Die Schwingungen einer Saite, welche der Mathematiker als optische Tatsache mit Hilfe der FOURIERschen Reihe darstellt, enthalten Harmoniebeziehungen, die zwar mit der Form der Reihe in Verbindung gebracht werden können, die aber immer eine *Interpretation* oder *Assoziation* darstellen, die zu den Gesichtseindrücken *hinzukommen*, die durch sie symbolisiert werden.

Nun hat die Lösung des ersten Problems eine um so größere relative Bedeutung, in je höherem Grade der größte Teil der gestellten Fragen sich auf *Messungen* bezieht. Dagegen bleiben die erwähnten bestimmenden Gleichungen, welche die fundamentale mechanische Hypothese ausdrücken, um so bedeutungsloser, je mehr der Gebrauch der ergänzenden Hypothesen steigt, die zu ihrer Deutung verhelfen.

Wenn wir nun die physikalischen Probleme in einer Reihe ordnen, in der das *Interesse* an der mechanischen Erklärung abnimmt, so *stellen sich die Probleme des Lebens als Grenzfall dieser Reihe dar.*

Die mechanische Erklärung erscheint also in diesem Gebiete der Wissenschaft als unerheblich.

Es ist von Interesse, das vorstehende Ergebnis mit dem zu vergleichen, zu dem DU BOIS REYMOND bei der Behandlung des mechanischen Problems des Lebens gelangte.

Die Unmöglichkeit, die biologische Tatsache durch die mechanische Erklärung zu erschöpfen, leuchtete dem

großen Philosophen ein; aber diese Unmöglichkeit wurde von ihm in einem agnostischen Sinne gedeutet!

Dies rührt jedoch nur daher, daß er eine falsche Ansicht von dem Wesen der wissenschaftlichen Erklärung hatte, die an die willkürlichen Schranken einer quantitativen Metaphysik gebunden war.

Das Problem ist unlösbar, weil es schlecht gestellt ist, und das angebliche agnostische Ergebnis reduziert sich auf die Erkenntnis, daß diejenigen Beziehungen, welche den Gegenstand biologischer Voraussagen bilden, *in geringerem Grade* als die physikalischen als quantitative Verhältnisse aufgefaßt werden können, auch wenn man die Möglichkeit eines mechanischen Modells zuläßt.

## § 44. Schluß.

Unser Ergebnis ist, daß nach dem gegenwärtigen Stande der Erkenntnis *die mechanistische Hypothese den Lebenserscheinungen zwar nicht widerspricht, aber für ihre Untersuchung ohne Belang ist.*

Immerhin besaß diese Hypothese vorübergehend eine große Bedeutung in erster Linie deshalb, weil sie in klarer Form die Unabhängigkeit des Wissens vom Gefühl (vgl. § 36) feststellte; in zweiter Linie, weil sie die wissenschaftliche Weltansicht vereinheitlichte. Durch den verborgenen Mechanismus lernte man auch in dem Leben einen eigentlichen Gegenstand der Wissenschaft erkennen und den engen Zusammenhang verstehen, der zwischen den Verfahrungsarten besteht, die in verschiedenen wissenschaftlichen Gebieten angewandt werden und die nur deshalb getrennt sind, weil die Notwendigkeit der Arbeitsteilung dies erfordert, die aber bei der konkreten Voraussage zusammenwirken, d. h. in Wirklichkeit vereinigt sind.

Um sich von dem so erreichten Ergebnis eine adäquate Vorstellung zu machen, muß man sich in die Zeiten des



Descartes zurückversetzen, als die Gedanken Harveys über den Kreislauf des Blutes ein Hindernis fanden in den herrschenden Vorurteilen über die *Lebenskraft*, an die man bei jedem Lebensvorgang appellierte.

Es war ein ungeheuerer Fortschritt, als man begriff, daß es nur eine einzige Physik gibt, die sich ohne Einschränkung auch auf die Lebenserscheinungen bezieht, und es war ein großartiger Gedanke, der dazu führte, die physikalischen Tatsachen als einfache und gleichförmige Gesetze zu betrachten, welche die Mannigfaltigkeit der Bedingungen beherrschen.

Die komplizierende Wirkung der letzteren ergibt eine Korrektion, die bei einer ersten Annäherung vernachlässigt werden kann.

Daraus ergibt sich eine gerechte Beurteilung der vereinheitlichenden Tendenz des Mechanismus. Sie liefert eine adäquate Vorstellung der ersten Entwickelung der Wissenschaften vom Leben. Erst ein weiter fortgeschrittener Standpunkt läßt erkennen, daß die einheitliche Ansicht mit etwas engen und einseitigen Hilfsmitteln konstruiert ist, weil man als vollkommen und allgemein den Typus einer höher entwickelten Wissenschaft annahm und jede andere Form des Wissens allzu starr dem unterzuordnen suchte.

So wird die Ansicht der mechanistischen Philosophie modifiziert durch die Fortschritte der Biologie, welche ihrerseits auf die Physik zurückwirkend uns vorbereitet auf das Verständnis einer höheren Einheit, d. h. eines vollkommeneren und allgemeineren Typus der Wissenschaft, welcher die verschiedenen durch die Erfordernisse der Technik getrennten Formen unter sich begreift.

Dieser höhere Typus, der den verschiedenen Wissensgebieten angemessen ist, ist kein starres dogmatisch aufgestelltes Schema, noch ist er eine Anhäufung von Er-

gebnissen, die einfach aneinandergereiht werden. Er ist vielmehr ein *Verfahren der Assoziation und Abstraktion*, welches auf die Sinnesdaten ausgeübt wird und die Begriffe der realen Invarianten bildet. Er ist eine Entwickelung von Zusammensetzungen und Trennungen, die sich in die beiden Phasen, die induktive und die deduktive, auseinanderlegt und zu einer *fortschreitenden Erweiterung und Korrektion unserer Voraussagen* führt.

Ähnlich wie in den verschiedenen Formen der Entwickelung des Lebens kann diese Entwickelung langsamer und länger oder schneller und kürzer sein. Die induktive und deduktive Phase können als getrennte Momente des wissenschaftlichen Prozesses auftreten, wie man dies bei der Physik beobachten kann, oder sie können sich verschlingen und gewissermaßen ineinander übergehen, wie dies in der Biologie der Fall ist.

Die Vergleichung ist nun unter zwei reziproken Gesichtspunkten interessant: Nur aus der Physik kann man sich ein Bild machen von dem Grade der Vollkommenheit, welchen in Zukunft die Wissenschaften vom Leben erreichen können. Aber die ungeheure Kompliziertheit der letzteren und die Unbeständigkeit der biologischen Erklärungen, die daraus folgt, lassen uns die Bewegung der Wissenschaft klarer erkennen, welche bei einigen Arten von physikalischen Erscheinungen nur in Jahrhunderten sichtbar wird. Es gelingt uns so, zu verstehen, daß die *genaue Erkenntnis* nur eine *gut angenäherte* Erkenntnis ist, die nur so lange als genügend angesehen werden kann, als man sich auf einen gewissen Kreis von Voraussagen beschränkt, die aber in bezug auf einen größeren Kreis früher oder später eine Korrektur erfahren muß, bei der die vernachlässigten komplizierenden Bedingungen berücksichtigt werden.

Wir wollen aus den bereits früher behandelten Gegenständen ein Beispiel entnehmen.



Die GALILEI-NEWTONsche Dynamik scheint heute, nach zwei Jahrhunderten, eine Korrektionshypothese in dem Sinne zu erfordern, daß die abstrakte Unterscheidung gewisser die Bewegung bestimmender Daten, nämlich der in bezug auf den bewegten Körper *inneren* und *äußeren*, durch ein Postulat der *Vererbung* (bestimmender Einfluß der früheren Bewegung) oder des *Zusammenhanges* des Bewegungsfeldes ergänzt wird (§ 33).

Nun weisen die Worte selbst, durch die die Korrektionshypothese bezeichnet wird, auf eine Analogie mit gewissen Arten von bestimmenden Umständen, welche im Gebiete des Lebens auftreten. Die Biologen, welche die Entwickelung der organischen Arten studieren, streben gerade nach einer Trennung (wie bei der Bewegung) der *inneren* und *äußeren* Faktoren der Veränderung (Präformismus und Epigenese) und benutzen fortwährend den Gedanken der Vererbung und des Zusammenhangs der Organe. Auf einem komplizierteren Gebiete hat sich also der synthetische Gesichtspunkt früher eingestellt und drängt sich mit größerer Evidenz auf; in einer scheinbar einfachen Theorie erscheint er erst, wenn man eine größere Genauigkeit verlangt.

So können wir sagen, daß *die Entwickelung der Wissenschaften vom Leben sich darstellt als eine abgekürzte Wiederholung derjenigen der physikalischen Wissenschaft.*

# Autorenverzeichnis.


Abraham 522. 528.
Airy 438.
Almansi 431.
Amaldi 280.
Ampère 503. 506. 514. 518. 520 f.
Andrade 384. 412. 418.
Appell 429.
Archimedes 295. 365. 425 f.
Aristoteles 387. 446.
Avogadro 464.

Bain 306. 324.
Bartoli 518.
Bastianelli 550.
Battaglini 384.
Becquerel 527.
Beltrami 284. 496.
Bernard 550.
Bernoulli, Daniel 384. 435. 463 f.
Bernoulli, Jacob 432.
Bernoulli, Johann 429. 432.
Bessel 438.
Bierknes 506. 508.
Bignami 550.
Biot 503 f.
Black 472.
Boltzmann 463. 477. 482.
Bolyai 260. 283.
Bonola 281. 427.
Boscovich 466.
Boyle 464.
Bradley 511 f.
Bucherer 522.

Calderoni 551.
Cantor 322. 329. 332.
Carlini 438.
Carnot 472. 475 ff. 479.
Cauchy 466.
Cawendish 379. 438.
Cayley 284.
Cesca 304.
Clausius 463. 475 ff. 479. 482 f. 568 f.
Clifford 284. 293. 295.
Colding 472 f.
Comte 259.
Coriolis 397 f. 417.
Coulomb 504.
Crawford 472.
Crookes 515.

D'Alembert 347. 384. 417. 426. 431 ff. 437.
Darboux 384.
Darwin 299. 571.
Davy 472.
Dedekind 322. 324. 326 ff.
Delboeuf 306.
Demokrit 461.
Descartes (Cartesius) 259. 365. 387 f. 444 ff. 452 f. 457 ff. 461. 465. 471. 490. 505. 508. 541. 575.
De Tilly 347.
Dionisi 550.
Donders 308 f.
Doppler 391. 393. 544.
Du Bois Reymond 573.
Duhem 446. 452. 477. 480. 486.
Duilliers (Fatio de) 461 f.

Eimer 572.
Engel 283.
Enriques 280. 302. 312. 321. 330 f.
Epikur 461.
Espinas 299.
Euklid 259. 275. 278 ff. 287 ff. 316. 320 f. 341 f. 346 f. 427.
Euler 435 f.
Ewing 470.

Faraday 496 f. 506. 511. 515 f.
Fatio s. Duilliers.
Faye 518.
Fechner 308. 317.
Finsterwalder 309.
Fitzgerald 505. 521.
Fizeau 513. 519.
Foncenex 346. 384. 426.
Foucault 351. 363. 398. 480.
Fourier 573.
Fresnel 491. 493 f. 507. 512. 543.

Galeotti 561.
Galilei 365. 384. 386 f. 389. 394. 414. 417. 419 f. 428. 432 f. 435. 507. 577.





Gassendi 461.
Gauß 260. 283. 286. 288. 293 f. 294. 322. 433 f. 436. 507.
Gay-Lussac 464.
Genocchi 347. 384. 427.
Gibbs 477 f.
Golgi 550.
Goltz 317.
Grassi 550.
Green 466 f.

Hall 440.
Hamilton 433. 436. 485. 498.
Harvey 575.
Hauck 309.
Heaviside 501 f.
Helmholtz 260. 284. 293. 304. 308. 311. 316. 321. 336. 473 f. 477. 480 f. 484. 503. 515.
Henri 301.
Herbart 261. 321. 324.
Hering 306. 308.
Hertz 413. 421. 499 ff. 507 ff. 516. 518 f. 543. 545.
Herzen 555.
Heymans 301.
Hilbert 284. 295. 336.
Hirn 474.
Hitschmann 305.
Hoüel 336.
Huyghens 365. 386. 414. 431. 435. 461. 493.

James 308. 316.
Jordan 332.
Joule 455. 463. 472 ff.

Kant 259 ff. 269 f. 276. 286. 298. 556.
Kaufmann 528 f.
Kirchhoff 379. 494. 503.
Klein 272. 284. 295 f. 322. 336.
Kopernikus 368.
Krönig 463.

Lagrange 347. 427. 429. 433 ff. 436 f. 466. 479.
Lamark 299. 571.
Lambert 282 f.
Lamé 466.
Langevin 522.
Laplace 426. 441. 466. 492. 533. 565.
Larmor 507.
Laveran 550.
Lavoisier 404 f.
Lebedeff 518.
Legendre 281 ff.
Lehmann-Filhés 441. 533.
Leibniz 259. 276. 388. 554. 556.
Lesage 461 f.
Levi-Cività 499. 504 f.
Lewes 300.
Lie 284. 322. 330. 336.
Lippmann 482 f.
Listing 309.
Lobatschewsky 260. 283 f. 287 ff. 292. 320. 341.
Locke 554.
Lodge 530.
Lorentz 364. 509. 513 ff. 519 ff. 527. 532. 544.
Lotze 306. 308. 317.

Mac-Cullagh 494. 505. 507.
Mach 306 ff. 316 f. 354. 365. 378 f. 384. 399 f. 410 ff. 425 f. 428.
Maggi 375.
Manzoni 262.
Marchiafava 550.
Maupertius 436.
Maxwell 460. 463. 481 ff. 490 f. 495 ff. 500 ff. 509 ff. 515. 517 f. 544.
Mayer 472 f.
Michelson 521.
Mill 557.
Möbius 312.
Mohr 472.
Molière 446. 550.
Morley 521.
Mossotti 532.

Nasîr Eddîn 281.
Navier 466 f.
Neumann 494. 504. 507.
Newcomb 378.
Newton 222. 269. 290. 353. 365. 378. 384. 386. 388 ff. 394 f. 397. 399 ff. 410. 412. 414 f. 418 ff. 422. 434. 440 f. 445. 458 ff. 462. 466. 469. 473. 478 f. 483 f. 487 ff. 490. 492 f. 506 f. 517 ff. 528 ff. 538 ff. 546. 565. 577.

Ohm 502 f.
Ostwald 488 f.

Panum 308.
Pasch 332f.
Peano 332.
Pfeffer 572.
Picard 470.
Plücker 277.
Poincaré 261. 264ff. 284. 296. 307. 322. 328. 336. 354. 365. 475. 477. 479. 485. 494. 506f. 518. 522f. 533.
Poisson 384. 466ff. 493. 514.
Poncelet 312.
Poynting 490.
Proklus 281.

Quetelet 552.

Ramsay 405.
Raphael 567.
Reech 418.
Reich 398f.
Ribot 299.
Riemann 260. 284. 287. 289. 291. 320ff. 330. 341.
Righi 500.
Robin 371. 470.
Römer 351.
Romanes 300.
Ross 550.
Rowland 509. 515.
Rumford 472.

Saccheri 281ff. 443.
Sartorius 294.
Savart 503f.
Schopenhauer 457. 556.
Schwarzschild 528.
Schweikart 283. 287.
Segre 282.
Siacci 384.
Somigliana 496.
Spalding 300.
Specht 275.
Spencer 299f.
Stäckel 283.
Staudt 312. 323.
Steinert 312.
Sterneck, von 378.
Stevin 365. 384. 425. 428.
Stumpf 314.

Tadini 398f.
Taine 306.
Tait 472.
Taurinus 283.
Thomson, J. J. 527.
Thomson, W. 460. 468. 505f. 508.
Tisserand 440f.
Torricelli 428f.

Vailati 343.
Van der Waals. 463.
Varignon 365. 384.
Vaschy 410. 412.
Vater 316.
Veronese 284. 295f. 328.
Verworn 560.
Vitali 280.
Voigt 543.
Volkmann 308. 354. 375. 392.
Volta 509. 515.
Volterra 413. 490.

Wallis 281.
Weber 308. 317.
Weierstrass 322. 328f.
Weismann 572.
Wien 529. 538.
Wiener 494.
Wundt 301. 308. 316.

Young 493.

Zeemann 517. 544.
Zeuthen 279.

# Sachregister.

Abbildbarkeit 330f.
Aberration 392f. 511ff. 519. 521. 533.
Abfolge, kausale 549.
Abhängigkeit 419. 422.
Ablauf der Gedanken 553.
Ablenkung fallender Körper 398.
absolut 354. 356. 389. 391f. 394ff. 406. 453ff. 456. 463. 475. 477. 514. 519f. 524. 527. 556.
Abstoßung 532.
abstrakt 329. 331. 333. 339. 341. 349. 352. 369. 374. 384. 420. 447f. 459f. 573. 489. 526. 541. 577. 487.
Abstraktion(en) 285. 302. 307f. 315. 317. 320. 324. 326. 338. 344f. 349. 354. 367ff. 379f. 391. 401. 403. 408. 411. 436. 447ff. 452. 455. 457. 487f. 490. 492. 537. 540. 544. 576.
abstraktiv 459.
Achse(n) 395. 397f. 417.
Adaption 309f. 314.
adäquat 383. 386. 415. 443. 445. 457. 493. 499. 508. 542f. 574f.
Addenden 447.
additiv 364. 401ff. 411. 416f.
adiabatisch 454.
Aggregat 530.
agnostisch 574.
Ähnlichkeit 281. 341.
Akkomodation 310.
Aktivität 547.
aktual 305f. 314. 318. 324. 327ff. 332f.
aktuell 459. 541.
akustisch 352f. 491f.
Algebra (Algèbre) 453.
Allgemeinheit und Genauigkeit geometrischer Sätze 263f.
Amöben 551.
Analogie(n) 525. 544. 570f. 577.
Analyse 380. 416.
— der Zeit 347.
Analysis 373.
— situs 322.
analytisch 429. 433. 456. 466. 545. 560.
Anfangs-, und Endfiguration 435.
Angriffspunkt 380.
anisotrop 501.
Annäherung 296. 439. 441. 455. 465f. 539f. 541.
Annahmen(n) 355. 370. 385. 430. 432. 437f. 440. 443.
Anpassung 570ff.
— des Sinnesorgans an das Objekt. 299
anschaulich 541f.
Anschauung 422. 428. 459. 526.
— der Willenstatsachen 553.
— und Experiment 366ff.
Anstrengung 377. 379f. 382.
anthropomorph 378.
Anziehung(en) 532. 565.
Anziehungsgesetz 440.
Anziehungskraft 378. 439ff. 488. 566.
a posteriori 424.
Approximation 441. 519.
Approximationsanalyse 371f.
Approximationsgeometrie 271ff.
approximativ 372.
a priori 260. 270. 274. 281f. 301f. 339. 342. 361. 366. 369. 394. 415. 448. 516. 520. 525ff. 534. 539. 544. 549. 551. 561.

Äquidistanz 262. 337f. 341.
äquivalent 297. 346. 384f. 397. 412f. 420. 432f. 443. 475. 504. 514. 532. 544.
Äquivalenz 472f. 475. 488.
Arbeit 388. 435. 454f. 472. 475. 482. 488. 497. 522f.
— virtuelle 425. 428ff. 433. 467. 469.
arbitrium indifferentiae 554.
Art, 571f. Arten, organische 577.
Assoziation(en) 285. 302. 307. 310. 315. 317. 324ff. 338f. 344. 349f. 358. 365. 367. 369. 391. 436. 447ff. 452f. 455. 457. 459ff. 492. 540. 544. 564. 573. 576.
assoziativ 306. 318. 385. 426. 459. 541.
astral 287.
Astronomie 288f. 351. 360f. 368. 378f. 389. 391ff. 419. 438. 565. —, planetarische 532.
astronomisch 511ff. 519. 533. — fest 394ff. 399. 417. 421. 539.
Äther 268. 392. 493ff. 503. 505ff. 512ff. 518ff. 523ff. 538. — und Materie 523ff.
Atmosphäre 511f.
Atom 405. 460. 515. 530f.
atomistisch 404. 489. 514.
Aufeinanderfolge 552. 558.
Augenbewegungen 309f. 314.
augenblicklich 470. 536.
Ausbreitung 350f. 441. 462. 492. 504. 511f. 515. 519. 524. 533.
Auseinanderfallen des Gesichts- und des Tastraumes 338f.
Ausgleichung 571.
Autonomie des Noumenon 556.
Axiom(e) 279. 294. 303. 336. 338. 341.
Axiomatik des Hebelgesetzes 426ff.
α-Strahlen des Radiums 530.

Becquerel-Strahlen 527.
Bedingung(en) 401. 424. 437. 470. 478. 486f. 513. 559. 575.
Bedingung der Möglichkeit 383.
begreifen 542.
Begriff(e) 421. 423ff. 432. 444. 447ff. 490.
—, geometrische 297 bis 345.
Begründung der Dynamik 386ff.
Beobachtung(en) 371. 383. 386. 439. 533f.
Berührung 318.
Beschleunigung(en) 378f. 386f. 389. 410f. 413. 415ff. 421. 432. 528.
besondere Art, Materie von Materie zu trennen 262.
Beugung 493.
Beurteilung von Entfernungen beim Sehen 310f.
Bewegung(en) 301. 336ff. 339. 348. 355. 357. 370. 376ff. 381. 384. 386ff. 390ff. 398ff. 401ff. 406ff. 421f. 428. 434ff. 437. 444. 462. 471ff. 476ff. 479f. 483f. 486f. 489ff. 495. 505ff. 511f. 514ff. 519ff. 524f. 528f. 531f. 538ff. 558. 568. 577.
Bewegungserscheinung(en) 398. 406. 408f. 432. 537.
Bewegungsfeld 577.
Bewegungsgesetz(e) 409f. 413ff. 418ff. 507. 530ff.
Bewegungsgleichung(en) 386. 389. 394. 414. 432f. 434. 528.
Bewegungsgröße 388.
Beweis, geometrischer 383f. induktiver 552.
Bewußtes 300.
Beziehung(en) 313. 333. 338f. 376. 389. 446. 448. 456. 486f. 489f. 495. 517. 519. 526. 560.
—, äußere 400. 486.
—, hypothetische 548.
—, physikalische 559.
—, rein geometrische 265.
Beziehung zwischen den Beschleunigungen 389.
Bezugsystem(e) 389ff. 393ff. 395f. 399. 414f. 417. 422. 514. 527. 539f.
Bild(er) 308ff. 325. 328f. 334. 382f. 456. 461. 489f. 496. 514. 541. 543. 548.
binokular 309. 313f.
Biologie 547. 566. 569ff. 572ff. 575f.
biologisches Problem der räumlichen Orientierung 299ff.
bizentral 309.
Bogenlänge 330.
Brechung 492f. 495. 500.

Chemie 464. 486. 489f.
chemisch 401. 404ff. 409. 411. 416. 487f. 530. 558. 569.
circulus vitiosus 314.
curl 502.



Dämon 482.
Darwinsches Prinzip der natürlichen Zuchtwahl 299f.
Daten 308ff. 316ff. 342. 346. 358 362. 367. 371. 374. 376f. 380ff. 394. 424. 434. 436f. 442f. 451. 455f. 458. 486f. 500. 508. 540ff. 552. 558. 561. 573. 577.
Dauer 348f. 352f. 358. 362.
Deduktion(en) 540.
deduktiv 371. 433. 443. 534. 576.
Definition(en) 268f. 279. 294. 319. 330ff. 331ff. 341. 355. 372f. 376. 389f. 400f. 408f. 414f. 443. 447ff. 454. 477. 524. 526. 566. 561.
Definition der gleichen Kräfte 380ff.
— der Masse 403ff.
definitorisch 401.
Deformation(en) 467. 469f. 490f. 496.
deformierbar 510. 522.
Denken 303. 550.
Determinismus 564.
—, biologischer 546. 549ff. 558.
—, mechanischer 546. 563.
—, physikalischer 561. 566.
—, psychologischer 547. 550ff. 556f.
Determinismus und Willensfreiheit 552ff.
deterministisch 548. 552. 554. 557f.
Deutung 370. 477. 489. 543. 557f. 573.
Dichte 389. 401. 403. 338. 451.
Dichtigkeit 437f.
Dielektrikum 490f. 496ff.
Differentialbedingungen 496.
Differentialgeometrie 322.
Differentialgleichungen 470. 509f.
Diffusion 482. 559ff.
Dilatation(en) 401ff. 451. 455. 506.
Dimension(en) 522f. 531.
Ding an sich 558.
Diskrimination(en) 318. 373.
Dissoziation 464. 515.
Dissymmetrie(n) 307f. 367. 425.
distributiv 402.
dreidimensional 314. 330ff. 338f.
Dreiecke, physische 271f.
Druck 316. 377. 379f. 382. 406. 464. 491. 492. 499. 518. 522f.
Dualität 277.
Durchlässigkeit der Metalle 515.

Dynamik 268. 348. 365. 369. 376. 384. 386ff. 394f. 398. 417ff. 422. 431ff. 436ff. 445. 461. 479. 484f. 517. 532f. 540. 577.
—, astronomische 378.
— der Systeme 384. 417. 431ff.
— des Elektrons 527ff.
—, elektrische 522. 527. 529ff. 533.
—, irdische 539.
—, klassische 517. 522.
—, Newtonsche 440ff. 445. 529. 532. 538f.
—, nichtnewtonsche 532ff.
dynamisch 348. 383f. 386. 388f. 395f. 399. 408ff. 415. 428. 432. 434. 458. 461. 476. 541.

Ebene 263. 277. 280ff. 293. 309. 313. 316. 319. 321f. 331f. 335. 339f. 395.
—, schiefe 421ff.
Ebenheit 318.
Ebenheit des Anschauungsraumes 301.
Eigenschaft(en) 340. 359. 385. 400ff. 406. 423f. 461. 463. 486f. 500. 513. 567. 571.
Eigenschaft(en) äußere 526.
—, biologische 564.
—, dauernde 553.
— der zeitlichen Sukzession 351f.
—, innere 400. 406. 409. 486f. 526. 536.
—, suggestive 543.
eindeutig 326. 336.
Einfluß der Organisation des Sinnesapparates auf die Raumvorstellungen 300ff.
eingeschränkt 457.
Einheit der Materie 404ff.
Einwände 546ff.
elastisch 400. 406. 408. 462. 464ff. 469f. 490f. 493. 495f. 505f. 530. 538. 541.
Elastizität 379. 431. 460. 465ff. 470. 483. 491. 493ff. 504ff.
Elastizität als Bewegung betrachtet 504ff.
elektrisch 473. 483. 487. 490. 495ff. 501ff. 505f. 513. 527ff. 541. 544.
Elektrisierung 442.
Elektrizität 351. 362f. 490f. 497f. 515. 558.
Elektroden 529.
Elektrodynamik 498f. 501ff. 508ff. 527.
Elektrolyse 515.
elektromagnetisch 364. 392. 460. 483. 491. 495ff. 500ff. 504ff. 508ff. 513ff. 518. 522f. 523. 527ff. 534. 544f.
Elektromagnetismus 489. 497ff. 508ff. 517.
elektromotorisch 561.
Elektronen 514ff. 519f. 522f. 526ff. 532.
Elektrostatik 495ff.
elektrostatisch 491. 495ff. 501. 504ff. 518. 520.
Element(e) 433f. 478. 480.
elementar 321. 344. 433. 437. 443. 458. 462. 467. 471. 476. 478. 481f. 537. 541. 560.
Elementarkörper 403.
Elementarmasse(n) 409.
Elementarteilchen 404.
Elimination des Kraftbegriffs 379f.
Ellipsoid(e) 438. 522f.
Emanation (des Radiums) 405.
Emission 492ff. 526
Empfindung(en) 301f. 304ff. 320. 377. 380. 447. 451.
Empfindungsgruppen 323f.



Empfindungsschwelle 317.
empirisch 310. 325. 337. 374. 436f. 446.
Empirismus 298ff. 387.
empiristische und nativistische Erklärung der räumlichen Vorstellungen 298ff.
Energetik 431.
energetisch 388. 460. 483ff. 486. 489f. 568.
Energie(n) 436. 460. 471ff. 476f. 482. 484ff. 488ff. 497f. 547.
—, elektrische 498.
—, elektromagnetische 498.
—, kinetische 498.
—, potentielle 498.
Energieform(en) 485f. 488. 498.
Entfernung(en) 263. 277. 309ff. 317ff. 321. 323. 339. 424. 438. 447. 466. 498.
entgegengesetzt 382. 506. 525. 553.
Entropie 476. 479ff.
Entwickelung(en) 444f. 458f. 461. 471. 308ff. 527. 569ff.
—, ontogenetische 572.
—, organische 570.
Entwickelung der geometrischen Postulate 320ff.
Entwickelung der mechanistischen Philosophie 444ff.
Entwickelungshypothese 571.
Epigenese 577.
epigenetisch 299. 570.
Erblichkeit 470f. 537f.
Erblichkeitshypothese 537f.
Erde 389. 391. 394. 397f. 437f. 480. 511f. 519. 521.
Erfahrung 442. 469. 498.
Erfahrungstatsache 483f.
Ergänzung 544f.
Ergebnis(se) 424. 429. 533ff. 574.
Erhabenheit(en) 313.
Erhaltung der Art 571f.
Erhaltung der Elektrizität und des Magnetismus 503f.
Erhaltung der Energie 436. 471ff. 485. 559. 568.
Erhaltung der Materie 404. 421. 559. 568.
Erkenntnis(se) 428. 442f. 460. 542. 544. 562ff. 566ff.
—, genaue 576.
—, gut angenäherte 576.
erklären 542. 548.
Erklärung(en) 440. 445f. 458. 461f. 465f. 482. 485. 495. 529ff. 542. 549.
Erklärung(en) analytische 560.
—, biologische 558f. 564. 576.
—, der Physik 539.
—, elektrische der Gravitation 532f.
—, mechanische 485. 508. 534. 545f. 572ff.
—, physikalische 540ff. 547. 559f.
—, physiologische 567.
—, psychologische 564.
—, scholastische 446.
—, synthetische 542. 560ff.
—, teleologische 547. 561ff.
—, wissenschaftliche 574.
Erlanger Programm 336.
Erscheinung(en) 348ff. 359. 375ff. 390ff. 424. 427. 434. 437. 442f. 451f. 455ff. 459. 465f. 487. 489ff. 497. 502. 508. 516. 527ff. 541ff. 545. 549. 561ff. 572f.
—, akustische 491f.
—, elektrische 487. 513.
—, elektromagnetische 491. 500. 511. 515. 523f. 529. 534.
—, elektrostatische 495f.
—, irreversibele 478ff. 486.

Erscheinung(en) magnetische 513.
—, optische 491f. 500. 508. 513. 534.
—, physikalische 484f. 491. 572. 576.
—, physiologische 561.
Erscheinungswelt 446. 556.
Ersetzbarkeit 408f.
Erwärmung 442.
Erweiterung, fortschreitende 576.
Erweiterung der Mechanik 444—545.
ethisch 556.
evident 430.
Evidenz 302f. 336. 344. 361. 382f. 386. 410. 426.
Evidenz der mechanischen Prinzipien 368ff.
Evolutionshypothese 571.
Existenz, reale 553.
Existenz der geometrischen Grundelemente 279.
Existenz der Resultante 384ff.
Existenz einer Kraft 377.
Existenz eines Punktes 305.
Existenz von Strecken 296.
Experiment(e) 297. 308. 347. 368. 379. 382. 385f. 396. 413. 422. 427. 430. 436. 439. 441. 464f. 474. 486f. 494. 501. 510. 513. 516. 518ff. 540. 545.
explizit(e) 370. 374. 421.
Extension 543.
extensiv 458f. 465.

Faden 356f. 382. 385. 400. 408. 430.
Faktoren 566.
—, äußere 547. 577.
—, innere 547. 571. 577.
—, organische 555.
—, störende 442.
Faktum 424.
Fall 407. 435. 438.
Feder 505.
Fehler 360. 372. 375. 440.
Feld, elektromagnetisches 498. 509ff. 513. 516f. 528.
Feldgleichungen 504.
Fernwirkungen 503f. 518.
fest 393ff. 465ff. 470. 477f. 488. 494. 525.
Figur(en) 277. 280. 303. 335. 337. 381. 524.
fiktiv 442f. 487f. 525. 537.
Fläche(n) 293. 305. 322f. 324. 330f. 333. 339. 429f. 507.
Flächentiere 293.
Fluidum 490. 497. 514. 525.
Flüssigkeit(en) 451f. 461. 465. 474. 499. 504. 506. 515. 525.
Form(en) 344. 373. 380. 384. 412. 423. 458ff. 468. 524.
Formalismus 373f.
Freiheit 553f. 556.
Freiheitsgrade der Bewegung 336.
früher 348f. 353.
Fühlen 548.
Funktion(en) 564. 566.
Funktionalgleichungen 470.

Galvanometer 515.
Gas(e) 454f. 460. 476f. 480ff. 488. 493f. 515.
Gastheorie, kinetische 454ff. 463ff. 469. 476f. 480. 516.
Gasthermometer 455.
Gedanken 553. 560.
Gefühl(e) 547ff. 552f. 574.
Gefühlsgründe 548f.
gegeben 310. 314. 380. 431. 459. 509. 525. 566.
Gegenstand (-stände) 442f. 488f. 526. 546.
Gegenstände der Sinneswahrnehmung 298f.
Gehör 305. 358f.
Genauigkeit 347. 374f. 439. 577.



Genauigkeit der Geometrie 273ff.
Genauigkeitsgrad(e) 347. 351. 361. 371. 439.
Genauigkeitsgrenze(n) 286. 290.
genetisch 305f. 314. 318f. 324. 326. 328f. 333. 343. 352. 444. 541.
geodätisch 507.
Geographie 571.
Geometrie(n) 259 bis 344. 346ff. 524.
—, abstrakte 276ff. 339.
—, andere mögliche 284f.
—, astrale 287.
—, elementare 321.
—, euklidische 279f. 289ff. 321.
—, metrische 268. 295. 316ff. 321ff. 335ff.
—, nichtarchimedische 295ff. 329.
—, nichteuklidische 259f. 275. 278ff. 283ff. 286. 288. 292f. 321. 342f.
—, optische 269. 295.
—, projektive 269. 295. 308ff. 312ff. 321ff. 333ff. 338ff.
Geometrie als ein System von allgemeinen Voraussetzungen 274.
Geometrie als Teil der Physik 269ff.
Geometrie der Blindgeborenen 342f.
geometrisch 377. 382f. 390. 402. 420. 423f. 431. 458. 498. 524.
geometrische Analyse des Sehvorganges 309f.
geometrische Daten der Kraft 380ff.
geozentrisch 367f.
Gerade 263ff. 268f. 277. 280ff. 294. 313. 319f. 321f. 333ff. 339f. 355. 393. 420.
gerade Linie als gleichförmige Innervationsreihe 301f.
gerade Linie als System von Punkten 280.
geradlinige Ausbreitung des Lichtes 289ff.
geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes 367.
Geradlinigkeit 262.
Geruchsinn 305.
Gesamtenergie 473. 476.
Gesamtheit 526. 561.
Geschehen, soziales 552.
Geschichte der Elastizitätstheorie 466ff.
geschichtlich 320ff.
Geschwindigkeit(en) 363. 387. 393. 419f. 423. 429. 433f. 462f. 476. 480ff. 511f. 518. 529ff. 536f. 547.
Gesetz der beginnenden Bewegung 415ff. 418f. 421.
Gesetze der vollkommenen Gase 477.
Gesetz der Zellreaktion 562.
Gesetz des Gleichgewichtes und der beginnenden Bewegung 535. 538ff.
Gesichtseindrücke 573.
Gesichtselemente 490.
Gesichtsempfindungen 323. 338ff.
Gesichtssinn 298. 302f. 305f. 308f. 317. 333ff. 338ff. 341. 377ff. 451.
Gewebe 560. 562.
Gewicht(e) 389. 400. 425. 447ff. 464.
gleich 340. 349. 380ff. 401. 406f. 409. 411. 416. 425f. 447ff. 454. 549.
gleichförmig 396. 398. 483. 575.
gleichgerichtet 383. 426.
Gleichgewicht 382. 385. 387. 410. 413. 415. 421ff. 428ff. 447ff. 467ff. 476ff.

Gleichgewicht indifferentes 400.
—, osmotisches 561.
—, stabiles 565f.
—, stationäres 570.
—, statistisches 469. 476.
—, thermisches 476.
Gleichheit 335ff. 341. 380. 401f. 409ff. 446. 448. 450. 452. 481f.
Gleichung(en) 373. 431. 433. 435. 467. 478ff. 498f. 500ff. 509. 516. 518. 528. 540ff. 573.
Gleichungen in Ungleichungen verwandelt 271ff.
gleichzeitig 348. 351f. 364.
graphisch 322. 340.
Gravitation 379. 412. 422. 461f. 531ff.
Grenze(n) 393f. 441.
Grenzfall, -fälle 431. 454. 478f. 531f. 573.
Grenzlinie 331.
Größen 380. 382. 388. 401ff. 416. 423. 446ff. 452. 455ff. 478. 480. 541. 543. 573.
Grundbegriffe 370. 376.
Grundgesetz der Bewegung 413ff.
Grundgleichungen 503f. 543f.
Grundhypothese 545.
Grundvoraussetzung(en) 443.
Gruppe(n) 401ff. 447. 452. 455. 524. 544.
gyrostatisch 505.

Harmoniebeziehungen 573.
Häufungspunkt 328.
Hauptsätze, thermodynamische 474f. 567ff.
Haut 317f. 325.
Hebel 374. 425ff.
Helium 405.
heterogen 416.
Heterogeneität 568.
heuristisch 458. 473. 542f.
Hilfshypothesen 544.
Himmelskörper 378. 393.
Himmelsmechanik 377.
historisch 323. 365ff. 385.
historische Entwicklung und Evidenz d. Prinzipien 365ff.
homogen 268f. 291. 340. 401. 403. 416. 428. 438. 467. 498ff. 501. 504.
Homogeneität 269. 307. 363.
—, scheinbare 568.
hydrokinetisch 506.
hydrostatisch 430.
hyperbolisch 341.
hyperchemische Transformationen 405.
Hypothese(n) 296f. 346. 370f. 373f. 439. 442. 446. 451f. 468f. 510. 533 565f.
—, Cartesische 452ff.
— der Geraden 269.
—, ergänzende 534. 573.
—, explizite 370.
—, fundamentale 502. 539. 570. 572f.
—, indifferente 484.
—, mechanische 346. 568. 572f.
—, mechanistische 545ff. 548. 558. 561. 567. 569ff. 574ff.
—, metaphysische 451ff.
—, physikalische 295.
hypothetisch 437f. 443. 484f. 572.
Hysteresis 470. 534. 538.

Ich 555f.
identisch 309. 413.
Identität 334. 338. 340.
Immaterialität der Materie 488.
implizit(e) 343. 370. 374. 382. 386. 394. 399. 410. 421. 426. 432. 472. 487.
Impuls 387f.
indifferent 376. 400. 484. 494. 569. 571.
Individuum 571f.



Induktion(en) 414. 420. 422. 429. 436. 443. 497f. 499. 503ff. 510.
induktiv 430. 461. 484. 532. 544. 552. 565. 576.
infinitesimal 430.
Infusoiren 551.
Inkompressibilität 465. 468. 494.
Innervationssinn 316.
Integral 498. 510.
Integrationskonstante 415.
Intensität 452. 493. 547.
intensiv 451ff. 458.
Interferenz 493. 513.
interplanetarisch 439f.
Interpretation 573.
intransitiv 405.
invariabel 395.
invariant 401ff. 416. 455. 488. 524.
Invariante(n) 401. 403f. 488f. 576.
Invarianz 318. 337. 357. 381. 430. 455f. 488f.
Ion(en) 464. 561.
Ionisation 515.
irreduzibel 405.
irreversibel 478ff. 484. 486.
Irrtümer 366.
Isochronismus 357ff.
isoliert 410f. 413. 473. 479f. 485. 488. 507. 536f.
Isolierung 375. 488. 537.
isotrop 467. 504.
Isotropie 307.

kalorimetrisch 406. 449f. 472.
Kampf ums Dasein 571.
Kanalstrahlen 530.
kanonisch 478.
Kapillarität 466.
Kategorie(n) 395ff.
Kathodenstrahlen 515. 527f.
kausal 549f.
Kausalität 559.
Kinematik 347f. 365. 369. 377f.
kinematisch 390. 422. 458.
kinetisch 388. 454f. 460. 463ff. 469. 471. 476f. 480. 482f. 484f. 498. 505ff. 568.
kinetische Modelle des Äthers 506ff.
Klasse 446ff. 452.
klassisch 470f. 485. 517. 532. 535. 546. 557.
Koexistenz 549. 552.
Kohärer 545.
Komet(en) 518.
kommutativ 385.
Komponente(n) 402.
Kompressibilität 467.
Kompression(en) 401ff.
Konfiguration(en) 435f. 470.
Kongruenz 280. 321f. 335ff. 340ff. 524.
Kongruenz und Bewegung 336ff.
konkret 351. 373f. 384f. 431. 434. 437. 452. 456f. 460. 462. 466. 482. 489. 492. 498. 505. 507f. 514. 574.
konstant, Konstanz 317f. 359f. 388. 395. 398. 437. 464. 473. 485. 522. 531f.
Konstruktion(en) 259. 279. 285f. 297. 431. 448. 459. 506.
kontemplativ 549.
Kontinuität 420. 572.
Kontinuum 322f. 324. 328f. 330ff. 338.
Kontraktion 506. 522.
Konvektionsstrom (-ströme) 509. 515.
Konvention 395.
konventionell 297.
Koordination 330f. 386.
Körper 432. 437. 475. 478.
—, bewegliche 525.
—, bewegte 461. 486f. 501. 508ff. 527. 577.
—, elastische 469f. 538.
—, elektrisierte 491. 495. 502. 509f. 515. 518. 527.
—, fallende 398. 414. 435.
—, feste 262. 319. 337. 339. 382. 424. 438. 460. 465ff. 469f. 477. 488. 494.
—, flüssige 460. 469.
—, kleine 461.

Körper leitende 544.
—, leuchtende 492.
—, magnetisierte 509
—, materielle 487. 525f.
—, ruhende 494. 498ff. 501. 509.
—, schallaussendende 492.
—, schwere 429. 438.
—, starre 268f. 274. 333. 357. 381. 395. 438. 524.
—, tropfbarflüssige 477. 488.
—, unbewegliche 501. 502.
—, undurchsichtige 544.
—, von Strömen durchflossene 509.
Korrektion(en) 439. 441ff. 445. 458. 462. 464. 510. 518. 520. 532ff. 575ff.
Kraft, Kräfte 346. 348. 355. 370. 376ff. 380ff. 386ff. 396. 398. 400. 407f. 409f. 415f. 418ff. 423ff. 428f. 431. 434f. 437ff. 458ff. 466f. 478. 487. 490f. 501f. 518. 524f. 530. 537. 541. 561. 565. 570f.
Kraft als ein Grundbegriff der Mechanik 379.
Kraft als Gegenstand des Muskelsinns 377ff.
Kraft der Auswahl 482.
Kraftfeld 379f. 407. 437. 486ff. 496f. 500ff. 506. 536.
Kraftrichtung 428.
Kraftsinn 317.
Kräfteparallelogramm 384.
Kreis(e) 277. 319. 327. 368.
Kreisel 505f.
Kreisprozesse 475f.
Kristall(e) 505.
kristallinisch 501.
Kritik 322f. 333. 335f. 343. 345f. 348. 372. 374. 384. 445. 455ff. 471. 486f. 489. 496f. 504. 517ff. 524. 563.
Kritik der räumlichen Beziehungen 263f.
Krümmung 293. 314. 318.
Krümmungsmaß 277. 287f.
Kugel(n) 319. 408. 438. 440. 464f. 506. 522.
Kurve(n) 330ff. 336.

Ladungen, elektrische 483. 498. 512f. 515. 528. 532. 559f.
Lage(n) 306. 380. 382. 390. 412. 418ff. 433f. 438. 469. 507. 537.
Lagebeziehungen der Körper 262. 265. 273. 276. 278. 296. 299. 346.
Länge(n) 355. 357.
Längenmaß(e) 355f.
Leben 559ff. 567ff. 572ff.
lebendige Kraft 388. 434ff. 454. 463. 471ff. 485. 498.
Lebendiges 547ff.
Lebenserscheinungen 545ff. 549. 558ff. 568f. 572. 575.
Lebewesen 562ff. 571.
Leiter 502f. 515.
Leitfähigkeit, elektrische 559.
Licht 340. 350f. 362f. 376. 441. 473. 491ff. 499f. 504. 506. 510ff. 516ff. 519ff. 524. 529. 531. 544f. 569.
Lichtgeschwindigkeit 351. 493. 499. 510. 529. 531. 533. 540.
Lichtwellen 495. 511f. 513. 518.
linear 352. 355.
Linie 263. 305. 321ff. 324ff. 330f. 333. 341. 353. 355. 420.
Linie auf einer Fläche 331f.
Löcher im Äther 525.
logisch 302f. 321. 341. 372. 541.
lokal 502. 511. 539.
Lokalisation 487 489ff.
—, räumliche 306.
Lokalkonstante, additive 364.
Lokalzeichen 306. 317.
longitudinal 493. 530.

Magnet(e) 502. 514.
Magnetfeld 483. 517. 527. 544.
magnetisch 470. 490. 501f. 506. 513. 521. 526. 528. 538. 544.
Magnetismus 491. 498. 514. 517.
Malariaforschungen 550.
Mangel der Wahrnehmung 325.
Mängel der Elektronentheorie 518f.
Mannigfaltigkeit 322. 330f.
Mars 440.
Maschine(n) 475.
Maß(e) 330. 416. 447. 453ff. 456. 528f.
Masse(n) 346. 370. 378f. 386. 388ff. 400ff. 408ff. 414ff. 432. 437ff. 449. 484. 486ff. 507. 528ff. 537.
Masse als physikalische Invariante 401f.
Massenbegriff 410. 416. 489.
Massengleichheit 409ff.
Massenkräfte 467.
Massenpunkt(e) 268. 374ff. 378. 382. 388. 390. 393ff. 406. 416. 421. 427. 434. 466. 468. 528. 530f.
Massenteilchen 521.
Massenverhältnis 411ff.
Materialisation der Energie 488.
Materie 409. 421. 461. 466f. 469. 471. 487ff. 503f. 506f. 513ff. 517. 519. 522. 530. 532. 538. 547. 566.
Materie innerhalb oder außerhalb eines Körpers 261. 263.
Materie und Energie 486ff.
materiell 370. 410ff. 413. 416f. 420. 423. 467. 487. 510. 514. 524f. 529.
mathematisch 354. 370ff. 375. 379. 520. 524. 568.
mathematischer Nominalismus 370ff.
mathematische und physikalische Strenge 371f.
Mechanik 345—443.
— als Erweiterung der Geometrie 345ff.
—, analytische 466.
—, energetische 483ff. 485f. 537.
—, klassische 443. 485f. 534.
—, Newtonsche 540. 546.
—, nichtnewtonsche 538. 540.
—, physikalische 466.
Mechanik posthume von Hertz 507.
mechanisch 336. 339ff. 346. 366ff. 412. 454. 466. 469ff. 471ff. 485. 490. 497. 525f. 534. 540ff. 345ff. 565. 569f. 572ff.
mechanische Analogien für Entwickelung und Anpassung 570ff.
Mechanismus 458ff. 473. 477ff. 482. 484. 498. 508. 546f. 570. 572ff.
mechanistisch 444ff. 532. 545ff. 548. 558. 561. 575.
Medium, Medien 261. 268f. 291. 340. 419. 493ff. 501ff. 505f. 509ff. 519. 537. 543f. 561.
mehrdimensional 278. 322.
Merkur 439.
Meßbarkeit der Körper 267.
Messung(en) 349. 351. 381. 451. 493. 523f. 573.
— des Intensiven 451ff.
Metall(e) 468. 515
Metaphysik 456f. 574.
metaphysisch 369. 376f. 445f. 451ff. 524. 556.
Methode(n) 409f. 541.

metrisch 268. 295. 313. 315ff. 321ff. 335ff. 338ff.
Modell(e) 457f. 473. 479f. 505ff. 544ff.
—, elektrisches 508. 532.
—, kinetisches 506f.
—, mechanische(s) 479. 490. 494. 500. 505f. 525f. 532. 544ff. 569f. 573f.
Modifikation 484. 517. 538.
Möglichkeit 336. 383. 546ff. 551. 574.
Möglichkeit einer Wissenschaft 552ff.
Molekül(e) 454. 463f. 476f. 482f. 493. 531.
Molekularkräfte 522.
Moment(e) 352f. 462. 576.
—e, statische 425ff.
momentan 440f.
Mond 399. 439.
monokular 313.
monozyklisch 477.
moralisch 551ff. 555. 558. 564.
Motiv(e) 552ff. 558.
Muskel(n) 387.
Muskelbewegung(en) 316f.
Muskelempfindung(en) 311f. 431. 316ff. 323. 378f.
Muskelkontraktionsempfindung(en) 319.
Muskelkraft 400. 406.
Muskelsinn 302f. 305f. 316. 333. 358. 377ff.
muskular 377f.

Nativismus 298ff.
Natur des Körpers 423.
— der Verbindungen 429f.
natürlich 470. 482.
natürliches oder absolutes Maß 453ff. 463.
Naturwissenschaft 571.
negativ 514. 519. 521. 528. 530. 569. 572.
negative Instanzen gegen den Physizismus 560f.
neopräformistisch 299.
Nichtanschaulichkeit der nichteuklidischen Geometrien 292f.
Nichterblichkeit 470. 536.
Nichtexistenz von Gegenständen 263f.
Nominalismus, mathematischer 379.
— Poincarés 264ff.
nominalistisch 370.
Noumenon 556.
Nullpunkt 406. 454f.

Oberfläche 262f.
Objekt(e) 443. 555f.
Ohr 317.
ökonomisch 297. 460.
Operation(en) 401ff.
Optik 311. 491ff. 495. 507. 517.
—, elektromagnetische 534. 537. 543. 545.
—, undulatorische 543.
optisch 269. 308. 315. 322. 334. 339ff. 352f. 367. 376. 377. 379. 393. 406. 459f. 490ff. 500. 505. 508. 510. 513. 521. 534. 541. 573.
Ordnung 351f. 566. 568.
Ordnungstypus des eindimensialen Kontinuums 325ff.
Organ(e) 566f. 577.
—, rudimentäre 571.
Orientierung, konstante 309.
Orientierung im Raume 299.
Ort 362ff. 526.
Orthogenese 572.
Ortskonstante 523.
Ortszeit 364. 523.
Osmose 559.
Oszillation(en) 499.

Paläontologie 571.
Pangeometrie 295.
Panmixia 572.
Parallaxe der Fixsterne 289.
parallel 277. 279ff. 284. 287. 289. 293f. 338ff. 346f. 425ff.
Parameter 478.



partiell 417. 489. 500. 545.
Pendel 398. 435. 439. 480.
Periodizität 570f.
permanent 398.
Permanenz 505.
permeabel 544.
Perpetuum mobile 474.
Persönlichkeit 553. 555ff.
—, ethische 556ff.
—, moralische 555.
Phänomen 462. 559.
Phase(n) 459. 506. 570. 576.
Philosophie 444ff. 458.
—, Aristotelische 446.
—, Kantische 556.
—, klassische 556ff.
—, mechanische 539.
—, mechanistische 444ff. 532. 546. 575.
Photogrammetrie 309.
phylogenetisch 299f.
Physik 370. 376. 445ff. 457. 461. 484. 508. 526. 540. 545ff. 565. 567. 575f.
—, biologische 559.
— der Gewebe 560.
physikalisch 321. 339. 349ff. 355. 358. 373. 375. 377. 380. 383. 385. 388f. 391. 401ff. 409. 411. 416. 435. 443. 456. 465f. 473. 484. 486ff. 491. 524. 526. 547. 549. 558ff. 565. 567. 572f. 575ff.
Physiologie 303. 311. 316ff. 561.
— der Gewebe 562.
— der Zelle 560.
physiologisch 349. 367. 391. 549. 561f. 569.
Physizismus 558ff. 565. 569.
planetarisch 439. 532.
Planetensystem 393. 423. 438. 462. 565.
Plasma 561. 564. 567. 572.
Poincarés Beweis für die Willkürlichkeit d. Geometrie 266ff.
Polarisation 493. 506. 516.
positiv 392. 402. 405. 424. 454. 456f. 460. 469. 490. 499ff. 504. 514. 517. 520. 530. 532. 543. 549. 557. 561. 563f. 567ff.
positive Bedeutung teleologischer Erklärungen 567.
positivistisch 399.
Postulat(e) 279. 294ff. 301ff. 320ff. 324ff. 330ff. 341f. 345ff. 371ff. 384f. 390. 393f. 403f. 408ff. 415ff. 421f. 425. 427. 458. 473ff. 482f. 484f. 486.
Postulat(e) Galileisches 432f.
Postulat der Bestimmtheit der Geraden 334.
Postulat der Masse 407ff.
Postulat der Mittelwirkung 568f.
Postulat der Vererbung 577.
Postulat der Zeitmessung 359ff.
Potential 435f. 473. 485. 504.
potentiell 473. 484f. 498.
Prädestination 556.
Präformismus 577.
präformistisch 299. 570.
Prinzip, d'Alembertsches 431ff.
— der kleinsten Wirkung 436.
— der Sparsamkeit 344.
— des kleinsten Zwanges 434ff. 507.
—, deterministisches 549.
—, Dopplersches 544.
—, experimentelles 474.
—, Plückersches 277.
Prinzipien 389. 418ff. 421f. 425. 434. 437. 443. 445. 470. 479. 484.
Prinzipien der Geometrie 320ff. 347.
Prinzipien der Physik 547. 576ff.
—, energetische 568.

Problem(e) 297 f. 445. 466 f. 507. 532. 545 f. 549. 551. 562. 565. 573.
Probleme der Entwickelung 569 ff.
Problem des Raumes 284 ff.
Produkt 402 f. 415. 428. 432.
Programm für die Erklärung der Postulate 302 f.
Projektion(en) 309 ff. 428.
projektiv 269. 308 ff. 312 ff. 315. 321 ff. 333 ff. 338 ff.
Projektivität 340.
psychogenetisch 320 ff.
Psychologie 303. 311.
psychologisch 321 f. 324. 331. 337. 344. 345 f. 349 ff. 352 ff. 367. 370. 374. 385. 436. 448. 457. 459 f. 547 f. 557 ff.
psychologische Entstehung der geometrischen Begriffe 297—344.
psychologische und physikalische Zeit 349 ff.
pulsieren 506.
Punkte(e) 263 ff. 276 ff. 305. 324 ff. 339. 348. 353. 370. 374 ff. 386. 389. 393. 410 ff. 413. 416 f. 420. 423. 426 f. 429. 432. 434 f. 437. 467. 484. 507. 512. 525. 529 f. 536 f.
Punkt als Element der Trennung 327.
Punktepaare 466 f.
Punkt- und Kreisgeometrie 276 ff.

Quadrat der astronomischen Aberration 519. 521 f. 533.
Qualität 446 f. 453.
Qualitäten der Materie 405. 407 f.
qualitativ 313. 322. 336. 385. 427. 445. 457. 486. 513. 544. 573.
Quantität 357. 446 f.
Quantität der Materie 400. 402. 408.
quantitativ 313. 349. 353. 386. 407. 427. 445 f. 451 f. 458. 500. 540. 544. 546. 558. 572 ff.
Quellen der Kritik 303 f.

Radium 405. 530.
Rangordnung der Prinzipien 422 f. 437.
rational 327. 446.
Raum, Räume 260 ff. 276 ff. 286. 292 f. 300 f. 306 ff. 317 ff. 325 ff. 336. 338 ff. 355. 367. 389. 391 f. 421. 436. 447. 490. 501 f.
Raum als Begriff 276 ff.
Raum und Räumliches 261 ff.
räumliche Beziehungen 261 ff. 298.
räumliche Daten 308 ff. 316 ff.
räumliche Lokalisation 306.
Reaktion(en) 424. 432 f. 465. 499. 507. 564.
real 350. 442 f. 452. 566. 576.
reale Bedeutung der Geometrie 259 bis 297.
Realismus und Nominalismus 260 f.
Realität 456.
Realität der Dauer 362.
Reduktion 444 f. 458. 462. 508. 561.
reduzierbar 404. 406.
Reflex 300 f.
Reflexion 492 f.
Regelmäßigkeit, statistische 552. 568.
Reibung(en) 387. 392. 431. 442. 454.
Reihe(n) 349. 352 f. 452. 545. 570. 573.
Reizschwelle 325.
Rektifikation des Zirkels 275.
Relation(en) 368. 370 f.
relativ 418 f. 457. 462. 486. 488. 510 f. 513 f. 518. 547. 556. 558. 575.



Relativität, lokale 511.
Relativität der Bewegung 390 ff.
Relativität der Zeitmessung 352 ff.
Relativitätsprinzip 510 ff. 519 ff. 523. 527.
—, verallgemeinertes 511. 513.
Repulsivkräfte 464.
Resonator 545.
Resultante 384 f. 417 f. 421. 426 f. 432. 468. 530. 532.
reversibel 454. 475 f. 479 f.
Reziprozität 495.
Rhythmus 357 f.
Richtung(en) 380. 393 ff. 399. 417. 420 f. 480. 528 ff. 539.
Röhren, Crookessche 515.
Rolle 428.
Rotation(en) 319. 339. 397 ff. 505.
Rotationsachse(n) 319. 339. 505.
Rotation der Erde 398 ff.
Rückbildungen 572.
Ruhe 363 f. 399. 486. 518.

Saturn 566.
Schall 350. 442. 492 f. 544.
schiefe Ebene 374. 425 ff. 428.
Schranke 484.
Schwerkraft 307. 361. 367. 378. 387. 389. 394. 397 ff. 437. 533.
Schwerpunkt 393. 429.
Schwingung(en) 492 ff.
Schwingungsbewegungen 431. 442. 477.
Sehen 308 ff.
Sehraum 315. 317.
Sehstrahl(en) 313. 334. 394.
Sehzentrum 334.
Selbstinduktion 497.
Selbsttätigkeit 547. 549. 551. 556.
Selbstvertrauen 553.
singulär 512. 524.
Sinne 526.
Sinnesdaten 342. 346. 362. 365 ff. 386. 444. 454. 460 f. 541. 576.
Sinneswahrnehmung(en) 307.
Sinneswelt 526.
sinnlos 377.
Sonne 391 f. 440.
sozial 552.
Spannkraft, -kräfte 499.
Spannung(en) 379 ff. 491. 496.
später 348 f. 353 f.
spektroskopisch 391.
Spektrum 517.
Spekulation(en) 508. 524.
spekulativ 508.
Spiegelung 500.
Stabilität 565 f.
Statik 346 ff. 365. 369. 374. 376. 378. 381 f. 384. 389. 421. 428. 436. 468.
Statik der Systeme 423 ff.
stationär 477. 495. 505 f. 565. 570.
statisch 347. 381. 383. 410. 416 f. 421 f. 425 ff. 430. 432. 470.
statische Symmetrieprinzipien 382 ff.
statistisch 469. 476 ff. 552. 570 ff.
stetig 318. 322.
Stetigkeit der Zeitordnung 352.
Stetigkeitspostulate 324 ff.
Stoff 487.
Störungen 512. 514. 565.
Stoß 412. 454. 461 ff. 465.
Strafrechtstheorien 551.
Strahl(en) 380. 530.
Strahlungen 526 ff. 530.
Strecke 381 ff.
streng, Strenge 360 f. 371 ff.
Stromelemente 518.
Stromkreis(e) 497 f. 503 ff. 510 f.
—, materialisierte 310.
Ströme 497 f. 502. 509 f. 514 ff. 520. 528.
—, elektrolytische 515.

Ströme induzierte 483.
—, Voltasche 515.
— von Elektronen 526ff.
Struktur 260. 298. 300.
Subjekt 298. 555f.
Substantialisierung der Energie 488f.
Substanz(en) 446. 449f. 556f. 562.
Substitution(en) 409.
Substrat 451f.
Sukzession(en) 314. 548f. 377.
Summe 383. 446ff. 473.
—, geometrische 382.
—, statische 382.
Superposition 315. 375. 437. 560.
Symbol 265f.
Symbolismus 302.
Symmetrie(n) 367. 382ff. 402. 410. 421. 425.
Symmetrie der Erscheinungen 268f. 274. 294. 339. 363.
—, statische 535.
Symmetrieprinzipien 383ff. 421. 426.
synthetisch 344. 421ff. 490. 495. 497. 511. 542. 545. 560ff. 577.
synthetische Bewertung der Prinzipien 421ff.
System(e) 265. 296f. 309f. 348. 373ff. 376. 384f. 394ff. 400. 417f. 420. 422ff. 425ff. 428ff. 434. 456. 464. 471. 473. 475ff. 484f. 499. 505f. 520f. 524f. 565. 568.
systematisch 442. 568.
Systematisierung 321.

Tasteindruck 451.
Tastempfindung(en) 316ff. 323. 338ff. 357.
Tastkörperchen 316.
Tastmuskelbilder 541.
Tastmuskelempfindungen 488.
Tastmuskelerfahrungen 342.
Tastmuskelsinn 367. 459.
Tastsinn 298. 302f. 305f. 311f. 316ff. 323. 333. 338ff. 358. 381.
Tast- und Gesichtsgeometrie 338. 340.
Tastvorstellung(en) 341f.
Tatbestand, geometrischer 303.
Tatsache(n) 377. 388. 392. 398f. 403. 409. 430. 434. 436. 444. 449. 454ff. 458. 480. 487f. 520. 548f. 552ff. 560. 571. 573. 575.
Teil(e) 447f. 450. 467. 471. 478. Teiler 476. 478.
Teilung(en) 324. 331f. 402ff.
teilweise Mitnahme der Lichtwellen 513. 518f.
— des Äthers 514.
Teleologie als Vorstufe des Physizismus 564ff.
teleologisch 561ff.
Temperatur 267. 316. 354ff. 361. 449ff. 463f. 474ff. 482f.
Temperaturgefälle 474. 483.
Tendenz des Mechanismus 575.
—, präformistische 570.
Tendenzen der Grundlagenuntersuchungen 321ff.
Theorie(n), assoziative 306. 371ff.
—, astronomische 466.
—, atomistische 404.
— der Ausdehnung 322.
— der Parallellinien 282.
—, elastische 495.
—, elektrische 460. 530. 532.
—, elektromagnetische 491. 518. 540. 543f.
—, elektrostatische 498.
—, Hertzsche 508ff. 519.



Theorie(n), kinetische 455. 469. 471. 482f. 505f.
—, Lorentzsche 513ff. 519ff.
—, Maxwellsche 500ff.
—, mechanische 470. 534.
—, Newtonsche 533.
—, optisch-elektromagnetische 460.
—, physikalische 445.
—, statisch-kinetische 516.
—, statistische 442.
thermisch 449f. 472. 475f.
Thermodynamik 470f. 473ff. 482f. 568.
thermodynamisch 479. 567ff.
Thermometer 355f. 450f. 453. 455.
Ton, Töne 358f.
Torsionspunkte 525.
Trägheit 506. 547.
Trägheitsgesetz 355. 367. 392. 399. 414f. 418ff. 421ff. 441. 535ff.
Trägheitskräfte 497. 500. 507. 529.
Trägheitspostulat 507.
Transformation(en) 401ff. 409ff. 416. 454. 475f. 479ff. 486. 524. 569.
Transformationsgruppen 322. 336f. 340. 524.
Transitivität 401f. 411. 450.
Translation 396ff. 520ff.
translatorisch 521.
transversal 493. 530.
transzendent 354f. 389. 419. 457. 524. 546. 554ff.
transzendental 374. 391. 554f. 556f.
Trennung(en) 327. 576f.
Trennung der geometrischen Begriffe 321.
Trigonometrie, nichteuklidische 283.
Trugschluß (-schlüsse) 327.

Uhr(en) 355ff. 360ff.
Umkehrbarkeit 324. 479. 481.
Umkehrung 482. 532. 566.
Umstände 536ff. 544. 560ff. 577.
Unabhängigkeit 407. 417f. 448ff. 454. 486f. 510f. 574.
Unabhängigkeit der Zeit vom Orte 362ff.
unbegrenzt 315. 320.
undeformierbar 509ff.
Undulation 491ff. 512. 543.
unendlich 494. 554f.
unendlich groß 262f.
unendlich hoch 296.
unendlich klein 296. 469.
Unendlichkeit der Geraden 282. 284.
Unendlichkeit des astronomischen Universums 393.
Unendlichkeit des Raumes 320. 341.
Unerheblichkeit der mechanischen Erklärung in der Biologie 572ff.
ungleich 401. 406.
Ungleichung(en) 431. 479.
universell 457. 526. 539.
Unmöglichkeit des Perpetuum mobile 474f.
Unordnung des Systems 481.
unpolarisierbar 511.
Unregelmäßigkeit der Erscheinungen 273.
Unterordnung 346.
Unterscheidung zwischen der Genauigkeit eines Satzes und der seiner Anwendung 275.
Unterschied(e) 446. 457. 483. 490. 543f. 549. 561f.
unveränderlich, Unveränderlichkeit 424. 431. 547.
Unvollkommenheit der Modelle 274.

Ursache(n) 299. 359ff. 376f. 462. 537. 547. 551. 555f. 564ff. 571.
Ursache und Wirkung 562.

variabel 414. 417.
Variation(en), erbliche individuelle 571f.
—, phylogenetische 299.
Vektor(en) 501f. 531.
Vektorgleichung 413. 528. 531.
vektoriell 386. 417. 502.
Venus 440.
Veränderung(en) 469ff. 480f. 513. 528. 536. 537ff. 547. 552. 566. 570f. 577.
Verbindung(en) 370. 380. 423ff. 428ff. 432f. 434f. 437f. 458. 461. 465. 507. 541. 543.
verborgen 483f. 507f. 574.
Vereinbarung 265. 355f. 455.
Vereinheitlichung 458f. 461. 525. 532.
Vereinigung 447f.
Vererbung 299. 577.
Verifikation(en) 347. 361. 373. 426f. 436ff. 450. 461. 483f. 503. 517. 533f. 539. 567.
Verifikation der Dynamik 436ff. 540.
Verifikation einer geometrischen Eigenschaft 273f.
Vernünftigkeit menschlicher Handlungen 552.
Verschiedenheit der mathematischen Veranlagung 284ff.
Versuch(e) 336. 371. 410. 412. 428. 519. 534.
—, Michelsonscher 521f.
Verteilung 478. 482. 487.
Verteilungsmodul 478.
Vitalismus 563.
Volumen 389. 403f. 431. 447. 464. 467. 490. 522f.
Voraussage(n) 347. 351. 372. 378. 439. 442f. 460. 468. 517. 534. 542. 544. 546ff. 551. 554. 563f. 573f.
Voraussetzung(en) 372f. 385. 421f. 446. 534.
Vorgänge 479ff. 491. 569.
Vorstellung(en) 305f. 307f. 366ff. 374. 381. 391. 404. 482f. 486.

Wage 447ff.
Wahrnehmung(en) 304ff. 377. 379f. 390. 548. 564.
Wahrscheinlichkeit 463. 481.
Wanderungen der Energie 490.
Wärme 449ff. 460. 469. 471ff. 483. 491. 497. 528. 558.
Wärme, spezifische 464. 473.
Wärmeäquivalent 471.
Wärmeflüssigkeit 472. 475.
Wärmemenge 449ff. 472.
Wärmestrahlen 545.
Wärmetheorie 469. 471ff. 497.
Wellen, elektromagnetische 513f.
Wellenlänge 545.
Wert der mechanischen Modelle und Gleichungen 540ff.
Werturteil 551ff.
Widerstand 419. 493. 505.
— der Luft 438.
Willen 548. 551ff. 554. 563.
Willensfreiheit 550ff.
Willenstatsachen 554.
willkürlich 395. 455.
Willkürlichkeit 453.
Willkürlichkeit der Postulate 295ff.
Winkel 394f. 398f.
Wirbel 525.
Wirbelbewegung(en) 461. 477.



wirklich(es) 358. 390. 524.
Wirklichkeit 456f. 459. 487. 489. 524f. 546.
Wirkung(en) 376. 378. 384. 433f. 462. 467ff. 491. 496. 504ff. 516. 519ff. 530. 532. 551. 558. 565ff.
—, elektrostatische 495f.
—, mittlere 481ff. 484. 526.
Wirkung und Gegenwirkung 378. 382. 386ff. 389f. 408ff. 420ff. 434. 466. 468. 517ff. 534f.
Wissen 548. 574ff.
Wissenschaft(en) 421. 445. 460f. 541f. 548ff. 557. 563. 567. 572f. 576f.
Wollen 548. 553f. 555.
Wurf 438.

Zähigkeit 494.
Zahl(en) 352. 381. 389. 402. 452. 484.
Zeit 350. 346ff. 362ff. 436. 447. 501f. 523.
Zeitdauer 352ff.
Zeitintervalle 353ff. 359f.
Zeitmessung 349. 351ff.
Zeitskala (-skalen) 349f. 351ff.
Zeitvorstellungen 349ff.
Zelle 560.
zellenförmig 499.
Zellreaktion 562.
Zentralkräfte 434f. 466ff. 471. 474. 484.
Zentren 309. 478.
Zentrifugalkräfte 397.
Zuchtwahl, natürliche 299f. 572.
Zug 382. 385. 387. 400. 467.
Zuordnung 442. 452. 544.
Zuordnung der Bewegungen zu den Wahrnehmungen 299f.
Zusammendrückbarkeit 494.
Zusammenhang 526. 537f. 559. 577.
Zusammensetzung(en) 402ff. 447. 576.
Zusammensetzung der Kräfte 383ff. 426.
Zwang, kleinster 434f. 507.
Zweck(e) des Lebens 563ff.
Zweckbegriff 562.
zweckmäßig und zweckvoll 562ff.
zweidimensial 330ff.
Zweiseitigkeit 315.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.


## Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

**Cornelius, Dr. Hans,** Professor an der Universität München, Einleitung in die Philosophie. [XIV u. 357 S.] gr. 8. 1902. Geh. *M* 4.80, in Leinw. geb. *M* 5.60.

„Es kann nicht die Aufgabe einer Rezension dieses bedeutenden und inhaltsschweren Buches an dieser Stelle sein, alle philosophischen Wege aufzuzeigen, die der Verfasser mit großer Sorgfalt und wissenschaftlicher Gewissenhaftigkeit durchgeht. Der Umstand jedoch, daß das Buch sich nicht ins einzelne der Fachwissenschaft und Fachpolemik verliert, sondern in einer in Ansehung des Gegenstandes leicht verständlichen Sprache und zugleich in liebenswürdiger Weise, die hier und da auch die Wiederholung dem rekapitulationsbedürftigen Leser zuliebe nicht scheut, seine Themata abhandelt, berechtigt zu der lebhaften Mahnung an alle irgendwie philosophisch Interessierten, nicht daran vorüberzugehen."
**(Theologischer Literaturbericht.)**

—— Psychologie als Erfahrungswissenschaft. [XV u. 445 S.] gr. 8. 1897. Geh. *M*. 10.—.

„Zu den an erster Stelle stehenden Leistungen der psychologischen Wissenschaft, auf welche diese Namen hinweisen, gehört auch das vorliegende Werk ... An neuen ‚Psychologien' war in den letzten Jahren gewiß kein Mangel, die aber großenteils sich mehr als Zusammenfassungen bereits bekannter Tatsachen und Standpunkte, denn als selbständige Darstellungen zu erkennen gaben, und vielfach die eigentlich wichtigen, prinzipiellen Fragen der Psychologie hinter Einzelheiten zurücktreten ließen. Im Gegensatz hierzu sucht das vorliegende Werk überall gerade diese prinzipiellen Fragen der Psychologie zu beantworten und weiß, bei strikter Wahrnehmung der empirischen Methode, den Mechanismus der Bewußtseinsvorgänge in überzeugender Klarheit von den elementarsten bis zu den kompliziertesten Prozessen auf Grund einer Reihe wesentlich neuer Gesichtspunkte und Betrachtungsweisen vor uns zu entwickeln."
**(Allgemeine Zeitung.)**

—— Einleitung in die Erkenntnistheorie für Naturwissenschaftler. [ca. 20 Bogen.] gr. 8. In Leinw. geb. [In Vorbereitung.]

**Emden, Dr. R.,** Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. [VI u. 498 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. *M* 13.—.

Untersuchungen über den Bau und die fortschreitende Entwicklung gasförmiger Himmelskörper liegen nur in einigen, z. T. schwer zugänglichen Abhandlungen vor, von denen in erster Linie diejenigen von H. Lane, W. Thomson, G. Darwin und A. Ritter zu erwähnen sind. Verfasser hat diese Untersuchungen neu aufgenommen, von möglichst allgemeinen Gesichtspunkten aus durchgeführt und die erhaltenen Resultate in Form eines kurzen Lehrbuches niedergelegt. Die notwendigen mechanischen Quadraturen sind sehr exakt ausgeführt; dadurch ist ein wertvolles Zahlenmaterial als Grundlage weiterer Forschung gewonnen. Der 2. Teil des Buches behandelt die Anwendungen dieser Untersuchungen auf kosmische Staubmassen, Nebelflecke, die Erde nebst ihrer Atmosphäre und die Sonne. Die Strahlenbrechung in einer kugelförmigen Gasmasse, die durch innere Gravitation zusammengehalten wird, ist eingehend behandelt, was mit Hinblick auf einige neuere Ansichten über die Strahlenbrechung auf der Sonne von besonderer Wichtigkeit sein dürfte.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.


## Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

**Cornelius, Dr. Hans,** Professor an der Universität München, Einleitung in die Philosophie. [XIV u. 357 S.] gr. 8. 1902. Geh. *M* 4.80, in Leinw. geb. *M* 5.60.

„Es kann nicht die Aufgabe einer Rezension dieses bedeutenden und inhaltsschweren Buches an dieser Stelle sein, alle philosophischen Wege aufzuzeigen, die der Verfasser mit großer Sorgfalt und wissenschaftlicher Gewissenhaftigkeit durchgeht. Der Umstand jedoch, daß das Buch sich nicht ins einzelne der Fachwissenschaft und Fachpolemik verliert, sondern in einer in Ansehung des Gegenstandes leicht verständlichen Sprache und zugleich in liebenswürdiger Weise, die hier und da auch die Wiederholung dem rekapitulationsbedürftigen Leser zuliebe nicht scheut, seine Themata abhandelt, berechtigt zu der lebhaften Mahnung an alle irgendwie philosophisch Interessierten, nicht daran vorüberzugehen."
**(Theologischer Literaturbericht.)**

—— Psychologie als Erfahrungswissenschaft. [XV u. 445 S.] gr. 8. 1897. Geh. *M*. 10.—.

„Zu den an erster Stelle stehenden Leistungen der psychologischen Wissenschaft, auf welche diese Namen hinweisen, gehört auch das vorliegende Werk ... An neuen ‚Psychologien' war in den letzten Jahren gewiß kein Mangel, die aber großenteils sich mehr als Zusammenfassungen bereits bekannter Tatsachen und Standpunkte, denn als selbständige Darstellungen zu erkennen gaben, und vielfach die eigentlich wichtigen, prinzipiellen Fragen der Psychologie hinter Einzelheiten zurücktreten ließen. Im Gegensatz hierzu sucht das vorliegende Werk überall gerade diese prinzipiellen Fragen der Psychologie zu beantworten und weiß, bei strikter Wahrnehmung der empirischen Methode, den Mechanismus der Bewußtseinsvorgänge in überzeugender Klarheit von den elementarsten bis zu den kompliziertesten Prozessen auf Grund einer Reihe wesentlich neuer Gesichtspunkte und Betrachtungsweisen vor uns zu entwickeln."
**(Allgemeine Zeitung.)**

—— Einleitung in die Erkenntnistheorie für Naturwissenschaftler. [ca. 20 Bogen.] gr. 8. In Leinw. geb. [In Vorbereitung.]

**Emden, Dr. R.,** Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. [VI u. 498 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. *M* 13.—.

Untersuchungen über den Bau und die fortschreitende Entwicklung gasförmiger Himmelskörper liegen nur in einigen, z. T. schwer zugänglichen Abhandlungen vor, von denen in erster Linie diejenigen von H. Lane, W. Thomson, G. Darwin und A. Ritter zu erwähnen sind. Verfasser hat diese Untersuchungen neu aufgenommen, von möglichst allgemeinen Gesichtspunkten aus durchgeführt und die erhaltenen Resultate in Form eines kurzen Lehrbuches niedergelegt. Die notwendigen mechanischen Quadraturen sind sehr exakt ausgeführt; dadurch ist ein wertvolles Zahlenmaterial als Grundlage weiterer Forschung gewonnen. Der 2. Teil des Buches behandelt die Anwendungen dieser Untersuchungen auf kosmische Staubmassen, Nebelflecke, die Erde nebst ihrer Atmosphäre und die Sonne. Die Strahlenbrechung in einer kugelförmigen Gasmasse, die durch innere Gravitation zusammengehalten wird, ist eingehend behandelt, was mit Hinblick auf einige neuere Ansichten über die Strahlenbrechung auf der Sonne von besonderer Wichtigkeit sein dürfte.

**Galilei, Galileo,** Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von E. Strauß. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. Geh. *M* 16.—.

Das Buch verdient als Quelle der vielen landläufigen Argumente für das kopernikanische System, als farbenprächtiges Gemälde des Ringens mittelalterlicher mit neuzeitlicher Weltanschauung, als Ausgangspunkt für eine Menge physikalischer Untersuchungen der Folgezeit die höchste Beachtung. Die Darstellung ist so klar, daß die meisten Partien einem Primaner völlig verständlich sind und für ihn eine belehrende und anregende Lektüre bilden würden, wie andererseits der Kulturhistoriker in keiner Geschichte der Philosophie eine anschaulichere Schilderung vom Stande der damaligen Naturphilosophie finden kann. — Eine Einleitung, die unter anderem eine biographische Skizze Galileis enthält, und eingehende historische und sachliche Anmerkungen werden das Verständnis und die Würdigung des Werkes erleichtern und mancherlei irrige Ansichten des Verfassers berichtigen; auch Irrtümer, wenn als solche erkannt, und namentlich Irrtümer eines Mannes wie Galilei sind belehrend und verschaffen Einblick in die Geschichte der Wissenschaft.

**Günther, Ludwig,** Direktor in Fürstenwalde, die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers, besonders seiner Gesetze und Probleme. Mit 13 Figuren, 1 Tafel und vielen Tabellen. [XIV u. 156 S.] 8. 1909. Geh. *M* 2.50.

„... Die schwierige Aufgabe, Keplers Lebensarbeit gemeinverständlich darzustellen und ihr Verhältnis zum heutigen Stande der Astronomie aufzuhellen, ist dem Verfasser trefflich gelungen. Ein knapper, klarer Überblick der Alten bis zu Kepler schafft den historischen Hintergrund und damit besseres Verständnis für die im folgenden ausgeführten Gesetze und Kräfte der Sternenwelt in ihrem Zusammenhange. Beigefügte Abbildungen und Tabellen erleichtern das Verständnis. Besonders lichtvoll ist dargestellt, welche Wege Kepler zur Erforschung der Himmelskörper einschlug, um sein großes Ziel zu erreichen. Lehrer seien auf dieses Buch ganz besonders aufmerksam gemacht." **(Badische Schulzeitung.)**

**Hensel, Dr. Paul,** Professor an der Universität Erlangen, Hauptprobleme der Ethik. Sieben Vorträge. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 1.60, geb. *M* 2.20.

Der Verfasser geht vom Wege der Ethik als der Wissenschaft vom menschlichen Handeln aus, die uns dessen geschichtliche Entwicklung und seine Gesetze erkennen lehrt. Gegenüber dem Utilitarismus hebt er hervor, daß nicht der Erfolg für den Wert unserer Handlungen maßgebend sein kann, sondern die Gesinnung, durch die sie veranlaßt werden. Die Gesinnungsethik allein bietet in dem pflichtmäßigen Handeln einen sicheren Maßstab der Beurteilung. Je dringender die Gegenwart eine Auseinandersetzung mit den verschiedenen geistigen Strömungen fordert, je mehr die Persönlichkeit wieder nach festen Normen des Handelns verlangt, um so mehr Aufmerksamkeit wird man diesem Buche schenken müssen, das diese Fragen in klarer und ansprechender Weise behandelt.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

**Holzmüller, Dr. Gustav,** Professor in Hagen i. W., elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte. Mit 8 Figuren im Text. [VI u. 98 S.] 8. 1906. Geh. *M* 1.80.

Die kosmischen Betrachtungen beziehen sich zunächst auf die Himmelsmechanik. Die Ableitung der drei Keplerschen Gesetze aus der Newtonschen Anziehungshypothese gelingt ihm auf elementarem Wege. Auch das Gesetz für kleine Störungen wird einfach entwickelt. Mit den mechanischen Betrachtungen werden sofort die wärmetheoretischen Entdeckungen von Rob. Mayer und H. v. Helmholtz und andere physikalische Probleme behandelt. Der gegenwärtige Zustand der Sonne wird nach den neuesten Forschungen dargestellt. Die Stoffauswahl geschah in der Absicht, eine kritische Besprechung der von Kant und Laplace aufgestellten Theorien über die Bildung des Sonnensystems zu ermöglichen, die durchaus ablehnend ausfällt.

„... Wie prächtig ist das Büchlein, das da der einstige Leipziger Dozent auf Grund eines Würzburger Ferienkursus herausgibt! Wem eine solche Darstellung nicht Lust und Mut zur näheren Beschäftigung mit der neueren Philosophie macht, dem wird kaum etwas anderes helfen. Edle und doch allzeit klare Bildlichkeit des Ausdrucks, eine übersichtliche Disposition, vorsichtiges und doch aufrichtiges Urteil: alles hilft zusammen, um die Lektüre zur Freude zu machen."
**(Wissenschaftliche Beilage der Leipziger Zeitung.)**

**Lipps, Dr. G. F.,** Professor an der Universität Leipzig, das moderne Bildungsideal und der wissenschaftliche Schulunterricht. [ca. 300 S.] gr. 8. Geh. [Erscheint Ostern 1910.]

**Petzoldt, Dr. Joseph,** Oberlehrer am Gymnasium zu Spandau, Einführung in die Philosophie der reinen Erfahrung. Erster Band: Die Bestimmtheit der Seele. [XIV u. 356 S.] gr. 8. 1899. Geh. *M* 8.—. Zweiter Band: Auf dem Wege zum Dauernden. [VIII u. 342 S.] gr. 8. 1904. Geh. *M* 8.—.

Das Buch bietet eine Einführung in den Anschauungskreis, als dessen hauptsächlichste Vertreter Richard Avenarius und Ernst Mach zu gelten haben. Ihre Philosophie, insbesondere die schwer verständliche Kritik der reinen Erfahrung von Avenarius, leicht zugänglich zu machen, ist eine der Hauptaufgaben des Werkes. Es gewinnt aber auch durch die eingehende Begründung und Anwendung der beiden Prinzipien der Eindeutigkeit und der Tendenz zur Stabilität die Mittel zur Beurteilung, Um- und Weiterbildung jener Philosophie.

**Riehl, Dr. Alois,** Professor an der Universität Berlin, zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Acht Vorträge. 3., durchgesehene und verbesserte Auflage. [VI u. 274 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M* 3.—, in Leinwand geb. *M* 3.60.

„Riehls Buch gehört zu denen, welche eine Empfehlung nicht mehr nötig haben. In meisterhafter Darstellung führt er uns auf historischem Wege zu dem Punkte philosophischer Entwicklung, den er als Höhepunkt ansieht: Kant. Aber die Philosophie darf auch bei Kant nicht stehen bleiben, denn die besonderen Probleme werden ihr von der forschenden Wissenschaft geliefert. Und diese exakte Wissenschaft beherbergt heute

den philosophischen Geist. Rob. Mayer, Helmholtz, Hertz sind seine Vertreter, uud das Energiegesetz ist ‚der größte Fortschritt der allgemeinen Wissenschaftslehre seit der Kritik der reinen Vernunft'. Auf Grund solcher Anschauung rückt Riehl auch die Erörterung über naturwissenschaftlichen und philosophischen Monismus in den Mittelpuukt."
(Straßburger Post.)

**Volkmann**, Dr. P., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Fähigkeiten der Naturwissenschaften und Monismus der Gegenwart. [38 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 1—.

Während der Verfasser in einer früheren Rede den naturwissenschaftlichen Monismus einer Betrachtung unterzogen hat, wendet er sich in dem vorliegenden Vortrage dem vulgären und philosophischeu Mouismus zu. Im besonderen findeu sich behandelt: Die Rolle des entwicklungsgeschichtlichen Gedankens uud der Formalismus im Monismus.

——Die materialistische Epoche des neunzehnten Jahrhunderts und die phänomenologisch-monistische Bewegung der Gegenwart. [30 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 1.—.

Die Rede nimmt Stellung zu einer Reihe aktueller Fragen; von besonderem Interesse ist vielleicht als Beitrag zu einer Psychologie der Völker die Behandlung vou Kant als Typus des deutschen Idealismus, von Laplace als Typus des französischen Materialismus. Wie man Frankreich als Wiege des Materialismus bezeichnen kann, wird man von einer Empfänglichkeit der germanischen Rasse für den Monismus sprechen köuen.

**Voß**, Dr. A., Professor an der Universität München, über das Wesen der Mathematik. [98 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 3.60.

„... Deu größten Genuß wird die Schrift den Mathematikern selbst bereiten, insbesondere durch den neben der eigentlichen Rede einhergeheudeu, ihr an Umfang fast gleichen kritischen Apparat, in welchem der Autor zu vielen strittigen Fragen, vornehmlich zu solchen, die dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie angehören, Stellung nimmt. Dadurch erhebt sich die kleine Publikatiou über den Rahmen einer bloßen Gelegenheitsschrift und erlangt bleibenden Wert."
(E. Czuber in der Neuen Freien Presse.)

**Weinstein**, Geheimer Regierungsrat, Professor Dr. B., Privatdozent an der Universität Berlin, die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen, gehalten an der Universität Berlin. [XIV u. 543 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. ℳ 9.—.

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften. Der Ableitung eines Systems der Grundlagen geht die Untersuchung über ihreu Inhalt voraus und folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, welche für die Ermitteluug der Grundlagen maßgebend sind. Bei der Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Inneuwelt kommen insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache. Hierauf werden die Hauptgruudlagen vom Standpunkte der Erfahruug und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen: der Begriffder Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substanzialität und Ursächlichkeit, sowie das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Welterhaltung uud Weltentwickluug dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen.





# DIE KULTUR DER GEGENWART

## IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

### HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR PAUL HINNEBERG

In 4 Teilen. Lex.-8. Jeder Teil zerfällt in einzelne inhaltlich vollständig in sich abgeschlossene und einzeln käufliche Bände (Abteilungen).

Teil I: **Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.** I. Hälfte. Religion und Philosophie, Literatur, Musik und Kunst (mit vorangehender Einleitung zu dem Gesamtwerk).

Teil II: **Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.** 2. Hälfte. Staat und Gesellschaft, Recht und Wirtschaft.

Teil III: **Die naturwissenschaftlichen Kulturgebiete.** Mathematik, Anorgauische und organische Naturwissenschaften, Medizin.

Teil IV: **Die technischen Kulturgebiete.** Bautechnik, Maschinentechnik, industrielle Technik, Landwirtschaftliche Technik, Handels- und Verkehrstechnik.

Die „Kultur der Gegenwart" soll **eine systematisch aufgebaute, geschichtlich begründete Gesamtdarstellung** unserer heutigen Kultur darbieten, indem sie die Fundamentalergebnisse der einzelnen Kulturgebiete nach ihrer Bedeutung für die gesamte Kultur der Gegenwart und für deren Weiterentwicklung in großen Zügen zur Darstellung bringt. Das Werk vereinigt eine **Zahl erster Namen aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis** und bietet Darstellungen der einzelnen Gebiete jeweils aus der Feder des dazu Berufensten **in gemeinverständlicher, künstlerisch gewählter Sprache auf knappstem Raume.**

„... Wenden wir aber unseren Blick zu den einzelnen Leistungen, die hier in reichlichster Fülle geboten sind, dann wissen wir in der Tat nicht, was wir herausgreifen und nennen sollen. Aus jedem der angedeuteten Gebiete hat ja ein Meister seines Faches das Wichtigste kurz und übersichtlich gegeben, bald aus seiner Geschichte das Wesen des behandelten Gegenstandes erläuternd, bald ihn in mehr prinzipieller und schematischer Form vor dem Leser ausbreitend. Abgesehen von dem Wert der hervorragenden Einzelleistungen erhält das ganze Unternehmen, zu dem es gehört, seinen besonderen Wert dadurch, daß es versucht, unser Wissen und Können zu einer möglichst systematischen Einheit zu verarbeiten. Damit wird es einem gebieterischen Bedürfnis unserer aus der seelischen Zerklüftung zur Einheit strebenden Zeit gerecht uud steht so da als ein bedeutsames Zeichen der Zeit."
**(Deutsche Zeitung.)**

**Probeheft und Sonder-Prospekte** über die einzelnen Abteilungen (mit Auszug aus dem Vorwort des Herausgebers, der Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, dem Autoren-Verzeichnis und mit Probestücken aus dem Werke) werden auf Wunsch umsonst und postfrei vom Verlag versandt.

# DIE KULTUR DER GEGENWART

Von Teil I und II sind erschienen:

**Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart.** (I, 1.) Bearbeitet von W. Lexis, Fr. Paulsen, G. Schöppa, A. Matthias, H. Gaudig, G. Kerschensteiner, W. v. Dyck, L. Pallat, K. Kraepelin, J. Lessing, O. N. Witt, G. Göhler, P. Schlenther, K. Bücher, R. Pietschmann, F. Milkau, H. Diels. [XV u. 671 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 16.—, in Leinwand geb. *M.* 18.—

**Die orientalischen Religionen.** (I, 3, 1.) Bearbeitet von Edv. Lehmann, A. Erman, C. Bezold, H. Oldenberg, J. Goldziher, A. Grünwedel, J. J. M. de Groot, K. Florenz, H. Haas. [VII u. 267 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 7.—, in Leinwand geb. *M.* 9.—

**Geschichte der christlichen Religion.** Mit Einleitung: **Die israelitisch-jüdische Religion.** (I, 4, 1.) Bearbeitet von J. Wellhausen, A. Jülicher, A. Harnack, N. Bonwetsch, K. Müller, A. Ehrhard, E. Troeltsch. 2. stark vermehrte und verbesserte Auflage. [X u. 792 S.] Lex.-8. 1909. Geh. *M.* 18.—, in Leinwand geb. *M.* 20.—

**Systematische christliche Religion.** (I, 4, II.) Bearbeitet von E. Troeltsch, J. Pohle, J. Mausbach, C. Krieg, W. Herrmann, R. Seeberg, W. Faber, H. J. Holtzmann. 2. verbesserte Auflage. [VIII u. 279 S.] Lex.-8. 1909. Geh. *M.* 6.60, in Leinwand geb. *M.* 8.—

**Allgemeine Geschichte der Philosophie.** (I, 5.) Bearbeitet von W. Wundt, H. Oldenberg, J. Goldziher, W. Grube, T. Jnouye, H. v. Arnim, Cl. Baeumker, W. Windelband. [VIII u. 572 S.] Lex.-8. 1909. Geh. *M.* 12.—, in Leinwand geb. *M.* 14.—

**Systematische Philosophie.** (I, 6.) Bearbeitet von W. Dilthey, A. Riehl, W. Wundt, W. Ostwald, H. Ebbinghaus, R. Eucken, Fr. Paulsen, W. Münch, Th. Lipps. 2. Auflage. [X u. 435 S.] Lex.-8. 1908. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die orientalischen Literaturen.** (I, 7.) Bearbeitet von E. Schmidt, A. Erman, C. Bezold, H. Gunkel, Th. Nöldeke, M. J. de Goeje, R. Pischel, K. Geldner, P. Horn, F. N. Finck, W. Grube, K. Florenz. [IX u. 419 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die griechische und lateinische Literatur und Sprache.** (I. 8.) Bearbeitet von: U. v. Wilamowitz-Moellendorff, K. Krumbacher, J. Wackernagel, Fr. Leo, E. Norden, F. Skutsch. 2. Aufl. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die osteuropäischen Literaturen und die slawischen Sprachen.** (I, 9.) Bearbeitet von A. Bezzenberger, A. Brückner, V. v. Jagić, J. Máchal, M. Murko, F. Riedl, E. Setälä, G. Suits, A. Thumb, A. Wesselovsky, E. Wolter. [VIII u. 396 S.] 1908. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 12.—

**Die romanischen Literaturen und Sprachen. Mit Einschluß des Keltischen.** (I, 11, 1.) Bearbeitet von H. Zimmer, K. Meyer, L. Chr. Stern, H. Morf, W. Meyer-Lübcke. [VII u. 499 S.] 1909. Geh. *M.* 12.—, in Leinwand geb. *M.* 14.—

**Staat und Gesellschaft der neueren Zeit** (bis zur französischen Revolution). (II, 5, 1.) Bearbeitet von F. v. Bezold, E. Gothein, R. Koser. [VI u. 349 S.] Lex.-8. 1908. Geh. *M.* 9.—, in Leinwand geb. *M.* 11.—

**Systematische Rechtswissenschaft.** (II, 8.) Bearbeitet von R. Stammler, R. Sohm, K. Gareis, V. Ehrenberg, L. v. Bar, L. v. Seuffert, F. v. Liszt, W. Kahl, P. Laband, G. Anschütz, E. Bernatzik, F. v. Martitz. [X, LX u. 526 S.] Lex.-8. 1906. Geh. *M.* 14.—, in Leinwand geb. *M.* 16.—

**Allgemeine Volkswirtschaftslehre.** (II. 10. 1.) Von W. Lexis. Geh. ca. *M.* 8.—, in Leinwand geb. ca. *M.* 9.—

101 L
En 7 2
Enriques
Probleme der wissenschaft
SEP 14 1910